

## 4 潮汐，自転と形状

### 4.1 序論

今まではすべての物体を物理的次元を用いずに質点として考えてきた．しかしこれは明らかに実際の物体にはあてはまらないので，太陽系の物体を形作る物質におよぶ万有引力の影響を考えなくてはならない．ある物体において，潮汐 (tide) は他の物体による重力勾配や物体に働く重力の違いの影響によって引き起こされる．例えば，惑星のまわりをまわる衛星によって惑星に起こる潮汐を考えると，惑星の衛星に面している側の面に働く力は衛星から遠い側の面に働く力より大きい．太陽系を形作っている物体は完全な剛体とは言えないので，物体にはゆがみが生じ，潮汐バルジ (tidal bulge) が起こる．

物体における潮汐バルジの大きさはある程度は内部の密度分布によって決められる．よって，潮汐の大きさを測定することで，内部構造を決めることができるのである．このような測定は地球以外の太陽系の惑星では不可能である<sup>1</sup>．しかしながら，惑星の自転によって潮汐と同じように起こる変形ポテンシャルと，自転による変形の測定によって，内部の密度分布を決めることができるのである．これにより，潮汐ポテンシャルに対する惑星の反応を見積もることができる．同期自転する太陽系の衛星は自転による力と，潮汐力の両方の影響で変形しており，その三軸楕円体の形を測定し，内部構造を決定するのである．

潮汐に対する衛星の反応の結果，その系に力学的進化が引き起こされうる．常にある程度摩擦は存在するので，潮汐は散逸的な現象であり惑星において衛星に引き起こされる潮汐によって，衛星の軌道進化がおこり，惑星の自転速度の変化がおこる<sup>2</sup>．衛星が惑星に潮汐を引き起こすのと同じように，惑星も衛星に潮汐を引き起こす．これは衛星の軌道が偏心的なときに特に重要になる．衛星における潮汐散逸の影響は劇的な結果を招くことがある．例としては，木星の衛星イオの激しい潮汐熱があげられる．

---

<sup>1</sup>他の惑星は潮汐が小さい．

<sup>2</sup>地球の自転は少しずつ遅くなり，1日は前日に比べて1億分の2秒ずつ長くなっている．海水の潮汐摩擦がブレーキになるからである．月は反作用で公転運動にエネルギーが与えられ，1カ月に8mm遠ざかる．岩波書店，物理入門コース1「力学」P154，参照．

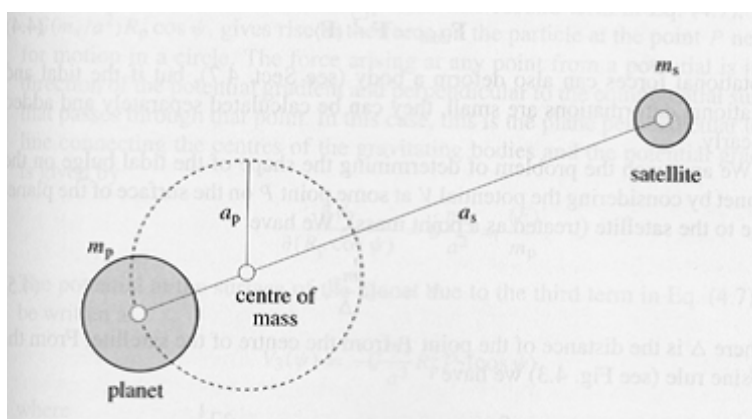


図 4.1: 惑星と衛星はその共通重心を中心に円軌道をとる．重心からとった半長軸はそれぞれ  $a_p, a_s$  であり，衛星軌道の惑星からとった半長軸は  $a = a_p + a_s$  である．

