7.6 ガウス平均法

我々は平均経度に独立した項を分けて考えるために摂動関数を用いた数学的なアプローチによって永年摂動の概念を説明した。しかしより物理的なアプローチで、同じ解を与え、なおかつ摂動関数法や平均法の見方を与えるものもある。

摂動源の質量 m' の外惑星が質量 m の内惑星の近点経度に及ぼす平均歳差効果を考える。どちらの物体も軌道は同じ平面上にあるとする。r, f, a, e, ϖ はそれぞれ、与えられた外惑星に類似した量の内惑星の軌道半径、真近点離角、半長軸、離心率、近点経度である。

この問題の扱い方は二つある。一つ目はラグランジュ方程式と摂動関数の展開式を使い重要な永年項を分離する方法である。この方法はすでに扱っている。もう一つは、外惑星による摂動の効果をその質量を軌道上にばら撒いたものと同等であると仮定するものである。この場合、内惑星はリング状の物体から影響を受けながら運動する。このリングの密度は $e' \neq 0$ のとき不均一である。そして摂動の半径方向と接線方向の成分を計算し、歳差運動の度合いによるガウス型の摂動方程式に導入する。これがガウス法である。これから見るようにどちらも結果は同じである。

最低次のラグランジュ方程式は

$$\langle \dot{\varpi} \rangle = \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e} \tag{7.92}$$

である（式 7.16 参照）。$\langle \mathcal{R} \rangle$ のある部分は $j = 0$ の 4D0.1 と 4D0.2 の項で与えられる。間接項はない。4D0.1 の離心率によらない項を無視すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\mathcal{G}m'}{a'} \bigg[& \frac{1}{8}(e^2 - e'^2) \left(2\alpha D + \alpha^2 D^2\right) b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \\ & + \frac{1}{4} ee' \left(2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2\right) b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \cos[\varpi' - \varpi] \bigg] \end{aligned} \tag{7.93}$$

を得る。

したがって $e \neq 0$ とすると式 (7.92) に式 (7.93) を代入しケプラーの第 3 法則を使うと

$$\begin{aligned} \langle \dot{\varpi} \rangle = +\frac{1}{4} \frac{m'}{m_c} n\alpha^2 \bigg[& \left(2D + \alpha D^2\right) b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \\ & + \frac{e'}{e} \frac{1}{\alpha} \left(2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2\right) b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \cos(\varpi' = \varpi) \bigg] \end{aligned} \tag{7.94}$$

となる。摂動源の惑星が楕円軌道で運動している一般的な場合である。m_c は中心星の質量である。

ガウス法にしたがって軌道に沿って広げられた摂動源によって外惑星による摂動の平均効果は計算でき、そして決定されたポテンシャルや力は軌道運動する天体に適用できる。楕円軌道を運動している摂動源の線密度は、軌道に沿って等時間間隔ごとリング状にばら

撒かれた質量による。したがってリングの密度は遠点 (apocentre) で最も高く、近点で最も低い。ケプラーの第二法則によれば、線密度

$$\rho = \frac{m'r'}{2\pi a'b'} \tag{7.95}$$

に等価である。ここで $b' = \sqrt{1-e'^2}$ は軌道半短軸である。

近点を原点とする極座標 (r, f) で与えられる軌道上の特定の点での質量 m を考える。また外惑星の質量のリングの (r', f') での線要素を考える。質量要素は $\rho r' d\phi$ で、

$$\phi = f' + \varpi' - f - \varpi \tag{7.96}$$

は二つの要素の位置ベクトルの間の角度（経度の差）である。Δ が質量 m とリング要素との距離だとすると、

$$\Delta \sin\phi = r' \sin\phi \quad \text{and} \quad \Delta\cos\theta = r'\cos\phi - r \tag{7.97}$$

である。さまざまな角度の関係は図 7.8 に示す。

質量要素が m とこれに及ぼす引力は焦点から質量 m へ向かう半径方向とそれに正の方向に直角な方向の成分に分けられる。力の半径方向と直角方向の成分は

$$d\bar{\boldsymbol{R}} = \frac{\mathcal{G}\rho r'}{\Delta^2}\cos\theta d\phi \quad \text{and} \quad d\bar{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathcal{R}\rho r'}{\Delta^2}\sin\theta d\phi \tag{7.98}$$

