（平成 22 年 8 月 18 日実施）

平成 **23** 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

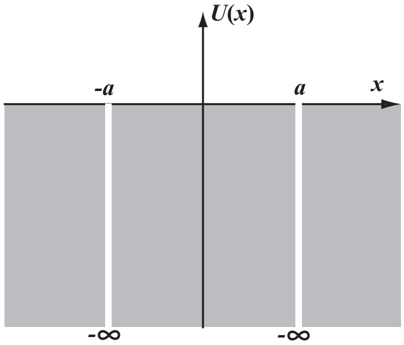
受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 **III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 **III, IV** を解答すること。
  - 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 **III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 二重量子井戸の単純なモデルとして、図のような２つのデルタ関数型のポテンシャルが距離 $2a$ だけ、離れておかれたモデルを考える。ポテンシャルは、$U(x) = -\beta[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$ $(\beta > 0)$ である。以下の設問に答えなさい。



1-1. 1 次元ポテンシャル $U(x)$ が偶関数なので、波動関数は偶関数か奇関数である。これを示せ。但し、固有状態は縮退していない事を使って良い。

1-2. 質量 m の粒子が、この２つのデルタ関数型のポテンシャルに束縛されているとき、領域 I$(x < -a)$、領域 II$(-a < x < a)$、 領域 III$(a < x)$ のそれぞれの領域において、波動関数の一般解を求めよ。但し規格化やポテンシャル境界での接続条件は考慮しなくて良い。

1-3. このような無限大のポテンシャルがある場合に、その点で波動関数 $\psi(x)$ の微分が次式を満たす事をシュレーディンガー方程式を微小区間 $[a-\epsilon,\, a+\epsilon]$ に渡って積分することによって示しなさい。ここで、ϵ は正の微小量とする。

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{a+\epsilon} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{a-\epsilon}\right) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(a)$$

1-4. 質量 m の粒子が、この２つのデルタ関数型のポテンシャルに束縛されているとき、波動関数が奇関数の場合について、**1-3** を利用して波動関数と固有エネルギー E を求めよ。但し、波動関数は規格化しなくて良い。また、固有エネルギー E は、解析的に得ることは出来ないので、固有値条件が次式になる事を示せ。

$$\tanh\kappa a = \left(\frac{\gamma}{\kappa} - 1\right)^{-1} \quad 但し\ \kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}},\ \ \gamma = \frac{2m\beta}{\hbar^2}\ である。$$

1-5. **1-4** の奇関数解が存在する条件を求めよ。

問 2 質量 m、電荷 e を持ち、固有振動数が ω である 1 次元調和振動子について考える。

2-1. 1 次元調和振動子のハミルトニアン $\hat{H}$ は位置演算子 $\hat{x}$ とその共役運動量演算子 $\hat{p}$ を使って次のように書ける。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$$

ここで消滅演算子 $\hat{a}$、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$、数演算子 $\hat{N}$ を以下のように定義する。

$$\hat{a} = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\ \hat{p}\right),\quad \hat{a}^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\ \hat{p}\right),\quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

この時、ハミルトニアンが次式のように書ける事を示せ。

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

2-2. **2-1** で定義した数演算子 $\hat{N}$ が、固有値 n の固有状態 $|n\rangle$ を持つ時、これらの固有状態が正規直交完全系を張る事を使って、固有値 n が非負の値である事を示せ。

2-3. 数演算子の固有状態 $|n\rangle$ に演算子 $\hat{a}$ を作用させた $\hat{a}|n\rangle$ が、数演算子 $\hat{N}$ の固有値 $n-1$ に属する固有状態である事を示し、かつ基底状態が $|0\rangle$ の状態であることを示せ。

2-4. 基底状態の座標表示 $\langle x|0\rangle(=\psi_0(x))$ を $\hat{a}\psi_0(x) = 0$ を利用して、具体的に求めよ。