## 4.2 潮汐バルジ

質量  $m_p$  の惑星のまわりをまわる質量  $m_s$  の衛星によって起こる潮汐を考えてみる．物体を質点と考えると，万有引力の法則により，2点間に働く力の大きさ  $\langle F \rangle$  は

$$\langle F \rangle = \mathcal{G} \frac{m_p m_s}{r^2}, \quad (4.1)$$

ここで  $r$  は中心からの距離である．惑星と衛星がその共通の重心のまわりに回転しているとすると（図 4.1），2.7 節で見られたように半長軸と質量の関係は

$$a_s/a_p = m_p/m_s, \quad (4.2)$$

となり，ここで常に  $a = a_p + a_s$  である．惑星の中心点  $P_1$  の軌道は重心  $C_1$  を中心に半径  $a_p$  の円軌道である．ここで自転を無視すると，つまり他の点の動きを無視すると，惑星の中の点  $P_2$  の描く円軌道は同じ半径だが中心点は異なり， $C_1$  と置き換わって  $C_2$  となる．ここで  $P_1$  が  $P_2$  にずれたのと同じぶんだけ， $C_1$  も  $C_2$  にずれる（図 4.2）．つまり，惑星を形作る全ての点は，大きさと方向が等しい遠心力によって運動しているのであり，衛星からの等しい引力  $\mathbf{F}$  によって運動しているのではないのである<sup>3</sup>．共通の遠心力は万有引力  $\langle \mathbf{F} \rangle$  に等しく

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \text{遠心力 (centrifugal force)} \neq \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

となり，惑星を変形させる起潮力  $\mathbf{F}_{\text{tidal}}$  は次のように定義される．

$$\mathbf{F}_{\text{tidal}} = \mathbf{F} - \langle \mathbf{F} \rangle. \quad (4.4)$$

自転による力も物体を変形させるが（4.7 節），潮汐による変形も自転による変形も小さければ，別々に計算できて，線形的に足し合わせることができる．

<sup>3</sup>つまり，各点において  $\mathbf{F}$  はそれぞれ違うということ．

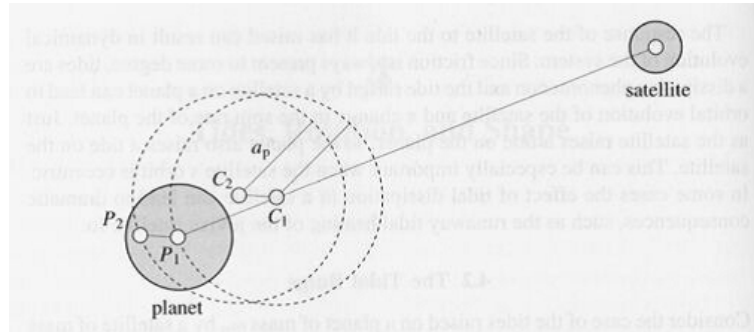


図 4.2: 惑星の全ての点は等しい半径  $a_p$  の円を描くが、中心は異なる。  $P_1, P_2$  はそれぞれ  $C_1, C_2$  を中心とした円を描く。

惑星における潮汐バルジの形を決めるために衛星を持つ惑星の表面の点  $P$  におけるポテンシャル  $V$  について考えてみよう。(衛星は質点として扱う)

$$V = -\mathcal{G} \frac{m_s}{\Delta}, \quad (4.5)$$

ここで、 $\Delta$  は  $P$  と衛星の中心との距離である (図 4.3)。余弦定理より

$$\Delta = a \left[ 1 - 2 \left( \frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

となり、ここで  $\psi$  はふたつの物体の中心を結んだ線からとった角度である。ほとんどの場合  $R_p/a \ll 1$  である。例えば、地球の赤道半径は 6,378 km であり、月軌道の半長軸は 384,400 km である。したがって、式 (4.6) を展開し<sup>4</sup>,

$$V = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a} \left[ 1 + \left( \frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) + \dots \right] \quad (4.7)$$

$$\approx V_1 + V_2 + V_3,$$

となる。ここで高次の項は無視した。

式 (4.7) の第 1 項、 $V_1 = -\mathcal{G}(m_s/a)$ 、は定数であり、 $\mathbf{F}/m_p = -\nabla V$ 、であることから、この項は惑星に何の力も及ぼさない。式 (4.7) の第 2 項、 $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi$ 、は  $P$  点にある粒子に円軌道を描くのに必要な力を与える。ポテンシャルによって生じる力はど

