

## 10. 相平衡の熱力学

### 10-1 相

定義 物質系の一様な部分を相と呼ぶ。

代表例：一様な気体，液体，固体。

注：各相は複数の成分からなってもよい(混合気体, 溶液, 固溶体)

相平衡 異なる相が熱的，機械的に接しており，かつ質量の交換も許されている条件下で平衡状態にあるとき，これらの相は相平衡にあるという。

相平衡の例

- 水と水蒸気あるいは氷
- 食塩とその飽和水溶液
- 混ざり合わない2種の液体
- 複数種の鉱物からなる岩石
- ...

相転移 物質が異なる相に変化すること。

### 10-2 相平衡の条件

機械的平衡の条件 圧力が等しい。

さもないと自発的に仕事が生じてしまう。

熱的平衡の条件 温度が等しい。

さもないと自発的に熱移動が生じてしまう。

質量的平衡の条件 化学ポテンシャルが等しい。

系の温度  $T$  ,  $P$  が与えられているとき，系の安定平衡状態 = ギブス自由エネルギー最小の状態。相1, 2がそれぞれ  $c$  種の独立成分からできているとして，

- 相1に含まれる成分  $i$  のモル数を  $n_{i,1}$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- 相2に含まれる成分  $i$  のモル数を  $n_{i,2}$  ( $i = 1, \dots, n$ )

と書くことにする .

両相の全ギブス自由エネルギー  $G$  はそれぞれの相のギブス自由エネルギーの和に等しく

$$G = G_1 + G_2.$$

$G_1, G_2$  は  $T, P$  および含まれている各成分のモル数の関数 .

相 2 から 1 へ成分  $i$  が微量  $\delta n_i$  モル移動し他の成分は影響を受けない過程を考えると ,

$$\delta G = \delta G_1 + \delta G_2 = \frac{\partial G_1}{\partial n_{i,1}} \delta n_i + \frac{\partial G_2}{\partial n_{i,2}} (-\delta n_i).$$

相平衡状態では  $G$  は最小値をとるので

$$\delta G = 0$$

よって

$$\frac{\partial G_1}{\partial n_{i,1}} = \frac{\partial G_2}{\partial n_{i,2}} \quad (i = 1, \dots, c).$$

これが質量的平衡の条件 .  $G_j$  の  $n_{i,j}$  偏微分を成分  $i$  の相  $j$  における化学ポテンシャルと呼ぶ .

### 10-3 化学ポテンシャル

定義  $c$  種の成分 (各成分のモル数  $n_i$ ) からなる相のギブス自由エネルギーを

$$G = G(T, P, n_1, \dots, n_c)$$

とする .

$$\mu_i \equiv \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j (j \neq i)}$$

を成分  $i$  の化学ポテンシャルとよぶ .

公式 成分  $i$  の化学ポテンシャルは成分  $i$  の単位モル数当たりのギブス自由エネルギーとみなせる . 実際公式

$$G = \sum_{i=1}^c n_i \mu_i$$

が成立 .

証明  $G$  は示量性変数なので

$$G(T, P, kn_1, \dots, kn_c) = kG(T, P, n_1, \dots, n_c).$$

両辺  $k$  で微分すると

$$\frac{\partial G(T, P, kn_1, \dots, kn_c)}{\partial kn_1} \frac{\partial kn_1}{\partial k} + \dots + \frac{\partial G(T, P, kn_1, \dots, kn_c)}{\partial kn_c} \frac{\partial kn_c}{\partial k} = G(T, P, n_1, \dots, n_c).$$

変形して

$$\frac{\partial G(T, P, kn_1, \dots, kn_c)}{\partial kn_1} n_1 + \dots + \frac{\partial G(T, P, kn_1, \dots, kn_c)}{\partial kn_c} n_c = G(T, P, n_1, \dots, n_c).$$

この式は任意の  $k$  について成立 .  $k = 1$  とおけば

$$\sum_{i=1}^c n_i \mu_i = G(T, P, n_1, \dots, n_c).$$

問  $f = f(y_1, \dots, y_c)$  ,  $y_i = y_i(x)$  ( $i = 1, \dots, c$ ) のとき ,

$$\frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^c \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx}$$

を証明しなさい .

## 10-4 クラウジウス・クラペイロンの式

単成分の二相平衡 水と水蒸気 , 水と氷の相平衡はそれぞれ単成分の二相平衡の例 .

相 1 , 2 の 1mol あたりの内部エネルギー , エントロピー , 体積<sup>1</sup>をそれぞれ  $u_1, u_2, s_1, s_2, v_1, v_2$  .

平衡条件 = 各相での化学ポテンシャル (1mol あたりのギブス自由エネルギー) が等しい

$$u_1 + Pv_1 - Ts_1 = u_2 + Pv_2 - Ts_2.$$

変形して

$$(u_2 - u_1) + P(v_2 - v_1) - T(s_2 - s_1) = 0.$$

これは相平衡が成立するときの温度と圧力の関係 (相 1,2 の共存曲線) を表す .

共存曲線の勾配を与える公式

$$\frac{dP}{dT} = \frac{h_2 - h_1}{T(v_2 - v_1)} = \frac{\text{1mol あたりの転移熱}}{T \times \text{体積変化}}.$$

この式をクラウジウス・クラペイロンの式 , あるいは単にクラペイロンの式と呼ぶ . ここで  $h_i$  は比エンタルピー (熱関数) で  $h_i \equiv u_i + Pv_i$  .

<sup>1</sup>それぞれ (モル) 比内部エネルギー , (モル) 比エントロピー , (モル) 比体積と呼ぶ

導出 相平衡の条件式を温度微分

$$\frac{d}{dT}(u_2 - u_1) + \frac{dP}{dT}(v_2 - v_1) + P \frac{d}{dT}(v_2 - v_1) - (s_2 - s_1) - T \frac{d}{dT}(s_2 - s_1) = 0 .$$

ここで第一法則から

$$T \frac{ds}{dT} - P \frac{dv}{dT} = \frac{du}{dT} .$$

結局

$$\frac{dP}{dT}(v_2 - v_1) - (s_2 - s_1) = 0$$

変形して

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{1 \text{ mol あたりの相転移にともなうエントロピー変化}}{\text{体積変化}} .$$

再び第一法則を思い出せば , 1mol の物質が相 1 → 2 に変化するとき

$$u_2 - u_1 = -P(v_2 - v_1) + T(s_2 - s_1) .$$

ゆえに

$$s_2 - s_1 = \frac{u_2 + Pv_2 - (u_1 + Pv_1)}{T} = \frac{h_2 - h_1}{T} .$$

問 相 1 として氷 , 相 2 として水あるいは水蒸気を考えたとき , 共存曲線の  $dP/dT$  の符号の正負と , 加圧したときに氷の融点は上がるか下がるか調べなさい .