

5 自転と軌道の結合

5.1 序論

前章では、衛星が同期自転状態（すなわち、衛星の自転周期がその公転周期に等しい状態）にあると仮定した場合の、惑星によって衛星に生じる潮汐の効果について考えた。1.6節で述べたように、太陽系内の主要な天然な衛星のほとんどは同期状態で回転していると観測されている。このような状況はどのようにして起きたのか？また、これらの衛星の自転や公転軌道は何によって決まるのだろうか？この章では、衛星の自転における潮汐トルクの影響を、さらに進んで調べることから始めよう。この分析は、例えばなぜ月はその同期自転軌道共鳴を維持するために永久四重極子モーメントを持っていないか、ということ明らかにする。その系におけるこの付加的なトルクの効果の結果は次に調べ、太陽系における自転軌道共鳴に関する概念への一般的なアプローチを導く。またこれらの共鳴の起源と安定性についても議論する。

5.2 潮汐による自転速度の変化

衛星が惑星の周りを楕円軌道で回っている場合を考える。 $\dot{\eta} + n$ で示される衛星の自転速度は、その角速度、すなわち真近点離角の変化の割合 \dot{f} よりも小さい（もしくは大きい）。この概要を図 5.1a に示す。衛星を中心とし、衛星の平均運動 n で回転する座標系に変換すると、そのときこの回転系では、惑星は 2:1 の楕円（4.10 節参照）で図 5.1b のように guiding centre の周りを移動する。回転座標系における衛星の回転速度は $\dot{\eta}$ で、 $\langle \dot{\eta} \rangle = 0$ の場合は同期自転軌道状態にあたる。

Fig.5.1 で、離心率 e が小さな値の場合、角度 φ は次のように表される。

$$\varphi \approx 2e \sin nt \quad (5.1)$$

したがって、 $\dot{\varphi}$ は時間の関数で、惑星が 2:1 楕円の周りを動くにつれて符号が変わる。もし $\dot{\varphi} < 2en$ ならば、そのとき衛星が近点（pericentre）に近い位置にあるなら $\dot{\varphi} > \dot{\eta}$ となりうる。図 5.2a は、この角度が $\dot{\eta}$ の値を超えている場合で、影が掛かっている部分で示されている。この部分では、惑星の遅れによって、衛星に衛星-惑星間のライン（図 4.12 参照）より遅れて潮汐が起き、結合は衛星の $\dot{\eta}$ を増加させるように働き、衛星の自転は早くなる（図 5.2a 参照）。 $\dot{\varphi} < \dot{\eta}$ の影になっていない部分では、この状況は逆になり、衛星での潮汐は衛星-惑星間のライン（図 4.6 参照）より前に進んでいる。この場合、その結果生じた結合は衛星の自転にブレーキをかけ、 $\dot{\eta}$ を減少させる（図 5.2b 参照）。

4.3 節で調べたこの状況の類似性から、潮汐トルクが衛星の自転を変化させる働きは、

$$N_s = -D \left(\frac{a}{r} \right)^6 \text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\varphi}) \quad (5.2)$$

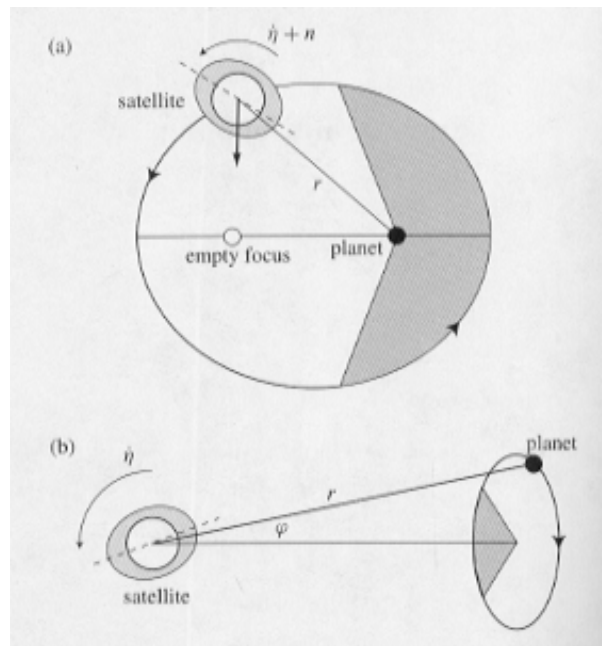


図 5.1: (a) 慣性座標系の衛星の軌道は惑星が中心である。影になっていない部分は慣性空間での衛星の自転速度が $\dot{\eta} + n > \dot{\phi}$ の軌道の部分である。(b) 衛星を中心として平均運動 n で回転している座標系での惑星の軌道。影でない部分は真近点離角が $\dot{\eta} > \dot{\phi}$ のときである。

で、ここで、

$$D = \frac{3}{2} \frac{k_2}{Q_s} \frac{n^4}{g} R_s^5 \quad (5.3)$$

で、正の定数である。 Q_s, k_2, R_s は、それぞれ潮汐散逸関数、ラブ数、衛星の半径である。正のトルクは衛星の自転速度 $\dot{\eta}$ を増加させるように働く。平均トルク $\langle N_s \rangle$ を求めるには、衛星の一周にわたって N_s の平均をとる必要がある。もし衛星が同期自転 ($\dot{\eta} = 0$) しているような特殊な場合を考えるなら、そのときトルクは楕円の中心に近い位置なら正、遠い位置では負である (図 5.3a 参照)。惑星は 2 : 1 の楕円の半分ずつを同じ時間だけかける。しかしながら、近い位置では動径距離は小さいので、平均トルクは正で、衛星の自転速度を増加させるように働くだらう。平均トルクがゼロで平衡になるためには、必ず ($\dot{\eta} > 0$) となる。この場合、トルクの符号は 2 : 1 楕円の間接点では逆にならない。また、惑星軌道の影の部分のトルクの働きは、影でない部分よりも強いがより短い期間で働くので、トルクは平衡に達する (図 5.3b 参照)。

この議論から、同期状態は安定ではなく衛星の自転が加速するように働くと想像される。もしこれが事実なら、なぜ多くの衛星が同期自転していると観測されているのだろうか？その答えは他のトルクが働いているからで、なぜなら月の場合のようにほとんどの衛星が少なくとも部分的には固体で、かつ永久的な隆起もしくは球体からのずれのような永久四重極子モーメントを持つからである。四重極子モーメントの影響を調べる前に、

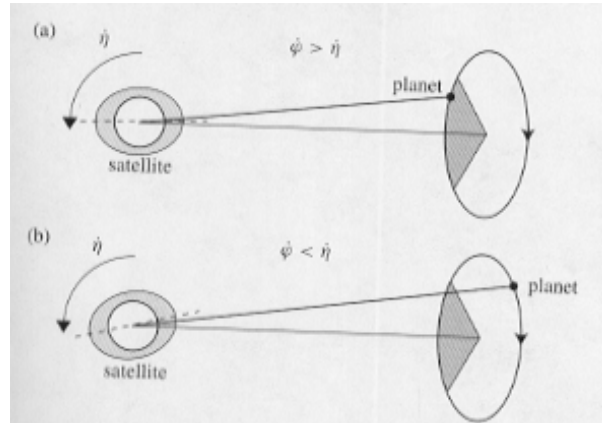


図 5.2: (a) $\dot{\phi} > \dot{\eta}$ の影になっている部分では、衛星の潮汐は惑星の遅れによって衛星惑星間のラインより遅れて生じ（点線は潮汐バルジの軸を示している）、正の結合は衛星に自転速度を増加させるように働く。(b) $\dot{\phi} < \dot{\eta}$ である他のすべての軌道の部分では、潮汐バルジは衛星惑星間ラインよりも前に運ばれ、衛星の自転にブレーキがかかる。

Goldreich(1966) に従って、永久変形を考えずに平衡自転速度を計算する。

$\dot{\eta} = \dot{\phi}$ もしくは次の式で与えられるような二点では式 (5.2) の符号は逆になる。

$$\dot{f} = \dot{\eta} + n \quad (5.4)$$

もし近点の通過時間が $t = 0$ で、 $t = \pm T$ で符号が逆転するなら

$$f \approx nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt \quad (5.5)$$

から、

$$\dot{\eta} = 2en \cos nT + \frac{5}{2}e^2 n \cos 2nT \quad (5.6)$$

のときに符号が逆転する。その時間を

$$f = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \quad (5.7)$$

と表せるとする。そのとき

$$\sin \delta = \cos f = \cos(nT + 2e \sin nT) = \cos nT - 2e \sin^2 nT \quad (5.8)$$

式 (5.6) より

$$\cos nT = \frac{\dot{\eta}}{2en} - \frac{5}{4}e \cos 2nT \quad (5.9)$$

したがって、 $\mathcal{O}(e)$ までとると

$$\sin \delta = \frac{\dot{\eta}}{2en} - \frac{5}{4}e + \frac{1}{2}e \sin^2 nT \quad (5.10)$$

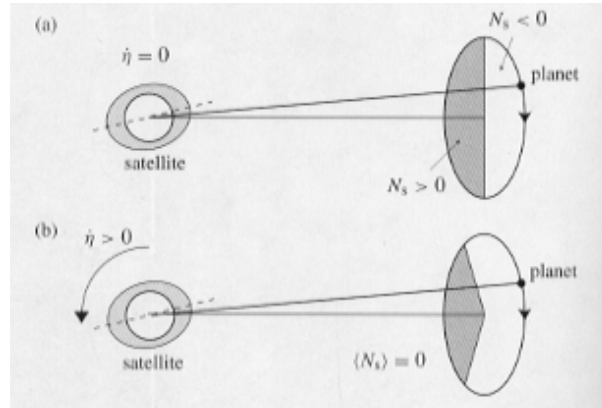


図 5.3: (a) もし $\dot{\eta} = 0$ なら、潮汐トルクは惑星軌道に近い場所では正で強く、遠い場所では負で弱い。したがって最終的な衛星のトルクの結果は正で、衛星の自転速度は増加する。(b) 平衡の場合、 $\dot{\eta} > 0$ で、衛星の潮汐トルクの符号は遠点 (apocebtre) より近点に近い位置で逆になる。正の強いトルク (影の部分) は、負の弱いトルクより短い時間で働く。

衛星に働いている平均潮汐トルクは

$$\begin{aligned} \langle N_s \rangle &= -\frac{nD}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^6 \text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\phi}) \\ &= -\frac{D}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \frac{\text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\phi})}{(1-e^2)^{1/2}} df \end{aligned} \quad (5.11)$$

