（平成 19 年 8 月 22 日実施）

平成 20 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	3 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 質量 m の小球が、重力と速度 v に比例する空気抵抗 $F_v = -bv$ (b は正定数) を受けて垂直落下している。重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

1-1. 小球の位置を z, 重力の働く向きを $+z$ 方向として、小球に対するニュートンの運動方程式を立てよ。

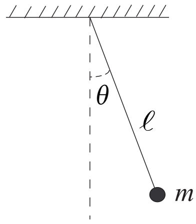
1-2. この小球が落下の際に得る速さには上限値 v_{f} が存在する。v_{f} の表式を求めよ。

1-3. 初期時刻 $t = 0$ に小球を静かに放し落下させた。運動方程式を解き、t (> 0) における速度 $v(t)$ を求めよ。

1-4. t の関数としての $v(t)$ の概形をグラフに表せ。

問 2 長さ ℓ の糸の一端を固定し、他端に質量 m の小球をつけて、鉛直面内で振動させる。重力加速度を g、また鉛直方向と糸のなす角を θ として、以下の問いに答えよ。

2-1. 小球の運動方程式を求めよ。



2-2. 時刻 $t = 0$ において $\theta(t = 0) = \theta_0$ の位置から小球を静かに放した。ここで定数 θ_0 は条件 $0 < \theta_0 \ll 1$ を満たすものとする。運動方程式を解き、$t > 0$ における $\theta(t)$ を求めよ。

2-3. 振動の周期 T を求めよ。

次に、小球には速度 v に比例する摩擦力 $F = -2m\gamma v$ (γ は正定数) が働くものとして、この微小振動に対する摩擦の影響を考察する。小球は、**2-2** の場合と同様に、$\theta(t = 0) = \theta_0 \ll 1$ の位置から静かに放す。

2-4. この場合の運動方程式を書き下せ。

2-5. 小球の振動が可能であるための γ に対する条件、すなわち、小球が $\theta = 0$ を通過するための γ の条件を求めよ。

2-6. 前問の条件が満足される場合について運動方程式を解き、$\theta(t)$ を求めよ。

2-7. 振動の周期 T および振幅が e^{-1} 倍になるまでの時間 τ を書き下せ。また、$\theta(t)$ の概形を t の関数として描け。

問 3 質量 m と電荷 $e > 0$ を持つ古典粒子が電磁場中を運動している。この粒子に対するラグランジアン L は次式で与えられる。

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \mathrm{e}\phi.$$

ここで $\dot{\boldsymbol{r}} \equiv d\boldsymbol{r}/dt$ は速度、また $\phi = \phi(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ はそれぞれ電磁場のスカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルである。

3-1. 運動方程式が次式で与えられることを示せ。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

ただし、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は次式で与えられる電磁場である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

以下、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が一定の場合を考える。デカルト座標系を採用し、$\boldsymbol{B}$ の向きを z 方向に選ぶ。すると、成分表示で $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と表せる。

3-2. 運動の際に $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}$ で定義されるエネルギー $\mathcal{E}$ が保存される (時間変化しない) ことを (1) 式より示せ。

3-3. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ の場合について、時刻 $t = 0$ に $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (v_0, 0, 0)$ の状態にあった粒子の $t > 0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ を求めよ。これはどのような運動か？

3-4. y 方向の静電場 $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$ がある場合について、$t = 0$ において原点に静止していた粒子の $t > 0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ と位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。また、xy 面内における軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ の概形を描け。

問題 II

問 1 図 1 のように、半径が a である 2 枚の薄い円盤状電極を、真空中で間隔 d $(\ll a)$ を開けて平行に対置したコンデンサーについて考える。以下、コンデンサーに電荷が蓄えられている場合、電場は両電極間（コンデンサー内部）にしか無く一様で、その方向は電極に垂直であるとする。また、真空の誘電率と透磁率を、それぞれ ε_0、μ_0 とする。

まず、コンデンサーの上部電極と下部電極に、それぞれ一定電荷 $+Q_0$（$Q_0 > 0$）と $-Q_0$ が蓄えられている状態（状態 A）を考える。このときのコンデンサー内部の電場の大きさを E とする。

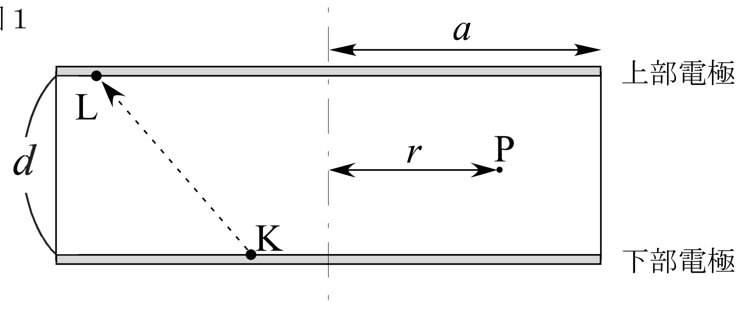
1-1. ガウスの法則を用いて E と Q_0 の関係を導け。ただし、積分する面を図示し、その図に基づいて導出過程を記せ。