2-5. 次に、今まで考察してきた電荷 e を持つ 1 次元調和振動子に、一様な静電場 E を x 軸の正方向にかけた。基底状態を座標表示で、具体的に求めよ。

問題 IV

問 1 図 1 のような容器内に気体が閉じ込められている。容器はシリンダー、ピストン、熱浴で構成されており、シリンダーとピストンは断熱材でできている。熱浴部には温度 T_h の高温熱浴または温度 $T_c(< T_h)$ の低温熱浴を取りつけて気体と熱のやり取りができる。ピストンはシリンダー内壁に沿って動かして、気体の体積を変化させることができ、動かす際のピストンとシリンダー内壁の間の摩擦は無視できるものとする。この気体の状態方程式は $PV = NkT$（P: 気体の圧力, V: 気体の体積, N: 気体の粒子数, k: ボルツマン定数, T: 気体の温度）とし、内部エネルギー U は $U = C_V T$（C_V は正の定数）であるとする。

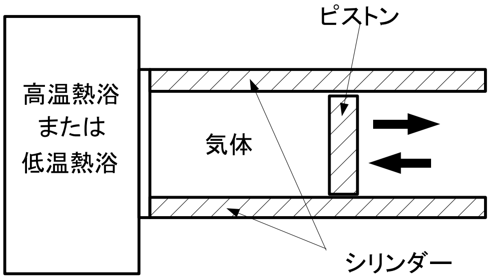


図 1

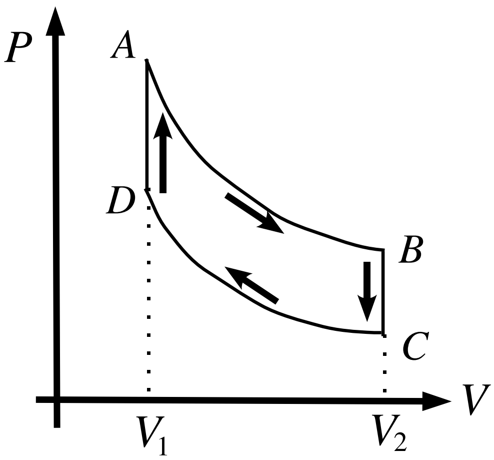


図 2

ピストンを無限にゆっくり動かして、気体の状態が図 2 の $V-P$ 面上を矢印の向きにたどるように変化させて熱機関を構成する。図 2 中、$A \to B$ では高温熱浴を接触させて気体を高温熱浴と同じ温度 T_h に保って変化させており、B の状態になった後すぐに熱浴を低温熱浴に切り替えて、体積を V_2 に保ったままで気体を $B \to C$ に変化させる。$C \to D$ では低温熱浴を接触させて気体を低温熱浴と同じ温度 T_c に保って変化させており、D の状態になった後すぐに熱浴を高温熱浴に切り替えて、体積を $V_1(< V_2)$ に保ったままで気体を $D \to A$ に変化させる。以下の設問には N, k, C_V, V_1, V_2, T_h, T_c を用いて答えよ。

1-1. この熱機関の 1 サイクルで気体が外部にした仕事 W を求めよ。

1-2. このサイクル中 $A \to B$ と $D \to A$ で高温熱浴から気体に熱が流れることに注意して、1 サイクルで高温熱浴から気体に流れた熱量 Q_h を求めよ。

1-3. $\eta = \dfrac{W}{Q_h}$ で定義される熱機関の効率 η を求めよ。また、この η をカルノー効率 $1 - \dfrac{T_c}{T_h}$ と比べたときの大小について答えよ。

1-4. 全系を気体、高温熱浴、低温熱浴の 3 つに分けて考えて、この熱機関を 1 サイクル動かしたとき、3 つそれぞれのエントロピー増加量を求めよ。それから全系の 1 サイクルあたりのエントロピー増加量 ΔS を求め、ΔS の正負について答えよ。

問 2 気体粒子 1 個を吸着し得る吸着点を M $(\gg 1)$ 個もつ吸着板（図 3）がある。粒子が吸着すると、吸着点のエネルギーは ϵ (> 0) だけ下がる。吸着点は互いに独立であり、ボルツマン定数を k、逆温度を $\beta = 1/kT$ として、以下の設問に答えよ。