で与えられる。符号の変化を考慮すれば次のように変形される。

$$\begin{aligned} \langle N_s \rangle &= +\frac{D}{\pi} \int_0^{(\pi/2)-\delta} (1+4e \cos f) df - \frac{D}{\pi} \int_{(\pi/2)-\delta}^{\pi} (1+4e \cos f) df \\ &= +\frac{2D}{\pi} (4e \cos \delta - \delta) \end{aligned} \quad (5.12)$$

平衡状態なので、 $\langle N_s \rangle = 0$ で

$$\delta = 4e \cos \delta \approx 4e \left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right) \approx 4e \quad (5.13)$$

となる。これと式 (5.5) と (5.7) より、次のような関係が出て、

$$\begin{aligned} \sin nT &\approx \sin f \approx \sin[\pm(\pi/2 - \delta)] \\ &= \cos \delta \approx \cos 4e \approx 1 - 8e^2 \\ &\approx 1 \end{aligned} \quad (5.14)$$

式 (5.10) に代入すれば、次の結果を得る。

$$\dot{\eta} = \frac{19}{2} e^2 n \quad (5.15)$$

このように、永久四重極子モーメントを考えなければ、例えば月では、観測された同期速度よりも3%早く自転し、2.6年かけて月の両面が見えてしまうだろう。

この前置きの課を終える前に式(5.2)で、潮汐バルジが一定の遅れ角を持つ MacDonald(1966)のモデルを使って、潮汐遅れの影響を公式化したいということを強調しておかなければならない。もし潮汐ポテンシャルがフーリエ時間級数に展開され、潮汐のそれぞれの成分が一定の位相のずれによって与えられる Darwin(1908)の定式化を選んだなら、結果はかなり違ったものになるだろう。Goldreich & Peale(1966)の論文でこの詳細について議論されている。

5.3 永久四重極子モーメント

重心からの任意の距離における永久変形した衛星の外部の重力場を計算するには、衛星内の質量分布の記述が必要である。無限遠での場合は質点による場によってうまく表すことができる。それよりも距離が小さい(それでも大きい)場合は、衛星の主慣性モーメントによって定められる質量分布の情報は、十分であると証明される。あとに続く導出は、主に Macmillan(1936) と Ramsey(1937,1940) によるものに基づいている。物体中の点 P の質量要素を考え、この要素の任意の原点 O に対する位置ベクトルを $\mathbf{p} = (x, y, z)$ とする。(図 5.4) 座標の軸に関する慣性モーメントを次で定義する。

$$A = \sum \delta m (y^2 + z^2) \quad (5.15)$$

$$B = \sum \delta m (z^2 + x^2) \quad (5.16)$$

$$C = \sum \delta m (x^2 + y^2) \quad (5.17)$$

また、慣性乗積は、

$$D = \sum \delta m yz \quad (5.18)$$

$$E = \sum \delta m zx \quad (5.19)$$

$$F = \sum \delta m xy \quad (5.20)$$

である。

直線 OL の周りの慣性モーメント I_L は、 A, B, C, D, E, F と直線 OL の x, y, z 軸の方向余弦 l, m, n で表される。 PQ は点 $P(x, y, z)$ を通り、直線 OL に垂直な直線とする。また、位置ベクトル \mathbf{q} は $\mathbf{q} = (x', y', z')$ で与えられる。したがって、ベクトル \mathbf{p} と \mathbf{q} の大きさは、それぞれ $OP = p$, $OQ = q$ である。 PQ は OL に垂直なので、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = q^2 \quad (5.21)$$

を得る。しかしながら、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = xx' + yy' + zz' = x(lq) + y(mq) + z(nq) = q(lx + my + nz) \quad (5.22)$$

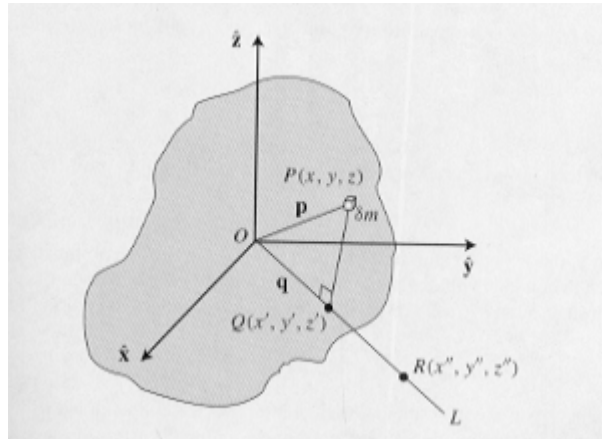


図 5.4: 物体中の点 P での質量要素 δm の位置は、位置ベクトル $\mathbf{p} = (x, y, z)$ であらわされる。 OL は O での座標系での原点からの任意の直線である。 PQ は点 P を通り、 OL 上の位置ベクトル $\mathbf{q} = (x', y', z')$ の点 Q で直線 OL に垂直である。点 R は直線 OL 上の、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x'', y'', z'')$ であらわされる任意の点である。

なので、したがって

$$\mathbf{q} = lx + my + nz \quad (5.23)$$

となる。慣性モーメント I_L は

$$I_L = \sum \delta m (PQ)^2 = \sum \delta m [x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2] \quad (5.24)$$

であたえられる。 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ なので、

$$I_L = \sum \delta m [(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2] \quad (5.25)$$

と書ける。展開して整理すれば

$$\begin{aligned} I_L = & l^2 \sum \delta m (y^2 + z^2) + m^2 \sum \delta m (z^2 + x^2) + n^2 \sum \delta m (x^2 + y^2) \\ & - 2mn \sum \delta m yz - 2nl \sum \delta m zx - 2lm \sum \delta m xy \end{aligned} \quad (5.26)$$

これは次のように書ける。

$$I_L = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2Dmn - 2Enl - 2Flm \quad (5.27)$$

もし原点 O からの距離が r の OL 上の任意の点 $R(x'', y'', z'')$ を考え、

$$I_L = \frac{m_s \lambda^4}{r^2} \quad (5.28)$$

ただし $m_s = \sum \delta m$ を変形物体の総質量、 λ を任意の長さとするなら、

$$m_s \lambda^4 = Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 - 2Dy''z'' - 2Ex''x'' - 2Fy''x'' \quad (5.29)$$

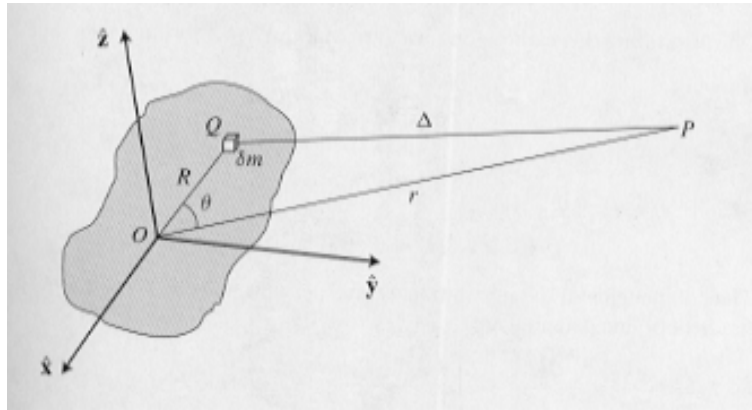


図 5.5: 衛星の質量の中心 O が原点で、軸が主な慣性モーメントと並んでいる座標系。点 P は点 O から距離 r にある。点 Q での微小質量要素 δm は O から距離 R にあり、 OQ と OP の角度が θ である。

$x'' = lr, y'' = mr, z'' = nr$ なので、式 (5.27) は式 (5.29) になる。これは三軸楕円体の一般方程式である。もし座標軸を対称軸と一致するものを選んだなら、慣性乗積 D, E, F はその新しい軸については消去され、式 (5.29) は次のように変形される。

$$m_s \lambda^4 = Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 \quad (5.30)$$

これらの新しい軸は原点 O で定義される物体の慣性主軸である。式 (5.30) は「慣性楕円」を定義している。(上の計算の詳細は Cauchy(1827) を見よ) これは一定不変な物体で、軸方向から独立しているが、原点 O の位置とともに変化する。 O が重心なら、この楕円は「慣性中心楕円」と呼ばれる。この楕円の特性的によれば、どの物体もその形にはよらず、あるひとつの軸の周りの慣性モーメントは最大で、他のひとつでは最小、三つ目ではその中間かもしくはどちらかと同じ値、というような三つのお互いに垂直な軸をもつ。

これから重心に関して定義される主慣性モーメント A, B, C によって、永久変形した衛星の外部重力場の式を導く。新しい系では、点 O を衛星の重心とし、点 P は点 O から距離 r の位置にあるとする。ここでは r は、衛星の平均半径よりはるかに大きいと想定し、座標系は、 x, y, z 方向が衛星の慣性主軸に沿っているとする。(図 5.5)

δm が原点 O から距離 R の点 Q での微小質量要素ならば、 P での衛星のポテンシャルは、

$$V = - \sum \frac{G\delta m}{\Delta} = - \sum \frac{G\delta m}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} \quad (5.31)$$

であたえられる。 θ は OP と OQ の角で、和はすべての質量要素を引き継いでいる。式 (5.31) を二項式に展開して、次数の高い項を無視すると(すべての Q で $r \gg R$)

$$V \approx - \frac{Gm_s}{r} - \frac{\sum G\delta m R \cos \theta}{r^2} - \frac{2 \sum G\delta m R^2 - 3 \sum G\delta m R^2 \sin^2 \theta}{2r^3} \quad (5.32)$$

を得る。前に述べたように、 $m_s = \sum \delta m$ は衛星の質量である。点 O は衛星の重心なので、

$$\sum \delta m R \cos \theta = 0 \quad (5.33)$$

で、また

$$\begin{aligned} 2 \sum \delta m R^2 &= 2 \sum \delta m (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \sum \delta m (y^2 + z^2) + \sum \delta m (z^2 + x^2) + \sum \delta m (x^2 + y^2) \\ &= A + B + C \end{aligned} \quad (5.34)$$

となる。直線 OP の周りの物体の慣性モーメントを I で定義すると、

$$I = \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta \quad (5.35)$$

式 (5.32) が良い近似の範囲において、

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}(A + B + C - 3I)}{2r^3} \quad (5.36)$$

これは、MacCullagh の公式である。(MacCullagh(1844), Haughton(1855))