1-2. 図 1 のように、矢印付きの破線で示したコンデンサー内部の経路（本紙面上で左上がりの直線経路）に沿って、微小電荷 Δq を下部電極の K 点から上部電極の L 点まで、ゆっくりと運んだとする。このとき必要な仕事 X を、仕事の定義にしたがって線積分により求め、その結果を E の関数として書け。

1-3. **1-1**、**1-2** の結果を踏まえて、両電極に電荷が全く無い状態から、状態 A を実現するために必要な仕事 W を Q_0、a、d、ε_0 だけの関数として求めよ。さらに、この仕事 W が電場のエネルギーとしてコンデンサー内部の空間に蓄えられるとしたとき、単位体積あたりの電場のエネルギー w を E の関数として書け。

1-4. 状態 A において、上部電極の単位面積あたりに働いている力の大きさ F を E の関数として導け。なお、導出の際、上部電極を上方に微小距離 Δd だけ仮想変位するときに必要な仕事を考慮せよ。

図 1



次に、状態 A にあるコンデンサーの両電極間を、時刻 $t = 0$ で抵抗 R（コンデンサーの外部にある）を介して繋いだ場合を考える。なお、任意の時刻 t (≥ 0) におけるコンデンサー内部の電場は、その時に電極にある電荷 $\pm Q(t)$ だけで決まるとする。

1-5. 上部電極の電荷の時間変化 $Q(t)$ $(t \geqq 0)$ を決める微分方程式をたて、その解を求めよ。なお、コンデンサーの静電容量は C とすること。

1-6. コンデンサー内部の電場が時間変化するために生ずる磁束密度について考える。図1に示すように、コンデンサーの中心軸から距離 r $(\leqq a)$ の点 P における磁束密度の大きさ $B(r,t)$ を $Q(t)$ の関数として求めよ。

問 2 真空中の電磁波を記述するマクスウェルの方程式は、あるゲージを用いれば

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{4}$$

と書かれる。ここで、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、c、t は、それぞれ電場、磁束密度、ベクトル・ポテンシャル、真空中での光速、時間である。また x、y、z は空間座標である。以下、(3) 式と (4) 式の特解として減衰のない直線偏光した電磁波

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}ae^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5}$$

を考える。ここで、$\boldsymbol{e}$、a、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}$、ω は、それぞれ電磁波の偏光方向を表す単位ベクトル、振幅（正定数)、波数ベクトル、位置ベクトル（座標成分は x、y、z)、角振動数（正定数）である。なお、本問では $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を複素数として扱う。もし実際の物理量が必要ならば、それらの実数部分を考えれば良い。

2-1. (5) 式で記述される電磁波 $\boldsymbol{A}$ において、ある時刻 t_0 での波面（等位相面）を表す式を求めよ。また、この波面の幾何学的形状がどのようなものであるのか、そして波面の進む方向はどの方向なのか、両者とも理由を明らかにして答えよ。

2-2. $\boldsymbol{A}$ が波動方程式 (3) を満たすための条件を求めよ。ただし、$\boldsymbol{k}$ の大きさを k とし、これを用いること。

2-3. $\boldsymbol{A}$ が (4) 式を満たすために $\boldsymbol{e}$ の方向に課せられる条件を求めよ。また電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の方向を (1) 式と (2) 式から求めよ。これら3つの方向の相互関係が分かるよう図を描け。

ポインティング・ベクトルの時間平均 $\bar{\boldsymbol{P}}$ と電磁波のエネルギー密度の平均 $\bar{w}$ は

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^* \tag{6}$$

$$\bar{w} = \frac{1}{4}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*) \tag{7}$$

と書ける。ただし、ここで ε_0 と μ_0 は、それぞれ真空の誘電率と透磁率であり、真空中での光速と $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の関係がある。また、*は複素共役をとることを意味している。

2-4. ポインティング・ベクトルの方向と大きさは、それぞれ、どの様な物理的意味を持つのか答えよ。

2-5. (6) 式と (7) 式を必ず使用して、$\bar{\boldsymbol{P}} = \boxed{}\ \bar{w}$ と書いたときの $\boxed{}$ 内を c、$\boldsymbol{k}$、k（$\boldsymbol{k}$ の大きさ）だけで表せ。さらに、この $\bar{\boldsymbol{P}}$ と $\bar{w}$ の関係が物理的に妥当であることを文章にて記述せよ。 なお、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ を任意のベクトルとしたときに、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が成り立つ。