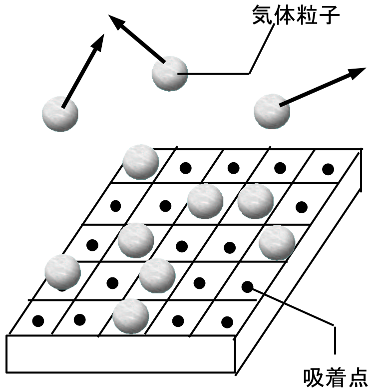


図 3

2-1. この吸着板が温度 T、化学ポテンシャル μ の気体（気体の粒子数 $\gg M$ であるとする）と平衡状態にあるとする。1 個の吸着点に吸着している粒子数 n は、$n = 0$ であるか $n = 1$ であるかのどちらかである。グランドカノニカル分布を使って、1 個の吸着点の大分配関数 Ξ_1 を求めよ。

2-2. **2-1** の状況で、吸着板全体に吸着している粒子数 N の平均値 $\bar{N}$ を β, ϵ, μ, M で表せ。

2-3. 次に、この吸着板全体に吸着している粒子数を N に固定し、吸着板を温度 T の平衡状態に保った状況を仮想的に考える。粒子が互いに区別できないとすると N 粒子の吸着板への配置の仕方は何通りあるか求めよ。

2-4. **2-3** の状況で、N 粒子が吸着したときのエネルギーは全ての配置で $-N\epsilon$ であるので、カノニカル分布を使って、吸着板上の粒子の分配関数 Z を求めよ。

2-5. $M \gg N \gg 1$ として、**2-4** の分配関数 Z より、吸着板上の粒子のヘルムホルツの自由エネルギー F を求め、吸着板上の粒子の化学ポテンシャル μ を β, ϵ, N, M で表せ。ここでは、$x \gg 1$ である量 x に対してスターリングの公式 $\log x! = x \log x - x$ が成立することを用いて解答せよ。

問題 V

問 1 以下の設問に答えなさい。

1-1. 以下の一階線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay - b = 0$$

の一般解を求めよ。ここで $y = y(x)$ とし、a, b は定数とする。

1-2. 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1-3. 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ。

1-4. 虚数単位 i の三乗根を求めよ。

1-5. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数であるとき、u と v は以下の微分方程式 (コーシー・リーマンの微分方程式) をみたす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ここで x と y は実数、u と v は実関数、i は虚数単位である。$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおき、上記の微分方程式を (r, θ) 座標系で表せ（r と θ は実数とする）。

1-6. z と a を複素数とする。このとき以下の周回積分

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{1}{z - a} dz$$

を求めよ。ここで C は複素平面上で a のまわりを一周する任意の閉曲線とする。

問 2 x と t の関数 $u(x,t)$ に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

を、初期条件 $u(x,t=0)=f(x)$、境界条件 $u(0,t)=u(\pi,t)$, $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}$ のもとで解くことを考える。このとき以下の設問に答えなさい。

2-1. $u(x,t)=X(x)T(t)$ と置くと、$X(x)$ と $T(t)$ はそれぞれ以下の常微分方程式をみたすことを示せ。

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = kX(x),$$
$$\frac{dT(t)}{dt} = kT(t).$$