今、 x, y, z を点 P での座標とすると $x/r, y/r, z/r$ は慣性主軸に関する、点 P での方向余弦である。よって、式 (5.27) から

$$I = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)/r^2 \quad (5.37)$$

である。MacCullagh の公式にこの I の式を代入すると、

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}}{2r^5} f(A, B, C, x, y, z) \quad (5.38)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f(A, B, C, x, y, z) &= \\ &= (B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

このポテンシャルの勾配による、点 P での単位質量ごとの重力の成分は

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mathcal{G}m_s x}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(B + C - 2A)x}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}x}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z) \quad (5.40)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mathcal{G}m_s y}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(C + A - 2B)y}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}y}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z) \quad (5.41)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\mathcal{G}m_s z}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(A + B - 2C)z}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}z}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z) \quad (5.42)$$

これらの力は点 P の単位質量あたりに偶力を及ぼし、変形体の重心には、等しくて正反対向の偶力が働く。後者の偶力には、次のような成分がある。

$$N_x = zF_y - yF_z = +3\mathcal{G}(C - B)yz/r^5 \quad (5.43)$$

$$N_y = xF_z - zF_x = +3\mathcal{G}(A - C)zx/r^5 \quad (5.44)$$

$$N_z = yF_x - xF_y = +3\mathcal{G}(B - A)xy/r^5 \quad (5.45)$$

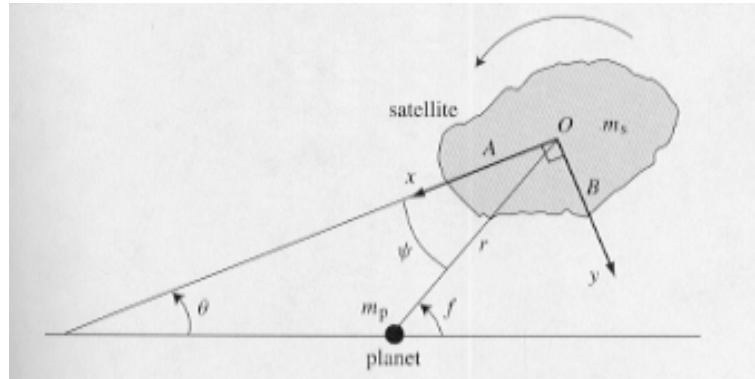


図 5.6: 軌道面に垂直な自転軸を持つ衛星の回転。 ψ は惑星 衛星間の直線と主要な軸 A の間の角度である。軸 A は衛星の最小慣性モーメントと関係している。角 θ は慣性空間の固定方向からの角度である。

Euler の完全運動方程式は、

$$A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z = N_x \quad (5.46)$$

$$B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x = N_y \quad (5.47)$$

$$C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y = N_z \quad (5.48)$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は主な軸での自転ベクトルの射影である。考える問題においては、遠い惑星によって、衛星のトルクがその四重極子モーメントの影響を受けるので、衛星の回転運動を計算したい。ここでは衛星の自転軸は軌道面に垂直で ω_x, ω_y はゼロであると想定する。 x 軸と y 軸に関する平面コサインを、それぞれ $x/r = \cos \psi$ と $y/r = \sin \psi$ と示す。(図 5.6 参照) この場合、Euler の運動方程式は、式 (5.48) から

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (5.49)$$

と書ける。角 θ は慣性空間で固定された方向から測ったものである。上の運動方程式以外の公式化では、例えば Danby(1988) では、 $\ddot{\theta}$ の符号は正よりもむしろ負で記されている。これは Danby の座標系の選択が $\omega_z = -\dot{\theta}$ を示すことによって生じる。

続く考察で、単純で十分な、式 (5.49) の証明を得る。直径上で正反対にあって、赤道(軌道)平面にある、等しい二つの質点 m を持つ球形衛星によって、永久四重極子モーメントを持つ衛星を表す。(図 5.7 参照) 質点の惑星からの距離をそれぞれ r_1, r_2 とし、 r を衛星の中心と惑星の中心との距離とする。惑星と衛星の中心を繋ぐ直線は A に関する主要な軸と角 ψ をなす。 A は慣性モーメントが最小で、質点 m を結ぶ直線である。

衛星の平均半径を R_s とすれば、惑星と二つの質点の間の重力による衛星のトルクは $N_1 + N_2$ で、

$$N_1 = +G\frac{m_s m_p}{r_1^2} R_s \sin \alpha, \quad N_2 = -G\frac{m_s m_p}{r_2^2} R_s \sin \beta \quad (5.50)$$

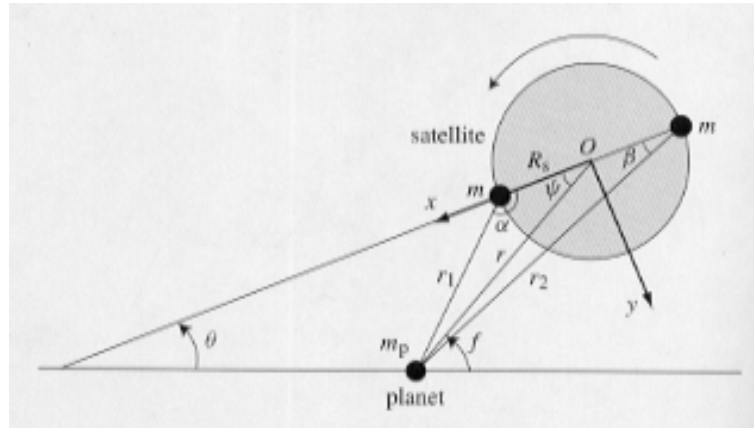


図 5.7: 直径の反対側に二つの質点がある球体による、四重極子モーメントを持つ衛星の概要。二つの質点を繋いだ直径は慣性モーメントが最小の軸と定義し、それは惑星-衛星間の直線と角度 ψ をなす。(図 5.6 参照)

角 α, β は図 5.7 で定義する。 N_1 の符号は θ を増加させるように働くので正である。コサインとサインの公式を適用すれば、

$$\sin \alpha = \frac{r}{r_1} \sin \psi, \quad \sin \beta = \frac{r}{r_2} \sin \psi \quad (5.51)$$

となる。また、

$$\frac{1}{r_1^3} \approx \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_s}{r} \right)^2 + 3 \frac{R_s}{r} \cos \psi \right] \quad (5.52)$$

$$\frac{1}{r_2^3} \approx \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_s}{r} \right)^2 - 3 \frac{R_s}{r} \cos \psi \right] \quad (5.53)$$

である。それゆえ θ の運動方程式は次のように変形されて、

$$\mathcal{C} \ddot{\theta} - \frac{3}{2} (2mR_s^2) \frac{\mathcal{G}m_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (5.54)$$

$B - A = 2mR_s^2$ なので、式 (5.49) と同様のものができた。

5.4 自転軌道共鳴

惑星の軌道運動とそれに伴う衛星の四重極子モーメントの間の重力相互作用の結果、衛星の回転速度に小さくて短周期な振動が生じるが、通常はその影響は少ない。しかしながら、この場合には当てはまらない状況がある。これらの状況は、衛星の自転周期と公転周期の関係が、単に整数関係もしくは整数関係に近いような場合に生じ、このような場合には、重大な自転軌道結合がある。後の話は、Goldreich & Peale(1966,1968) や、Wisdom, Peale & Mignard(1984)、また、Wisdom(1987a,b) の先駆的なものに基づいている。

回転軸が固定された楕円軌道平面に垂直な、小さな衛星の運動について考える。衛星軌道の主軸をとることができる、二体の場合のケプラー系で、衛星の長軸が慣性空間に固定されたひとつの基準軸と角度 θ をなすとする。衛星の長軸は衛星-惑星間の直線と角度 ψ をなす。したがって、

$$\psi = f - \theta \quad (5.55)$$

ここで f は真近点離角である。(図 5.8 参照) 潮汐トルクを考えなければ、 θ に関する運動方程式は、(式 (5.49) 参照)

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (5.56)$$

r と ψ は、非線形関数の f と共に変化するので、この方程式は積分できない。しかしながら、自転速度 $\dot{\theta}$ が平均運動 n と整数比になっている、重要なこれらのような場合、近似値であるにもかかわらず、便利でなおかつ積分できる運動方程式を導くことができる。

いま、 $\dot{\theta}$ が平均運動の有理数倍であるような、このような場合に興味を持っているので、よって新しい変数を導入する。

$$\gamma = \theta - pM \quad (5.57)$$

ここで p は有理数で M は平均近点離角である。 n を一定とし、 $\ddot{\theta} = \ddot{\gamma}$ とすると、 γ に関する運動方程式は次のように書ける。(式 (5.56) 参照)

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \left(\frac{B - A}{C} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = 0 \quad (5.58)$$

この方程式は e, M についてフーリエに似たポワソン級数に展開することができ、 M は標準式 $(a/r)^3$, $\sin f$, $\cos f$ を使って表すことができる(2.5 節参照)。すべての $\mathcal{O}(e^2)$ の項も含めると、

$$\sin f = \left(1 - \frac{7}{8}e^2 \right) \sin M + e \sin 2M + \frac{9}{8}e^2 \sin 3M \quad (5.59)$$

$$\cos f = \left(1 - \frac{9}{8}e^2 \right) \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9}{8}e^2 \cos 3M \quad (5.60)$$

$$\left(\frac{a}{r} \right)^3 = 1 + 3e \cos M + \frac{3}{2}e^2(1 + 3 \cos 2M) \quad (5.61)$$

を得る。ここで次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma + 2pM - 2f) &= \sin 2\gamma (\cos 2pM \cos 2f + \sin 2pM \sin 2f) \\ &\quad + \cos 2\gamma (\sin 2pM \cos 2f - \cos 2pM \sin 2f) \end{aligned} \quad (5.62)$$

したがって

$$\left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = [S_1 + S_2] \sin 2\gamma + [S_3 - S_4] \cos 2\gamma \quad (5.63)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2pM \cos 2f & S_2 &= \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2pM \sin 2f \\ S_3 &= \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2pM \cos 2f & S_4 &= \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2pM \sin 2f \end{aligned} \quad (5.64)$$

