7.7 一般化された永年摂動

ここからは非球体な中心星の周りを運動している N 体問題における、永年理論のより一般化された形について考える。次の形の項を加えることで j の摂動ポテンシャルを考えたとき、偏平した中心天体の効果を考慮できる。

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}_j^{(ob1)}\rangle =& \\ &\frac{1}{2}n_j a_j^2 n_j\left[\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^2-\frac{9}{8}J_2^2\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^4-\frac{15}{4}J_4\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^4\right]e_j^4 \\ &-\frac{1}{2}n_j a_j^2 n_j\left[\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^2-\frac{27}{8}J_2^2\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^4-\frac{15}{4}J_4\left(\frac{R_c}{a_j}\right)^4\right]I_j^2\end{aligned} \quad (7.124)$$

ここでの R_c は中心天体の半径である。J_2, J_4 は初期の二つの地域の重力係数である（式 6.255 参照)。

この表現は摂動を与えている天体や摂動している天体を分離できる、つまりそれぞれの天体が明確に接触要素を持っている、という状況にのみ当てはまるということを注意しておく。惑星のリングの場合観測された量は正常にリングの幾何半長軸である。（すなわち最も適当な楕円はリングの粒子をたどったものである。）ここではリングの平均運動の定義を変える必要がある。なぜならこの場合半長軸は式（6.244）で平均運動として使われた a と同じではないからである。

軌道運動している質量は他の軌道運動している天体から通常の永年摂動をうけるだろう。質量 m_j での質量 m_k による永年効果を考えよう。もし次のように書き、

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}_D(\alpha_{jk})\rangle =&\frac{1}{8}\alpha_{jk}b_{3/2}^{(1)}e_j^2-\frac{1}{4}\alpha_{jk}b_{3/2}^{(2)}e_je_k\cos(\varpi_j-\varpi_k) \\ &-\frac{1}{8}\alpha_{jk}b_{3/2}^{(1)}I_j^2+\frac{1}{4}\alpha_{jk}b_{3/2}^{(2)}I_jI_k\cos(\Omega_J-\Omega_k)\end{aligned} \quad (7.125)$$

α_{jk} は二つの天体の半長軸の比とすると、外側の天体による摂動は

$$\langle\mathcal{R}_j^{(\mathrm{sec})}\rangle = \frac{\mathcal{G}m_k}{a_k}\langle\mathcal{R}_D(a_j/a_k)\rangle \qquad (a_j < a_k) \quad (7.126)$$

となり、一方

$$\langle\mathcal{R}_j^{(\mathrm{sec})}\rangle = \frac{\mathcal{G}m_k}{a_k}\frac{a_k}{a_j}\langle\mathcal{R}_D(a_k/a_j)\rangle \qquad (a_j > a_k) \quad (7.127)$$

となる。摂動が外側からか内側からか明記することの不便さは、α_{jk} と $\bar{\alpha}_{jk}$ を次のように定義することで解決できる。

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} a_k/a_j & a_j > a_k \text{ の場合（内側からの摂動）} \\ a_j/a_k & a_j < a_k \text{ の場合（外側からの摂動）}\end{cases} \quad (7.128)$$

そして

$$\bar{\alpha}_{jk} = \begin{cases} 1 & a_j > a_k \text{ の場合（内側からの摂動）} \\ a_j/a_k & a_j < a_k \text{ の場合（外側からの摂動）} \end{cases} \tag{7.129}$$

この表記方法は最初 Dermott ＆ Nicholson(1986) で天王星の衛星に関する摂動理論で使われた。通常の $\mathcal{G} \approx n_j^2 a_j^3/m_c$ という近似を使えば m_j が他の全ての $N-1$ 個の質量から受ける摂動関数の永年部分を書くことができる。

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_j^{(\mathrm{sec})} \rangle = & n_j a_j^2 n_j \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k}{m_c+m_j} \left[\frac{1}{8}\alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} e_j^2 - \frac{1}{8}\alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4}\alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) + \frac{1}{4}\alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) \right] \end{aligned} \tag{7.130}$$