ここで k は定数とする。

2-2. **2-1** に示した $X(x)$ と $T(t)$ に関する常微分方程式を与えられた境界条件のもとで解き、$u(x,t)$ を求めよ。

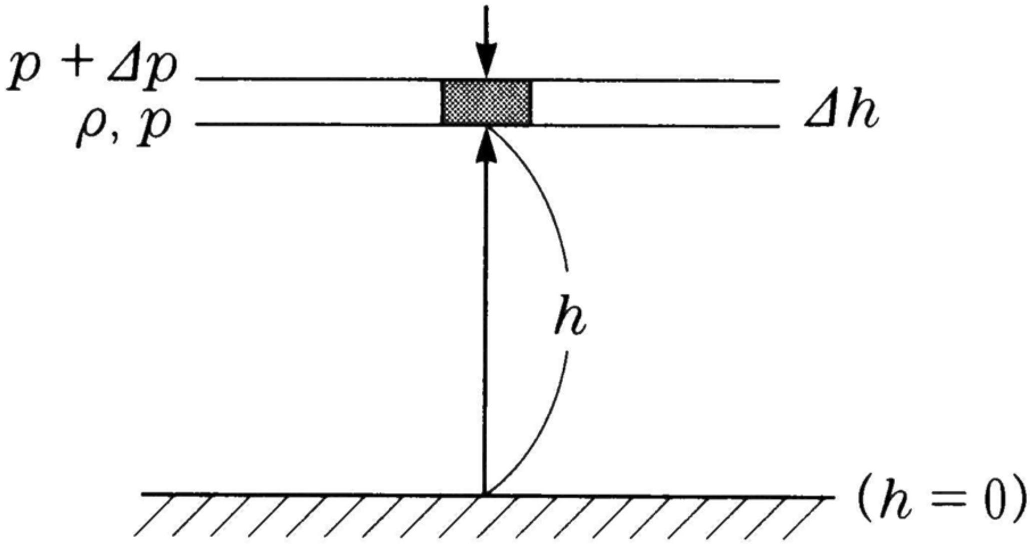
2-3. 初期条件 $u(x,t=0)=f(x)$ をみたす偏微分方程式 (1) の解は、**2-2** で導いた解の重ねあわせで表現される。この重ねあわせの解に現れる係数を $f(x)$ を用いて表せ。

2-4. $f(x)=(x-\pi/2)^2$ の場合の $t>0$ における偏微分方程式 (1) の解を求めよ.

問題 VI

問 1 惑星の重力と大気圧が釣り合っている場合を考える。このとき以下の設問に答えよ。

1-1. 高度 h における大気圧を p とし $h+\Delta h$ における大気圧を $p+\Delta p$ とする。Δh を微小量として、Δp を高度 h における密度 ρ 、重力加速度 g を用いて表せ。



1-2. 万有引力定数 G、惑星質量 M_p、惑星中心からの距離 r を用いて重力加速度 g を表し **1-1** で求めた式を書き直せ。

1-3. 大気圧が $1/e$ になる高さ (圧力スケールハイト) H を求めよ。ただし e は自然対数とする。

1-4. 次に太陽について考える。太陽の外側には陽子と電子のプラズマからなるコロナ領域が存在する。コロナ領域で、太陽の重力とプラズマの圧力が釣り合っていると仮定した場合、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{ds} = -\frac{GMm}{2s^2kT}$$

ここで、万有引力定数を G、ボルツマン定数を k、太陽質量を M、陽子と電子の質量の和を m、太陽中心からの距離を s とする。また、プラズマの温度は等温 T であり理想気体と仮定する。

1-5. 太陽中心からの距離 s を無限に大きくした場合のプラズマの圧力を p_∞ とし、

$$\frac{p_\infty}{p(R)} = \exp\left(-\frac{GMm}{2RkT}\right)$$

となることを示せ。ここで R は太陽半径（太陽中心からコロナ底部までの距離）とする。

1-6. **1-5** で求めた式に数値を代入すると $p_\infty/p(R) \approx 3 \times 10^{-4}$ となる。この数値は惑星間空間で人工衛星により測定された値より明らかに大きい。これは，太陽風が存在するために、**1-4** で用いた「コロナ領域で太陽の重力とプラズマの圧力が釣り合っている」という仮定が成り立っていないためである。太陽風は、太陽起源の磁力線を惑星間空間に引き出し、磁力線とともに運動している。その理由を簡潔に述べよ。また、地球軌道付近を流れる太陽風の方向は、地球の公転面内で太陽方向と約 45 度の角度をなす。その理由を簡潔に述べよ。

問 **2** 以下の問いから４問を選び答えよ。

2-1. 地球の質量を求める方法を 1 例あげて、それについて説明せよ。

2-2. プレートテクトニクスについて簡潔に説明せよ。

2-3. 地震波の P 波、S 波、シャドーゾーンについて説明せよ。

2-4. 乾燥断熱減率と湿潤断熱減率について説明せよ。

2-5. 太陽系の惑星の特徴について説明せよ.

2-6. コンドルールについて説明せよ.

2-7. 海洋の深層循環について説明せよ.

2-8. 下図は金星と地球の大気温度の高度分布を示している。地球と金星の温度分布の相違を列挙し、それをもたらす原因について説明せよ。