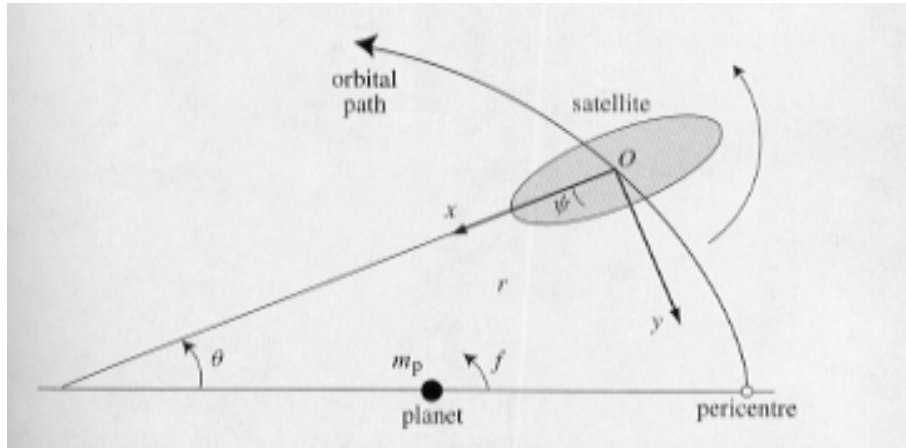


図 5.8: 衛星の長軸は、慣性空間に固定されているひとつの関連する軸と角度 θ をなす。その軸は、衛星の固定軌道の主軸にとる。

$\mathcal{O}(e^2)$ の項までとると、 S_i は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 S_1 = & \frac{1}{2} [\cos 2(1-p)M + \cos 2(1+p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e [7 \cos(3+2p)M + 7 \cos(3-2p)M \\
 & \quad - \cos(1+2p)M - \cos(1-2p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e^2 [-5 \cos 2(1+p)M - 5 \cos 2(1-p)M \\
 & \quad + 17 \cos 2(2+p)M + 17 \cos 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{2} [\cos 2(1-p)M - \cos 2(1+p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e [-7 \cos(3+2p)M + 7 \cos(3-2p)M \\
 & \quad - \cos(1-2p)M + \cos(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e^2 [5 \cos 2(1+p)M - 5 \cos 2(1-p)M \\
 & \quad - 17 \cos 2(2+p)M + 17 \cos 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = & \frac{1}{2} [\sin 2(1+p)M - \sin 2(1-p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e [7 \sin(3+2p)M - 7 \sin(3-2p)M \\
 & \quad + \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4} e^2 [-5 \sin 2(1+p)M + 5 \sin 2(1-p)M \\
 & \quad + 17 \sin 2(2+p)M - 17 \sin 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
S_4 = & \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M + \sin 2(1-p)M] \\
& + \frac{1}{4}e[7 \sin(3+2p)M + 7 \sin(3-2p)M \\
& \quad - \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
& + \frac{1}{4}e^2[-5 \sin 2(1+p)M - 5 \sin 2(1-p)M \\
& \quad + 17 \sin 2(2+p)M + 17 \sin 2(2-p)M]
\end{aligned} \tag{5.68}$$

したがって、 γ に関する運動方程式、式 (5.58) は、次のように書ける。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3(B-A)}{2c} n^2 ([S_1 + S_2] \sin 2\gamma + [S_3 - S_4] \cos 2\gamma) = 0 \tag{5.69}$$

S_3, S_4 が正弦しか含まない一方、 S_1, S_2 が余弦だけを含むことに注目する。方程式は正確であるが、 S_i は e と M について無限級数なので、したがってこの方程式は積分できない。先に進むには、近似値に頼らなければならない。

もし衛星の自転速度が自転軌道共鳴に近いとすれば、 $\dot{\theta} \approx pn$ となり、 γ ($\dot{\gamma} \ll n$) はゆっくりと変化する。そして、 γ が固定された状態の間に、式 (5.69) のすべての項を一周期にわたって平均することによって、近似運動方程式を与えることができる。よって次の式を得る。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3(B-A)}{2c} n^2 (\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle) \sin 2\gamma + [\langle S_3 \rangle - \langle S_4 \rangle] \cos 2\gamma = 0 \tag{5.70}$$

ここで、

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_i dM \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{5.71}$$

そして、ここでの γ は平均値を表していると理解されている。 S_i は、この考察の下での特定の自転軌道共鳴に対応する有理数 p の特定の値について求められなければならない。 M の整数倍の角度を持つ正弦と余弦は一軌道周期にわたって平均するとゼロになるので、よって運動方程式にゼロでない寄与をしている S_i の唯一の項は、それらの角度ゼロの余弦の項である。例えば $p = 1$ の同期状態の場合は、因子として $p - 1$ を含む角度の項だけが平均運動方程式に寄与する。式 (5.65) から式 (5.68) を調べると、この場合には $O(e^2)$ でそろえると、次の式を得る。

$$([\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle] \sin 2\gamma + [\langle S_3 \rangle - \langle S_4 \rangle] \cos 2\gamma)_{p=1} = \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \sin 2\gamma \tag{5.72}$$

もし p の他の値についても同じ手順で行えば、同じ方程式（もしくは e について高次の項を含む同等の集合）を調べると、唯一 $1/2$ の整数倍の p の値が平均運動方程式に寄与できる。それらの場合は次のように書いて、

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \frac{(B-A)}{c} H(p, e) \sin 2\gamma = 0 \tag{5.73}$$

ここで、例えば $\mathcal{O}(e^4)$ の項にそろえると、

$$H(-1, e) = +\frac{1}{24}e^4 \quad (5.74)$$

$$H(-1/2, e) = +\frac{1}{48}e^3 \quad (5.75)$$

$$H(0, e) = 0 \quad (5.76)$$

$$H(+1/2, e) = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3 \quad (5.77)$$

$$H(+1, e) = +1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 \quad (5.78)$$

$$H(+3/2, e) = +\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \quad (5.79)$$

$$H(+2, e) = +\frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 \quad (5.80)$$

$$H(+5/2, e) = +\frac{845}{48}e^3 \quad (5.81)$$

$$H(+3, e) = +\frac{533}{16}e^4 \quad (5.82)$$

kaula(1966) で定義されている離心率関数 $G_{lpq}(e)$ について調べると、

$$H(p, e) = G_{20(2p-2)}(e) \quad (5.83)$$

そして、 $p = 0$ の場合を除けば、 $H(p, e) = \mathcal{O}(e^{2|p-1|})$ である。

したがって、近似値を導入すると、式 (5.56) の完全運動方程式を振り子の方程式のように整理して、次のように書くことができる。

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)]\frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\gamma \quad (5.84)$$

ただしここで、

$$\omega_0 = n \left[3 \left(\frac{B-A}{C} \right) |H(p, e)| \right]^{1/2} \quad (5.85)$$

は秤動振動である。潮汐トルクが衛星の自転を乱す影響を考えれば、一周期にわたって平均された平均潮汐トルク $\langle N_s \rangle$ は、平均の運動方程式に加えて

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)]\frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\gamma + \langle N_s \rangle / C \quad (5.86)$$

と書ける。もし

$$|\langle N_s \rangle| / C < \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (5.87)$$

ならば、 $\ddot{\gamma}$ の符号は周期的に逆にならなければならず、したがって $\langle \theta \rangle = pn$ によって、衛星は自転軌道共鳴の状態になりうる。もし強さの基準である式 (5.87) を満たすなら、惑星と衛星の四重極子モーメントの相互作用共鳴による平均トルクは、衛星の自転周期を変化させる平均潮汐トルクを相殺し、 $\langle \ddot{\gamma} \rangle = 0$ であり、 γ は次式で与えられる平衡値 γ_0 の周りを秤動する。

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\frac{2\langle N_s \rangle}{-[\text{sign } H(p, e)]\omega_0^2 C} \right] \quad (5.88)$$

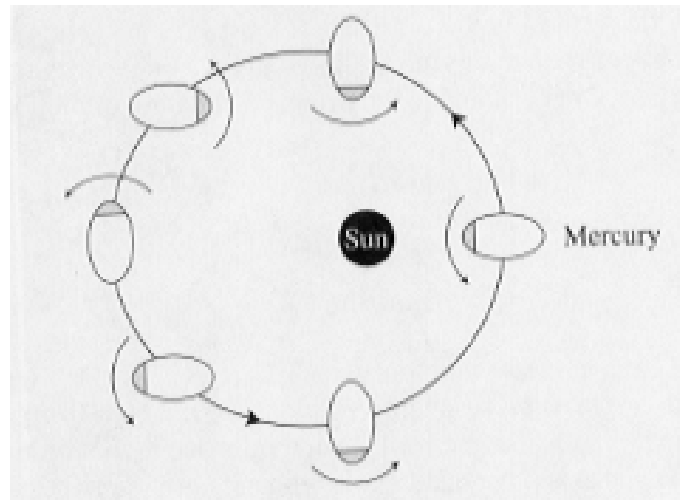


図 5.9: 太陽が中心の慣性座標系で、水星は一軌道周期あたり $3/2$ 回転で完結している。

衛星の平衡方向と γ_0 の符号は、 $H(p, e)$ の符号で決まる。 γ が γ_0 からの小さく移動すると、 $\dot{\gamma}$ の符号は、 γ を γ_0 に戻すために平衡移動するようなものにならない。もし平均トルクが共鳴トルクと比較して弱く、

$$|\langle N_s \rangle|/C \ll \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (5.89)$$

ならば、 $H(p, e) > 0$ で $\gamma_0 \approx 0$ もしくは π のとき、近点を通る衛星の通路で衛星の長軸は惑星の方を向く。逆にもし $H(p, e) < 0$ で $\gamma_0 \approx \pi/2$ もしくは $3\pi/2$ ならば、近点で衛星の長軸は惑星 衛星間の直線に垂直な方向を向く。

今、水星の公転を考え、平均運動方程式の物理的解釈を簡単に与える。水星の場合は特に興味がある。なぜなら、惑星が太陽と、最初に調べられた自転軌道共鳴の予期された 1:1 の同期状態よりむしろ、3:2 の自転軌道共鳴にとらわれていると、レーダー観測によって明らかにされているからである。これらのことを与えるうまい歴史は、Goldreich & Peale(1968) によって与えられている。水星の慣性座標系での自転と軌道運動は、図 5.2 に描かれている。

惑星の自転周期は 58.65 日で、軌道周期は $87.97 = 1.5 * 58.65$ 日である。したがって、惑星は、太陽を 2 回転する間に、軸が 3 回転する。そして水星が近日点を通過する通路で、惑星の反対側の面は太陽と向き合う。角 γ の物理的な意味は、衛星が近日点を通過するときの衛星の長軸の方向で、 $M = 0$ のときに評価されるスナップショット角 (stroboscopic angle) である。 $H(p, e) \approx +(7/2)e > 0$ が与えられると、 γ は振幅が $< \pi/2$ で平衡値 $\gamma \approx 0$ の周りで秤動すると予想され、近日点で惑星の長軸は太陽の方向を向く (図 5.10)。もし水星が $H(p, e) < 0$ の $p = +1/2$ の共鳴に捕われたとすれば、惑星の方向は図 5.11 のようになると予想できる。