を得る。

$\mathcal{R}^{(ob1)}$ と $\mathcal{R}^{(sec)}$ の項を組み合わせ、質量 m_j に関する摂動関数を以下のように書ける：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j = & n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + \frac{1}{2} B_{jj} e_j^2 \right. \\ & \left. + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} A_{jk} e_j e_k \cos(\varpi_j - \varpi_k) + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} B_{jk} I_j I_k \cos(\Omega_j - \Omega_k) \right] \end{aligned} \tag{7.131}$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{jj} = & +n_j \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{9}{8} J_2^2 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k}{m_c+m_j} \alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}) \right] \end{aligned} \tag{7.132}$$

$$A_{jk} = -\frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c+m_j} n_j \alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{jk}) \quad (j \neq k) \tag{7.133}$$

$$\begin{aligned} B_{jj} = & -n_j \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^2 - \frac{27}{8} J_2^2 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left(\frac{R_c}{a_j} \right)^4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k}{m_c+m_j} \alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}) \right] \end{aligned} \tag{7.134}$$

$$B_{jk} = +\frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c+m_j} n_j \alpha_{jk}\bar{\alpha}_{jk} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{jk}) \quad (j \neq k) \tag{7.135}$$

$$\tag{7.136}$$

である。$A_{jj}, A_{jk}, B_{jj}, B_{jk}$ は二つの $N \times N$ 行列、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の定数要素であると考えることができる。

もしここで式（7.18）と（7.19）で与えられる新しい変数 h_j, k_j, p_j, q_j を使うと、次のよ

うな式（7.20）の一般型を得る：

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}\rangle =& n_j a_j^2 \Bigg[\frac{1}{2}A_{jj}(h_j^2+k_j^2)+\frac{1}{2}B_{jj}(p_j^2+q_j^2)\\ &+\sum_{k=1,k\neq j}^{N} A_{jk}(h_j h_k + k_j k_k) + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} B_{jk}(p_j p_k + q_j q_k)\Bigg]\end{aligned} \tag{7.137}$$

運動方程式は式（7.25）と（7.26）のように与えられ、解は

$$h_j = \sum_{i=1}^{N} e_{ji}\sin(g_i t + \beta_i), \quad k_j = \sum_{i=1}^{N} e_{ji}\cos(g_i t + \beta_i), \tag{7.138}$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} I_{ji}\sin(f_i t + \gamma_i), \quad q_j = \sum_{i=1}^{N} I_{ji}\cos(f_i t + \gamma_i) \tag{7.139}$$

ここで g_i, f_i は二つの行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の N 固有値一式である。これまでどおり固有ベクトル e_{ji}, I_{ji} の大きさと同程度の β_i, γ_i 面は境界値から決まる。ある時間 t において離心率の 2 乗と質量 m_j の軌道傾斜角は

$$e_j^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} e_{ji}\sin(g_i t + \beta_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{N} e_{ji}\cos(g_i t + \beta_i)\right]^2 \tag{7.140}$$

$$I_j^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} I_{ji}\sin(f_i t + \gamma_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{N} I_{ji}\cos(f_i t + \gamma_i)\right]^2 \tag{7.141}$$

$$\tag{7.142}$$

同様に、ある時間での近点経度と昇交点経度は h_j, k_j, p_j, q_j からわかる。

扁平率項の導入によるひとつ重要な違いは軌道傾斜交点の固有値にもはや縮重が存在しないという点である。数学的にはこれは J_2, J_4 項が行列 $\mathbf{B}$ のもはや線形には依存していない行か列を暗に含んでいるということによる；したがって $\mathbf{B}$ は N と同じランク、つまり行か列の数を持っている。物理的には惑星の非球形な形に由来するうまく定義された参照平面があることによって縮重は消去されたということである。