ここで θ は焦点から m へのベクトルの延長と、m と質量要素を結ぶ直線との間の角度である。質量要素を $(\rho\Delta/\cos(\theta-\phi)d\theta$ のように表現し θ で積分することもできるが、ϕ での積分のほうが容易であることに注意する。$\cos theta$ と $\sin theta$ に式（7.97）を代入し

$$d\bar{\boldsymbol{R}} = \mathcal{G}\rho r' \frac{(r'\cos\phi - r)}{\Delta^3} d\phi \quad \text{and} \quad d\bar{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathcal{G}\rho r'^2 \sin\phi}{\Delta^3} d\phi \tag{7.99}$$

を得る。Δ も r, r', ϕ で表すことができる。余弦定理より

$$\Delta^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\phi \tag{7.100}$$

である。したがって、

$$\Delta^{-3} = \left(r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\phi\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{7.101}$$

もし

$$\Delta_0^{-3} = \left(a'^2 + a^2 - 2aa'\cos\phi\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{7.102}$$

とすると Δ^{-3} は $r = a$ のまわりでテーラー展開できる。

$$\Delta^{-3} \approx \Delta_0^{-3} + (r-a)\frac{\partial}{\partial a}\left(\Delta_0^{-3}\right) + (r'-a')\frac{\partial}{\partial a'}\left(\Delta_0^{-3}\right) \tag{7.103}$$

である。さらに、Sect.6.4 のラプラス係数の定理を用いれば

$$\Delta_0^{-3} = \frac{1}{a'^3}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{3/2}^{(j)} \cos j\phi \tag{7.104}$$

となる。$\alpha = a/a'$ から

$$\frac{\partial}{\partial a} \equiv \frac{1}{a'}\frac{\partial}{\partial \alpha} \quad and \quad \frac{\partial}{\partial a'} \equiv -\frac{1}{a'}\frac{\partial}{\partial \alpha} \tag{7.105}$$

とかける。よって

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\Delta_0^{-3}\right) = \frac{1}{a'^4}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{db_{3/2}^{(j)}}{d\alpha}\cos j\phi \tag{7.106}$$

また

$$\frac{\partial}{\partial a'}\left(\Delta_0^{-3}\right) = -\frac{1}{a'^4}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(3b_{3/2}^{(j)} + \alpha\frac{db_{3/2}^{(j)}}{d\alpha}\right)\cos j\phi \tag{7.107}$$

となる。

楕円軌道における運動では

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{7.108}$$

なので

$$r - a \approx -ae\cos f + \mathcal{O}_{(e^2)} \tag{7.109}$$

である。したがって e の一乗の項まででは

$$\begin{aligned}\Delta^{-3} = \frac{1}{2}\frac{1}{a'^3}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Bigg[b_{3/2}^{(j)} - \alpha e\frac{db_{3/2}^{(j)}}{d\alpha}\cos f \\ - e'\left(3b_{3/2}^{(j)} + \alpha\frac{db_{3/2}^{(j)}}{d\alpha}\right)\cos f'\Bigg]\cos j\phi\end{aligned} \tag{7.110}$$

質量 m に働く半径方向の力の総量 $\boldsymbol{R}$ の大きさを見積もるために、次を求める必要がある。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = \oint d\boldsymbol{R} &= \int_{\phi=0}^{2\pi}\mathcal{G}\rho r'(r'\cos\phi - r)\Delta^{-3}d\phi \\ &= \int_{f'=0}^{2\pi}\mathcal{G}\rho r'(r'\cos[f'+\varpi'-f-\varpi] - r)\Delta^{-3}df'\end{aligned} \tag{7.111}$$

ここで $\phi = f'+\varpi'-f-\varpi$ は式（7.110）で与えられる Δ^{-3} を展開することで得られる。また r' は

$$r' \approx a'(1-e'\cos f') \tag{7.112}$$

である。

接線方向成分の力の大きさは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} = \oint d\boldsymbol{T} &= \int_{\phi=0}^{2\pi}\mathcal{G}\rho r'^2\sin\phi\Delta^{-3}d\phi \\ &= \int_{f'=0}^{2\pi}\mathcal{G}\rho r'^2\sin[f'+\varpi'-f-\varpi]\Delta^{-3}df'\end{aligned} \tag{7.113}$$

である。

ここで重要なのは、式（7.111）と（7.113）で f' について積分した後では無限な Δ^{-3} の展開の総和が有限になっていることである。例えば、

$$\cos f' \cos[j(f'+\beta)] = \frac{1}{2}(\cos[f'-j(\beta+f')] + \cos[f'+j(\beta+f')]) \tag{7.114}$$