図 5.10a は、水星を中心とする平均共鳴自転速度 $(3/2)n$ で回転している座標系での太

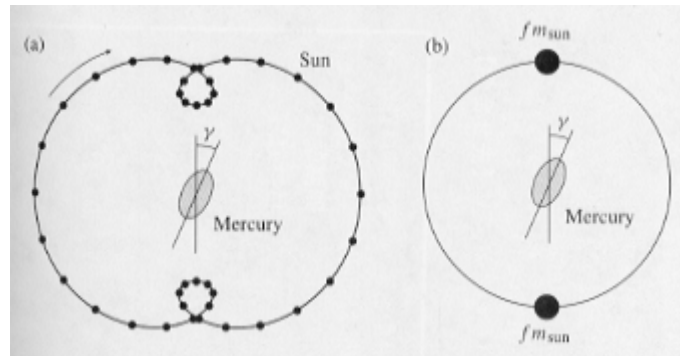


図 5.10: (a) 水星が中心で水星の共鳴自転速度 $(3/2)n$ (ここで n は水星の平均運動) で回転する座標系で太陽の運動このように見える。水星の四重極子モーメントと太陽との重力相互作用は、通路の一部 (閉じた通路での点は、等時間間隔で太陽が連続で位置している場所である) に費やす時間に比例した、短い区間の線密度を持つ、閉じた通路に沿って広がっている太陽の質量分布、もしくは (b) に描かれているような、二つの質点 $f m_{sun}$ によって書くことができる。ここで、 $f = (1/2)H(3/2, e)$ である。

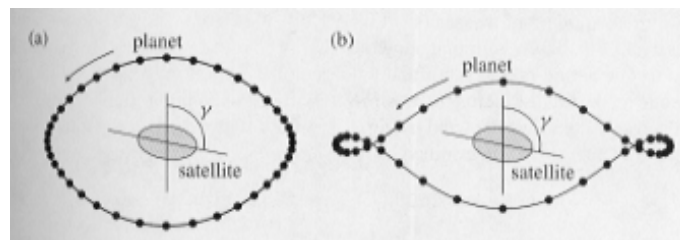


図 5.11: $p = +1/2$ の共鳴に捕われた衛星の概要は、衛星が近点を通過するときの通路での衛星の長軸が惑星衛星間ラインに垂直な方向を向くような、変則的なものである。

陽の運動である。ここでの n は水星の平均運動である。輪になっている通り道上の点は、等時間間隔の太陽の場所である。この回転座標系の太陽の通り道は、自転軌道共鳴状態なので閉じていて、そのことは今まで使ってきた平均する方法を正当なものとする、決定的な事実である。惑星の四重極子モーメントと太陽のあいだの平均重力相互作用は、それぞれの場所での線密度が太陽が通過するときの各部分に費やす時間に比例するような、この閉じた道筋に沿って太陽の質量をばら撒くことでモデル化できる。線密度は図 5.10a の点の間隔に反比例している。角 γ は今、図 5.10a の回転座標系での惑星の長軸の、惑星近日点方向からのずれであると解釈できる。この図の対称性から、さらに重力相互作用は、図 5.10b のように置かれる正の二つの質点のトルクに寄与しないような同一の線密度の環状分布を持つ、太陽の質量分布に置き換えたものによって書くことができると推論できる。ここで、

$$f = \frac{1}{2}H(p, e) \approx \frac{7}{4}e \quad (5.90)$$

そして、 m_{sun} は太陽の質量である。

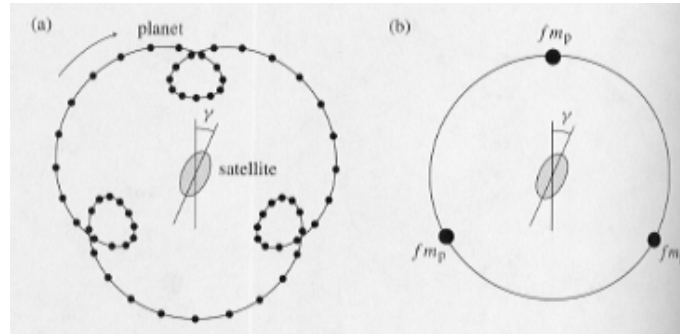


図 5.12: (a) 衛星が中心で衛星の平均自転速度（この場合は $(4/3)n$ で n は衛星の平均運動）で回転する惑星の軌道。衛星の四重極子モーメントによって惑星に働く、重力によるトルクは、この回転座標系での惑星の輪の軌道を、(b) のように三つの質点を加えた質量の環状分布に置き換えることでモデル化できる。

図 5.11 で見られるような、公転している座標での閉じた軌道は、自転軌道結合に必要なではあるが十分な条件ではない。式 (5.65) と (5.56) より、 p は（衛星の重力ポテンシャルの二重対称によって決められるような） $1/2$ の整数倍でなければならない。 p の他の値は共鳴相互作用には寄与しない。図 5.12 の、惑星の運動は、衛星を中心とした衛星の平均公転速度（この場合では $(4/3)n$ で、 n は衛星の平均運動）で回転する座標でのものである。図 5.12a の閉じた軌道の形から、この場合、惑星の平均重力は、環状の質量分布と等しい三つの質点で輪になった軌道の移動によってモデル化できる。（図 5.12b 参照）ここで図 5.10b と図 5.12b の形状を比較する。図 5.10b で、もし $N \sin 2\gamma$ があるひとつの質点によって衛星に働くトルクなら、平衡状態に戻すために衛星に働く総トルクは $2N \sin 2\gamma$ である。しかしながら、 $p = 4/3$ である図 5.12b のように描かれている場合には、 γ を変化させるために働く、総トルクは、

$$N \sin 2\gamma + N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) = 0 \quad (5.91)$$

によって決められ、系は中立的に安定している。

$p = 0$ の特別な場合には、図 5.13 のようになる。質量要素 δm による衛星のトルク δN は次のようにかかる。

$$\delta N = \frac{3}{2}(\mathcal{B} - \mathcal{A}) \frac{\mathcal{G}\delta m}{r^3} \sin 2\psi \quad (5.92)$$

Kepler の法則から、

$$\delta m = \frac{r^2 \delta \psi}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \quad (5.93)$$

を得る。したがって、衛星の総トルクは、

$$N = \frac{3(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathcal{G}}{4\pi a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [1 + e \cos(\psi + \theta)] \sin 2\psi d\psi \quad (5.94)$$

で与えられ、また、慣性空間では衛星は回転せず、 θ は固定されていて、積分はゼロである。

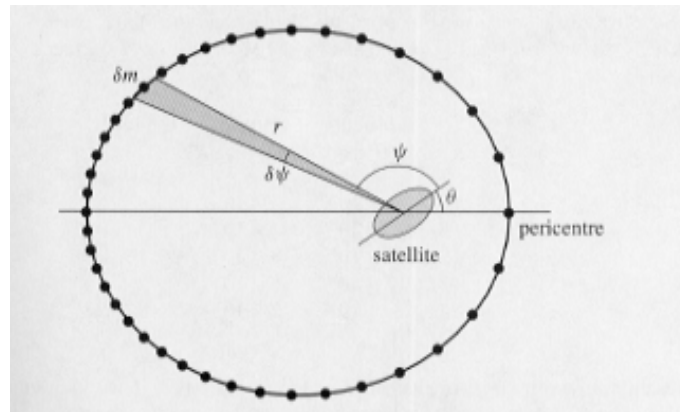


図 5.13: 慣性座標系での衛星を中心とした惑星の軌道。もし $p = 0$ なら衛星の概要は慣性空間に固定されていて、惑星との共鳴相互作用はない。

p	Mercury $(B - A)/C$	Moon $(B - A)/C$
+3	2×10^{-8}	7×10^{-5}
+5/2	7×10^{-9}	7×10^{-6}
+2	3×10^{-9}	8×10^{-7}
+3/2	2×10^{-9}	10^{-7}
+1	10^{-9}	2×10^{-8}

図 5.14: 月と水星に関する $(B - A)/C$ の臨界値。水星では $k_2 \approx 0.1$ で $Q = 100$ 、月では $k_2 \approx 0.03$ で $Q = 27$ と想定している。(Yoder 1995)

特定の自転軌道共鳴に捕われている衛星において、共鳴による衛星のトルクは潮汐引きずりを超えるものでなければならない。式 (5.79) と (5.2) の強さの基準から、 $(B - A)/C$ が

$$\left(\frac{B - A}{C}\right)_c^{\text{ritical}} = \frac{5}{2} \frac{k_2}{Q} \left(\frac{R_s}{a}\right) \frac{m_p}{m_s} \frac{1}{|H(p, e)|} \quad (5.95)$$

で与えられる臨界値を超えるものでなければならないと計算できる。ここで m_p は主要な質量で、 $C \approx (2/5)m_s R_s^2$ とみなすことができる。太陽と水星、地球と月での系では自転軌道共鳴の級数による $(B - A)/C$ の臨界値は表 5.1 に一覧にしている。月と水星の軌道離真率は、それぞれ、0.00549 と 0.206 で、月に関しては $(B - A)/C \approx 2.28 \times 10^{-4}$ (Yoder 1995)、そして、水星の $(B - A)/C$ がそれに匹敵するものであると考えるのは理にかなったものである。表 5.1 を調べると、確かに、水星の現在の自転軌道状態の復元力で、もしくは月のものでも、問題はない。しかしながら、もしこれらの物体の両方とも自転が潮汐によってブレーキがかかり、最初の軌道周期が短かったとすれば、これらの物体がどの

ように現在の自転軌道状態に捕われたのかだけでなく、どのようにたくさんの他の強力な共鳴に捕われることなく進化することができたのか、をぜひ知る必要がある。

5.5 共鳴への捕獲

共鳴への捕獲を理解するためにはひとつ問題がある。それはこの後に見ることができる、自転軌道共鳴との遭遇での衛星の自転速度の進化である。初めに $\dot{\theta} > pn$ で潮汐は衛星の自転を乱すように働くと仮定する。したがって、初めは $\dot{\gamma} > 0$ で共鳴には上の方から (図 5.14 参照) 近づく。摩擦がある場合の、共鳴角 γ の運動方程式は、

$$C\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}(B - A)n^2 H(p, e) \sin 2\gamma = \langle N_s \rangle \quad (5.96)$$

となる。時間に関して積分すると、次のエネルギー積分を得る。

$$\frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 - \frac{3}{4}(B - A)n^2 H(p, e) \cos 2\gamma = E \quad (5.97)$$

ここで、 E は全エネルギーで、

$$E = \langle N_s \rangle \gamma + E_0 \quad (5.98)$$

で表され、 E_0 は初期状態によって決められる定数である。エネルギー方程式 (5.97) において、物理的な解 ($\dot{\gamma} > 0$) を持つためには、

$$E > -\frac{3}{4}(B - A)n^2 |H(p, e)| \quad (5.99)$$

でなければならない。もし、 $E > +(3/4)(B - A)n^2 |H(p, e)|$ なら、 $\dot{\gamma}$ の符号は変化せず、 γ の運動は循環のひとつである。しかしながら、 $\langle N_s \rangle < 0$ ならば、潮汐力は E を減少させるように働き、共鳴の遭遇は $\dot{\gamma}$ がゼロまで減少するときに起こる。

図 5.14a では、 γ にともなう $\dot{\gamma}^2$ の変化を示す。一方、図 5.14b は $\dot{\gamma}^2$ の変化を二つの成分に分けている。ひとつは γ に伴い正弦関数的に変化するポテンシャル項と、共鳴と遭遇する前は γ の増加にともない直線的に減少し、共鳴と遭遇した後は γ の減少に伴い直線的に増加する引きずり項によるものである。後者の表現では γ に伴う $\dot{\gamma}^2$ の変化は二つの項の差によって与えられる。もし $\langle N_s \rangle$ が一定なら、運動方程式は完全に元に戻ってしまう。 $\dot{\gamma}$ の符号は共鳴遭遇のときに変わるが、遭遇後の $(\gamma, \dot{\gamma})$ の空間での系の軌道は、遭遇前と重なるので共鳴への捕獲は起これない。

Goldreich & Peale(1968) は、この共鳴を捕獲されないで通過する事について、続く振り子との類似点を用いて説明している。振り子が循環している間、一定のトルクはその循環を乱すように働く。したがってその後、振り子は最後の支点 ($\dot{\gamma} > 0$ の最初の方向) を通り過ぎてから、その公転速度はゼロになるまで減ってしまう。振り子の循環はそのとき逆になる。しかしながら、トルクの大きさと符号は両方とも変わらないままで、したがってトルクは振り子の循環速度を増加させるように働く。乱される前の振り子から取り除か

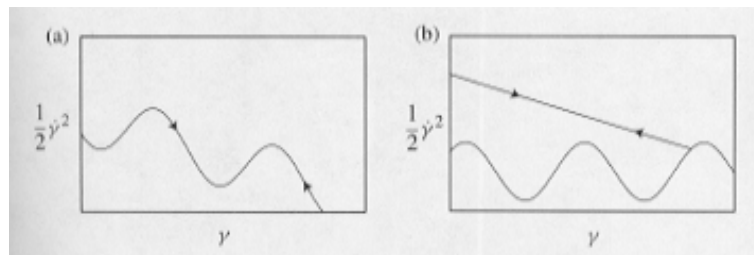


図 5.14: (a) 共鳴角 γ と $(1/2)\dot{\gamma}^2$ の変化。(b) γ と $(1/2)\dot{\gamma}^2$ の変化の γ とともに蛇行しながら変化するポテンシャル項と γ の増加と共に直線的に減少する潮汐トルクによる項への分離。後者の取り扱いでは、 $(1/2)\dot{\gamma}^2$ は二つの項の差によって与えられる。

れたエネルギーはすべて再び供給され、振り子は支点まで振り戻ってきて、循環速度の大きさは ($\dot{\gamma} < 0$ で) 増え続ける。

エネルギー方程式の蛇行しているポテンシャル項の振幅が一定であるとする、共鳴への捕獲が起こるためには次のようになる。(a) $\langle N_s \rangle$ はどうにかして $\dot{\gamma}$ に伴って必ず変化し、そして (b) その前の振り子の揺れの間、 $\dot{\gamma}$ の符号が逆になるとき、振り子が支点を越えて振り戻るのが妨げるように、共鳴遭遇 ($\dot{\gamma} = 0$) より前の E の減少の方が共鳴遭遇後の E の増加よりも大きくなければならない。

このように、エネルギー散逸を考えた潮汐の理論は、いろいろな点であまり発達していない。しかしながら、Goldreich & Peale (1966, 1968) で、 $\langle N_s \rangle$ が $\dot{\gamma}$ からずれることを許したいくつものもっともらしい潮汐散逸のモデルを与えている。そして、それらのモデルを使って、共鳴への捕獲の確率を見積もった。これらのモデルのうち Darwin (1908) に関する二つを記述するが、その前に運動方程式の様々な項の大きさを見積もることが必要である。太陽系における様々な天体に働く潮汐力は非常に弱く、ただ、数十億年にわたって働くので自転速度と公転周期に重大な変化を引き起こす。表 5.2 にリストされている k_2, Q などの値を使うと、もし水星と月の最初の自転周期 ($2\pi/\dot{\theta}_{initial}$) が 9 時間だったとすれば、これら自身にブレーキがかかるのに必要な時間はそれぞれ 5×10^9 と 3×10^7 年で、これは水星太陽間の自転軌道共鳴が比較的若いものであることをほのめかしている。式 (5.88) によって与えられる遅れ角 γ_0 はたった数秒で、もしエネルギー方程式のポテンシャル項 $(3/4)(B-A)n^2 H(p, e) \cos 2\gamma$ の振幅を U とすると、そのとき $\langle N_s \rangle \pi / U \ll 1$ となる。秤動周期 $T_{libration} = 2\pi/\omega_0$ (式 (5.85) で使う) は、公転周期よりも大きい、大きなファクターで違っている、ということも書いておく。

惑星によって衛星で上昇する潮汐による衛星の潮汐トルクを計算するのに Darwin の手順を使えば、潮汐ポテンシャルを Fourier 時間級数に展開して、成分それぞれが衛星の平衡潮汐を生じさせると想定する。潮汐散逸の効果はそのとき、成分それぞれに成分がポテンシャル項を進めるか遅れさせるかさせるような位相の変化を与えることによってモデル化される。最初のモデルでは、位相のずれや符号ではなく大きさは潮汐振動数から独立に

Quantity	Mercury	Moon
k_2	0.1	0.03
Q	100	27
e	0.206	0.0549
$(B - A)/C$	10^{-4}	2.28×10^{-4}
$H(p, e)$	0.65	0.99
$T_{\text{libration}}$	17 y	2.88 y
γ_0	2 arcsec	9.6 arcsec
$2\pi/\dot{\theta}_{\text{initial}}$	9 h	9 h
T_{despin}	5×10^9 y	3×10^7 y
$\langle N_s \rangle \pi / U$	10^{-4}	6×10^{-4}

図 5.15: 水星と月の軌道に関する物理量。

よらない。この場合、平均潮汐トルクは

$$\langle N_s \rangle = -D \sum_{h=-\infty}^{\infty} [H(h, e)]^2 \text{sign}(\dot{\theta} - hn) \quad (5.100)$$

で与えられる。ここで h は半整数で、 D は式 (5.3) で与えられる正の定数、衛星の自転軸は軌道面に垂直であると仮定する。 p 番目の共鳴への捕獲に関しては、 $\dot{\theta} - pn = \dot{\gamma}$ で

$$\langle N_s \rangle = -W - Z \text{sign}(\dot{\gamma}) \quad (5.101)$$

とかけ、ここで、

$$W = +D \sum_{h \neq p} [H(p, e)]^2 \text{sign}(p - h) \quad (5.102)$$

そして

$$Z = +D[H(p, e)]^2 \quad (5.103)$$

エネルギーの変化の速度は次のように書ける。

$$\frac{dE}{dt} = \langle N_s \rangle \dot{\gamma} \quad (5.104)$$

よってエネルギーは

$$\int dE = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \langle N_s \rangle \quad (5.105)$$

に従い γ とともに変化する。 $\pi \langle N_s \rangle \ll (3/4)(B - A)n^2 H(p, e)$ なので、図 (5.15) の直線の傾きは無視できるほどで、全積分は $\gamma_2 - \gamma_1 = \pi$ と想定できる。

初期状態は明細には述べられていないので、点 P でのエネルギーは角 E_0' から $E_0' + \Delta E$ の間ならどこでも存在できる。ここでは $\dot{\gamma}$ は初めてゼロまで減少し (図 (5.15))

$$\Delta E = (W + Z)\pi \quad (5.106)$$

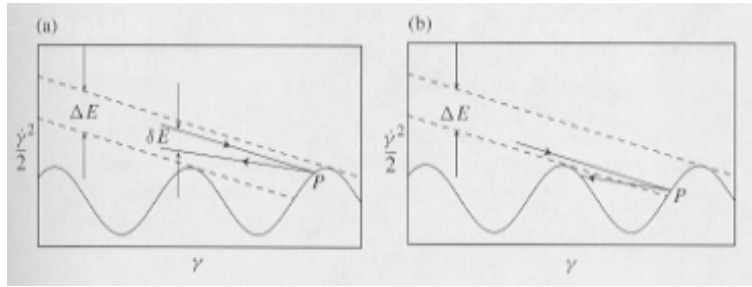


図 5.16: 共鳴への捕獲は δE と位置 P での γ の大きさと符号に依る、ここで $(1/2)\dot{\gamma}$ は最初にゼロまで減る。 P の位置で捕獲なし (a) と捕獲あり (b) での共鳴の遭遇がわかる。もし $\delta E < 0$ で $|\delta E| > |\Delta E|$ なら、捕獲確率は $|\delta E/\Delta E|$ によって与えられ、捕獲は確かである。

である。 p 番目の共鳴との遭遇において、式 (5.101) の $h = p$ の項の符号は変化する。共鳴遭遇の前は、 $\dot{\gamma} > 0$ で、

$$\langle N_s \rangle = -W - Z \quad (5.107)$$

遭遇共鳴のあとは、 $\dot{\gamma} < 0$ で、

$$\langle N_s \rangle = -W + Z \quad (5.108)$$

である。したがって共鳴遭遇では、 $\langle N_s \rangle$ の大きさは $2Z$ ずつ減る。このことは次による。秤動の一周期にわたる E の減少は次で与えられ、

$$\delta E = 2Z\pi \quad (5.109)$$

p 番目の共鳴への捕獲の確率 P_p は

$$P_p = \frac{2Z}{Z + W} = \frac{2[H(p, e)]^2}{[H(p, e)]^2 + \sum_{hp} [H(p, e)]^2 \text{sign}(p - h)} \quad (5.110)$$