β は f' によらない角度なので、

$$\int_0^{2\pi} \cos f' \cos[j(f'+\beta)] df' = \begin{cases} 0 & j \neq \pm 1 \text{ のとき} \\ \pi \cos\beta & j = \pm 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{7.115}$$

となる。したがって j で積分したときの有限の項だけが重要である。e の一次の項のみを考えるので、必要なのは多くても $j=-2$ から $j=+2$ までの和である。さらに $b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}$ を使えば解を単純なものにできる。

$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{T}$ による歳差運動速度を調べるために、ガウス型摂動方程式をつかう。式（2.165）から

$$\dot{\varpi} = \frac{1}{nae}\left[-\boldsymbol{R}\cos f + \boldsymbol{T}\left(\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\right)\sin f\right] \tag{7.116}$$

を得る。ここで $\mathcal{O}_(e^2)$ の項は無視した。

式（7.95）から ρ の定義と次の近似を使うと、

$$r'^2 \approx a'^2(1-2e'\cos f') \quad \text{and} \quad r'^3 \approx a'^3(1-3e'\cos f') \tag{7.117}$$

半径方向の力の成分

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = \frac{\mathcal{G}m'}{2\pi a'b'}\int_0^{2\pi} & [a'^3(1-3e'\cos f')\cos[f'+\varpi'-f-\varpi] \\ & - ra'(1-2e'\cos f')]\Delta^{-3}df'\end{aligned} \tag{7.118}$$

と接線方向の力の成分

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathcal{G}m'}{2\pi a'b'}\int_0^{2\pi} a'^3(1-3e'\cos f')\sin[f'+\varpi'-f-\varpi]\Delta^{-3}df' \tag{7.119}$$

を得る。このとき Δ^{-3} は $\phi = f'+\varpi'-f-\varpi$ なら式（7.110）より与えられる。

$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{T}$ の計算では Δ^{-3} を定義する総量での j にのみに起因する値は $j=0,\pm1,\pm2$ である。$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{T}$ の解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} =& \frac{\mathcal{G}m'}{2a'^2}\left[b_{3/2}^{(1)} - \alpha b_{3/2}^{(0)} + \alpha e\left(b_{3/2}^{(0)} - \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} + \alpha\frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha}\right)\cos f\right. \\ & \left. - \alpha e'\left(b_{3/2}^{(1)} - \frac{1}{2}\frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\frac{db_{3/2}^{(2)}}{d\alpha} + \alpha\frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha}\right)\cos(\varpi'-\varpi-f)\right]\end{aligned} \tag{7.120}$$

そして

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathcal{G}m'}{4a'^2}\alpha e' \left(\frac{db_{3/2}^{(2)}}{d\alpha} - \frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} \right) \sin(\varpi' - \varpi - f) \tag{7.121}$$

である。ここでは $b' = a' + \mathcal{O}_{(e^2)}$ としている。$e' = 0$ のときには接線方向の力の成分はない。

式（7.120）と（7.121）を代入すると f の関数である式（7.116）の二つの項の時間平均値が得られる。これは

$$\langle F(f) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(f) dM \tag{7.122}$$

となる。$F(f)$ は f の一般関数で M は真近点離角である。ここで sect.2.5 の M の項の $\cos f$ と $\sin f$ の展開式が使える。これによって次のような場合の平均移動速度が与えられる。

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{\varpi} \rangle = \\
&+ \frac{1}{4}\frac{m'}{m_c} n\alpha^2 \left[-3\alpha b_{3/2}^{(0)} + 2b_{3/2}^{(1)} + \alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} \right. \\
&\left. + \frac{e'}{e}\frac{\alpha}{2} \left(-3\frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} + 2b_{3/2}^{(1)} + \alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{db_{3/2}^{(2)}}{d\alpha} \right) \cos(\varpi' - \varpi) \right]
\end{aligned} \tag{7.123}$$

この結果を摂動関数を使った方法（式（7.94））と比較すると、式（6.70）-（6.72）の関係を使った式（7.123）でのさまざまなラプラス係数を改める必要がある。またはラプラス係数の組み合わせは α の級数として展開することができる。どちらの方法でも式（7.123）の展開は式（7.94）で与えられたものと同じになる。したがってガウス法を使うと、軌道に沿って質量のばら撒きを使った外摂動源による近点での永年変化は、重要な惑星摂動関数の永年項以外はほとんど無視して得られるものと等しい。平均原理の利用にはより厳密な正当性が必要である。