である。この場合、捕獲の確率は $(B - A)/C$ もしくは (式 (5.87) の強度基準を満たしていると仮定する) D での潮汐引きずりの大きさどちらかにはよらない。 D は p と e にのみよって決められる。

p 番目の水星の共鳴への捕獲確率は Goldreich & Peale (1968) で $e = 0.2$ と表 5.3 に書かれている振動数から独立している Q に関して計算される。その独立振動数モデルは $p = +3/2$ の共鳴と高オーダーの共鳴を回避すれば、両方とも捕獲に関して良い説明が与えられる。しかしそれは、秤動の振幅の停止については説明していない。 $H(p, e) > 0$ の場合、 γ は $\gamma_0 \approx 0$ の周りを式 (5.97) を $\dot{\gamma} = 0$ で解くことによって与えられる振幅 γ_{max} で秤動する。もし γ_0 のゼロからの小さなずれを無視すると、

$$\frac{1}{4}\omega_0 \cos 2\gamma_{max} \approx -E/C \quad (5.111)$$

p	P_p ($1/Q \sim \text{Constant}$)	P_p ($1/Q \sim \text{Frequency}$)
+5/2	0.03	0.007
+2	0.15	0.016
+3/2	0.73	0.067
+1	1	0

図 5.17: $e = 0.2$ での水星の p 番目の共鳴への捕獲確率 P_p

また、

$$\dot{\gamma}_{max} \approx \frac{2\dot{E}}{C\omega_0^2 \sin 2\gamma_{max}} \quad (5.112)$$

を得る。秤動の振幅の停止には $\dot{E} < 0$ が必要である。しかしながら、

$$\dot{E} = \langle N_s \rangle \dot{\gamma} \quad (5.113)$$

であり、もし $\langle N_s \rangle$ が $\dot{\gamma}$ に依らないならば、 $\langle \dot{\gamma} \rangle = \langle \dot{E} \rangle = 0$ となり秤動は止まらない。

Goldreich & Peale(1968) で考えられている二つ目のモデルは潮汐散逸関数が振動数に依ることを許している。この場合、

$$\langle N_s \rangle = -K' \sum_{h=-\infty}^{\infty} [H(p, e)]^2 (\dot{\theta} - hn) \quad (5.114)$$

を仮定し、ここでの K' は正の定数である。共鳴に近く、 $\dot{\theta} = pn + \dot{\gamma}$ で

$$\langle N_s \rangle = -K \left(V + \frac{\dot{\gamma}}{n} \right) \quad (5.115)$$

と書け、

$$K = K'n \sum_h [H(p, e)]^2 \quad (5.116)$$

そして、

$$V = \frac{\sum_h (p-h)[H(p, e)]^2}{\sum_h [H(p, e)]^2} \quad (5.117)$$

である。 p 番目の共鳴への捕獲確率は

$$P_p = \frac{4(\omega_0/n)}{\pi V + 2(\omega_0/n)} \quad (5.118)$$

で与えられる。振動数依存の場合には、確率は振幅の小さな秤動の振動数 (ω_0/n) と離心率 e に依存する。表 5.3 に見られる確率は小さいが、無視できるほどではなく、この場合 $\langle N_s \rangle$ の $\dot{\gamma}$ への依存は結果的に $\dot{\gamma}^2$ に比例した \dot{E} に関する式のひとつの項になる。この項はゼロからの平均で、したがって秤動の振幅は停止する。

5.6 強制秤動

衛星が自転軌道共鳴に捕われるとき、例えば1:1の同期共鳴の場合、引きずり項を含めた平均運動方程式の解析では、どんな平衡状態の秤動もゼロまで鈍らせられ、衛星は一樣にその長軸を正確に惑星軌道の近点の方向に向けて公転する、と示されている。しかしながら、完全運動方程式は短周期の項を含んでいる。その結果、衛星の軌道運動は平衡状態の短周期の秤動を持つ。

衛星を中心とし、衛星の平均運動で回転する座標系で衛星の公転を考える（図 5.16 参照）。惑星による衛星の重力トルクは、角 ψ によって決定し、この場合では $O(e)$ で

$$\psi = \phi - \gamma \approx 2e \sin nt - \gamma \quad (5.119)$$

であり、式 (5.56) の完全運動方程式は次のように書ける。

$$C\ddot{\gamma} - \frac{3}{2}(B - A)n^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(4e \sin nt - 2\gamma) = 0 \quad (5.120)$$

平衡状態から少しでもずれると、放射状の距離 r の変化による寄与は $(a/r)^3 \approx 1 + 3e \cos nt$ と与えられ、式 (5.120) は、

$$C = -\frac{3}{2}(B - A)n^2(2\gamma - 4e \sin nt) \quad (5.121)$$

もしくは、

$$\ddot{\gamma} = -\omega_0^2 \gamma + 2\omega_0^2 e \sin nt \quad (5.122)$$

とまとめることができる。このとき ω_0^2 は、秤動振動数（式 (5.85) 参照）である。代わりに $\gamma = \gamma_0 \sin nt$ をこの方程式に入れ、強制秤動の振幅 γ_0 について解くと、

$$\gamma = -\frac{2\omega_0^2 e}{n^2 - \omega_0^2} \sin nt \quad (5.123)$$

を得る。 γ の変化はこの方程式には寄与しないことを書いておく。もし力の振動数 n が自然振動数 ω_0 より小さければ、秤動はその力と同位相である。しかし、もし $n > \omega_0$ ならば、秤動と力は 180° 位相がずれる。

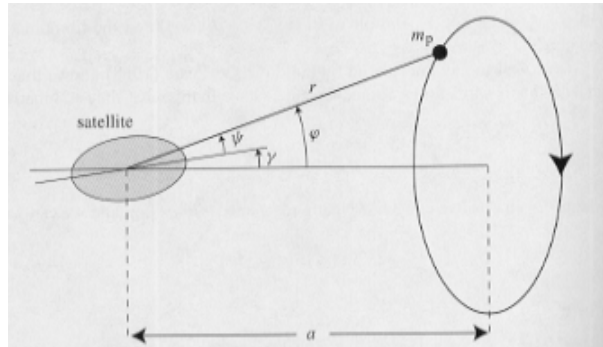


図 5.16: 衛星を中心とし、衛星の平均運動で回転する回転座標系での衛星の公転。この座標系では惑星は guiding centre の周りに固定された 2:1 楕円軌道で動く。

月ならば、秤動周期は 2.86 年のあいだの強制秤動の振幅はせいぜい 15 秒までで、発見するには小さすぎる値である。しかし、火星の最も内側の衛星で、大きくゆがんでいるフォボスの場合では、43 枚のバイキング衛星からのフォボスの写真での 98 個のクレーターネットワークを用いて、Duxbury & Callahan(1982) では $0.8^\circ (\pm 0.2^\circ)$ という強制秤動の振幅の値を得た。もし衛星が均質であると考えらるなら、観測された γ_0 の値では、 $(B-A)/C \approx 0.1$ となる必要がある。しかし、もし衛星が均質ならば、観測されたフォボスの形は $(B-A)/C \approx 0.2$ であることをほのめかしている。もし衛星が均質でなく、高密度の核が低密度の表土に囲まれているとすれば、これらの大きく異なる二つの $(B-A)/C$ の値を満足できる。(Thomas(1986))

5.7 切断面

5.4 節で述べられた方法では、もし $\dot{\theta} \approx pn$ なら、式 (5.73) で使っている共鳴角 $\gamma = \theta - pM$ がゆっくりと変化している間、共鳴周辺での運動を分析することができる、と言っている。図 5.17a では、 γ についてのエネルギー積分から得られた θ の値を使って、 θ にもなう $\dot{\theta}/n$ の値の解析解を示す。 γ のエネルギー積分は、

$$\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 - \frac{1}{4}[\text{sign } H(p, e)]\omega_0^2 \cos 2\gamma = \frac{E_0}{C} \quad (5.124)$$

で与えられ、 E_0 は初期状態によって決められる定数である。分析解は、共鳴である $p = +1/2, +1, +3/2$ のものと、 $p = 0$ の共鳴ではないものである。 $H(p, e) > 0$ で $p = +1, +3/2$ の場合、安定な平衡点は $\theta = 0, \pi$ にあるが、一方 $H(p, e) < 0$ で $p = +1/2$ では安定な平衡点は $\theta = \pi/2$ にある。すべての場合において、 $\dot{\gamma} = 0$ の安定な平衡点では、

$$E_0 = -\frac{1}{4}\omega_0^2 C \quad (5.125)$$

でなければならず、 E_0 は (ω は p によることを考えると) これらの点では極小である。 E_0 の値の幅は

$$-\frac{1}{4}\omega_0^2 C \leq E_0 < +\frac{1}{4}\omega_0^2 C \quad (5.126)$$

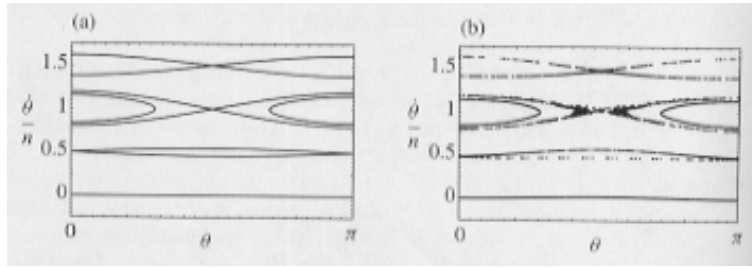


図 5.17: (a) $p = +1/2, +3/2$ 共鳴の ($p = +1$ 共鳴の秤動区域での) セパラトリックス上の θ にもなう $\dot{\theta}/n$ の分析解。このとき $\alpha = \sqrt{3(B-A)}/C = 0.2$ で $e = 0.1$ である。(b) 同じ α, e で $(\theta, \dot{\theta}/n)$ 平面での 7 個の異なる軌道についてプロットした断面。衛星が近点を通過することに θ や $\dot{\theta}/n$ の値をプロットしている。

であり、 γ は平衡位置の周りを E_0 によって決まる振幅にもなって秤動する。循環の領域から秤動の領域を分ける境界線であるセパラトリックス (separator) にもなう E_0 の値は次で与えられる。

$$E_0 = +\frac{1}{4}\omega_0^2 C \quad (5.127)$$

セパラトリックス上の運動において、 $|\dot{\gamma}|$ の最大値は

$$|\dot{\gamma}_{max}| = \omega_0 \quad (5.128)$$

で与えられ、共鳴の帯の半分ほどの大きさである。図 5.17a は $e = 0.1$ で $\alpha = (3(B-A)/C)^{1/2} = 0.2$ の共鳴の値に伴うセパラトリックスである。つまり、秤動の幅が小さいと秤動周期は $2\pi/\omega$ であるが、セパラトリックス上の秤動周期は無限大である。

これがどれほど良い近似なのか調べるために、式 (5.56) の e や非球形パラメータの α が数値的に固定された完全運動方程式を積分できる。しかしながらここでは、 θ と時間に依る $\dot{\theta}$ のすべての変化について示すよりも、それぞれの解の基本的な特性を図にした、運動の切断面をつくる方を選ぶ。これは、式 (5.56) の完全運動方程式を数値的に解くことや、衛星が近点を通過するごとの θ や $\dot{\theta}/n$ の値をプロットすることも含んでいる。近点の選択は任意であるが、近点では $M = 0$ なのでこの場合は自然な選択である。したがってこの場合、断面は $\dot{\gamma}/n$ に対する γ のプロットと等価である。

図 5.17b は、すでに図 5.17a で解析曲線にプロットした E_0/C の値に一致する、 $(\theta, \dot{\theta}/n)$ の初期状態の幅をプロットした切断面である。どちらの場合も、 $e = 0.1, \alpha = 0.2$ である。これら大きな E, α の値だと、共鳴域の大きさを描きやすい。しかしながら、共鳴の半値幅は大きい。例えば $p = +1$ の共鳴の場合、 $\omega_0 = 0.2$ で、大きな秤動の振幅に伴う分析解が、共鳴のおよその範囲に入っていて、 $\dot{\theta} \approx pn$ であるかどうか不確かである。切断面の方法では分析的な理論の限界を確かめることができる。

数値的実験では、それぞれの共鳴域の中心、つまり θ の秤動の振幅が小さい安定な平衡点の近くでは、 $(\theta, \dot{\theta})$ 空間での軌道の切断面は、強制秤動に伴う変位があることを除けば、解

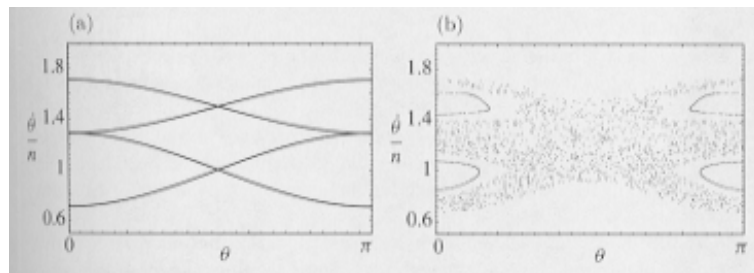


図 5.18: (a) セパラトリックス上での θ にともなう $\dot{\theta}/n$ の解析的变化と、 $\alpha = \sqrt{3(B-A)/C} = 0.3$ 、 $e = 0.15$ に関する $p = +1$ と $p = +3/2$ の共鳴の秤動域での解析的变化。(b) α と e が同じ値のときの $(\theta, \dot{\theta})$ 空間での三つの異なる軌道の切断面。 θ と $\dot{\theta}$ の変化は衛星が近点を通過するたびにプロットされたものである。

析曲線によく似ている。例えば $p = +1$ の共鳴には、強制秤動から $\dot{\gamma}/n \approx -0.0083$ の寄与がある (式 (5.115) 参照)。この小さな負の変位は図 5.17b できちんと見て取れ、 $p = +1/2$ と $p = +3/2$ 共鳴に関係する小さな正の変位として見れる (e と α の値をさらに上げたものを使った図 5.18b ではこの変位がより明らかである)。秤動の振幅が小さいものに関しては、切断面の軌道上の連続した点は、秤動周期で与えられる時間で閉じた軌道が作られるように、お互いが並んでいる。しかしながら、セパラトリックスでの運動はさらなる特性があることが図 5.17b からあきらかである。 $p = +1$ の強い共鳴の付近では特に明白である。 θ の進化は決定論者の法則に従っているにもかかわらず予測できず、有限の限界値にともなってさまよう、という意味では全積分のセパラトリックスでの運動は、『無秩序』である。これで、 $p = +1$ と $p = +3/2$ の共鳴のセパラトリックスの外見が ”あいまい” であることが説明がついた。

われわれの解析では、それぞれの共鳴を孤立させて調べることができ、他のすべての共鳴の平均効果と強制秤動はゼロであるとみなせるという事実にもかかわらず、図 5.17b の軌道は図 5.17a の解析曲線とよく一致している。しかしながら、共鳴の半値幅が増加するにつれて、この想定がだめになる点にまで達してしまう。図 5.18a は、 $e = 0.15$ で $\alpha = 0.3$ の場合の θ の運動である。この場合、 $p = +1$ と $p = +3/2$ のセパラトリックスの曲線は、 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の付近で重複し、このことは二つの自転軌道状態の秤動が同時に起こるといふ不可能な状態を示している。Chirikov の共鳴重複の基準は、二つの混乱させる半値幅の和が共鳴中心の境界に等しいとき、大きなスケールの無秩序が続く、と述べている (Chirikov 1979)。自転軌道問題では、 $p = +1$ と $p = +3/2$ の二つの強い共鳴の共鳴重複の基準は、

$$\omega_{0(p=+1)} + \omega_{0(p=+3/2)} \geq \frac{n}{2} \quad (5.129)$$

と書け、このとき

$$\alpha \geq \frac{1}{2 + \sqrt{14}e} \quad (5.130)$$

を満たしている (Wisdom 1984)。

Chirikov(1979)でも、エネルギー積分の無秩序な変化によって表現される無秩序なセパトトリックスの半値幅は、

$$\frac{\Delta E_0}{E_0} \approx 4\pi\varepsilon\lambda^3 \exp(-\pi\lambda/2) \quad (5.131)$$

で与えられ、このとき ε は混乱させる項の係数に最も近い、高振動数項の係数の比で、 $\lambda(= \Delta\Omega/\omega_0)$ は共鳴項と、非共鳴項に最も近い、小さな振幅の秤動の振動数 ω_0 の項との振動数の差 $\Delta\Omega$ の比である。同期軌道状態は $p = +3/2$ の項、 $\varepsilon = H(+3/2, e)/H(+1, e) = 7e/2$ そして $\lambda = \Delta\Omega/\omega_0 = n/n\alpha = 1/\alpha$ によって混乱させられる。したがって、

$$\frac{\Delta E_0}{E_0} \approx \frac{14\pi e}{\alpha^3} \exp(-\pi/2\alpha) \quad (5.132)$$

となる (Wisdom 1984)。

無秩序なセパトトリックスは非球面的な要素 α に指数的にはよらないが、離心率 e には線形的による。そしてこの α の増加は、印象的な無秩序帯の幅の増加を引き起こす。 $\Delta E_0/E_0$ の量は、水星や月のように球体に近い形では極小値であるが、ハイペリオンのように不規則な形の場合はおよそ単一のもので、さらにミマスのように規則的な形をしているが重大な永久変形を持つ場合は大きい (表 5.4 参照)。

セパトトリックスに伴う無秩序域は自転速度を増加させ、いくつかの衛星の方向付けを行う役割をもっている (Wisdom1987a,b) 。もし共鳴に永久に捕獲されたなら必ず生じる共鳴遭遇時の総エネルギーの減少は、特定の自転軌道共鳴の遭遇と潮汐減速の仕組みの性質による (5.5 節参照) 。しかしながら、もし秤動一周で生じる潮汐力が無秩序なセパトトリックスの幅よりも大きいような潮汐力によってエネルギーの減少が起こるときのみ共鳴への捕獲は 5.5 節で述べたように生じる。このような場合、無秩序セパトトリックスの幅 $2\Delta E_0$ にとまなうエネルギー変化

$$\delta E_{tides} \sim \pi \langle N_s \rangle \sim \pi \frac{3}{2} \frac{k_2}{Q_s} \frac{n^4}{G} R_s^5 \quad (5.133)$$

を比較することは大切である。

Wisdom(1987a,b) では、太陽系内のすべての小さな不規則な形の衛星、例えば円に近い軌道を持つダイモス ($\alpha = 0.8$ 、 $e = 0.0005$) のようなものは、重大な無秩序域があると示されている。さらに、Wisdom et al.(1984) や Wisdom(1987a,b) による自転軸の方向 (この章では自転軸はいつも惑星の方向に垂直であるとみなす) の安定性の解析は、同期状態での無秩序域は不安定な姿勢であると示されている。衛星が同期状態の無秩序域にある場合、自転軸の軌道に垂直な方向からのわずかなずれは、とても小さなタイムスケールで指数関数的に成長し、衛星は三次元空間を無秩序に転がりまわる。太陽系内の不規則な形のすべての同期回転している衛星は、潮汐減速と同等な期間、無秩序域の外で進化する前は無秩序に転がりまわる。Wisdom(1987a,b) は、転がりの期間を延長した場合のいくつかの地球物理での可能な結果を推測している。その中で特に興味深いのは、転がりまわる状態は通常同期状態よりも、潮汐減速の速度の重大な高まりを必要とするという事実である。このことは、転がりまわる状態の潮汐ゆがみの変化の幅が、通常同期状態の物より

Body	$(B-A)/C$	e	p	$H(p, e)$	ω_0/n	$\Delta E_0/E_0$	$\Delta E_{\text{tides}}/E_0$
Mercury	0.0001	0.2	+3/2	0.64	0.014	10^{-33}	10^{-6}
			+1	0.90	0.016		
			+1/2	-0.10	0.006		
Moon	0.000228	0.055	+3/2	0.19	0.011	10^{-21}	10^{-5}
			+1	0.99	0.026		
			+1/2	-0.03	0.005		
Hyperion	0.26	0.1	+3/2	0.34	0.515	1.1	10^{-9}
			+1	0.97	0.870		
			+1/2	-0.05	0.198		
Mimas	0.06 [†]	0.02	+3/2	0.07	0.112	0.28	10^{-6}
			+1	1.00	0.424		
			+1/2	-0.01	0.042		

図 5.19: ミマスの $(B-A)/C$ の値は、Dermott & thomas(1988) によって与えられている。

もより大きな $1/e$ の因子であり (4.10 節参照)、衛星の潮汐加熱の速度が、離心率が鈍らされるタイムスケールが $1/e^2$ の因子によって鈍らされているあいだに同じ因子によって増加させられる、ということによる。Wisdom(1987a,b) は、ミランダの加熱の無秩序転がりと、ダイモスの軌道離心率の混乱の可能な役について興味深い議論をしている。