<sup>4</sup>テイラー展開する。  $x = 1 - 2 \left( \frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left( \frac{R_p}{a} \right)^2$  とおいて、

$$V = -\mathcal{G} \frac{m_s}{\Delta} = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a(1+x)^{\frac{1}{2}}} = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a} (1+x)^{(-\frac{1}{2})}$$

$$(1+x)^{(-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \dots$$

$x$  をもとに戻し、高次 (3 次以降) の項を無視すると式 (4.7) が導ける。

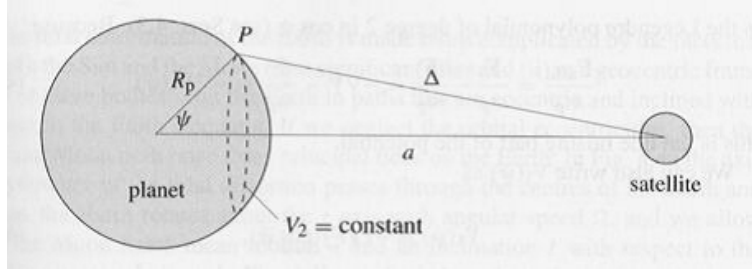


図 4.3: 惑星の半径  $R_p$ , 衛星の半長軸  $a$ , 惑星の表面上の点  $P$  から衛星までの距離  $\Delta$  との関係を示す. 点線は等ポテンシャル面  $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi = \text{constant}$  を示す.

の点においてもポテンシャル勾配の方向に生じ, そしてその点を通る等ポテンシャル面に垂直である. ここでは等ポテンシャル面は水平面であり, 引き合う 2 物体の中心を結ぶ線に垂直であり, ポテンシャル勾配は以下のように与えられる.

$$-\frac{\partial V_2}{\partial(R_p \cos \psi)} = \mathcal{G} \frac{m_s}{a^2} = \frac{\langle F \rangle}{m_p}. \quad (4.8)$$

式 (4.7) の第 3 項による惑星表面のポテンシャルは以下のように書け

$$V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.9)$$

ここで

$$\mathcal{P}_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) \quad (4.10)$$

とは, ルジャンドル多項式の  $n = 2$ ,  $\cos \psi$  のときである (4.3 節参照). ここで

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{tidal}}}{m_p} = \frac{\mathbf{F}}{m_p} - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} = -\nabla V - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} \approx -\nabla V_3(\psi), \quad (4.11)$$

であるので, これは潮汐を引き起こすポテンシャルである. ここで,  $V_3(\psi)$  を

$$V_3(\psi) = \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.12)$$

と書くことができる. ここで

$$\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^3 R_p \quad (4.13)$$

である. また,

$$g = \mathcal{G} \frac{m_p}{R_p^2} \quad (4.14)$$

これは惑星における, 重力加速度, 表面重力である. ここでは,  $\zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$  は惑星表面においてあらゆる  $\psi$  対して, 平衡潮汐 (equilibrium tide) の大きさを表す. ここで  $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  は  $\psi = 0, \pi$  のとき最大であり,  $\psi = \pi/2, 3\pi/2$  のときに最小になることに注目されたい. 地球は 24 時間で 1 回自転するので, このことから月によって地球にほぼ毎日満潮と干潮が 2 回起こることがわかる.

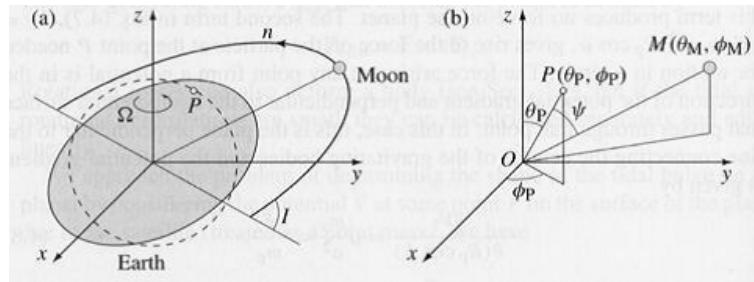


図 4.4: 重力ポテンシャルの  $V_3(\psi)$  によって生じる潮汐変形の形を示した実線の図と、それと比較して点線で示したのは変形のない球の場合の図である。(a) 潮汐変形の対称軸は地球と月の中心を通り、地球は  $z$  軸を軸に角速度  $\Omega$  で自転し、月の平均運動は  $n$  であり、地球の赤道に対する軌道傾斜角は  $I$  である。(b) 月の余緯度と経度は  $(\theta_M, \phi_M)$ 、地球表面上の点  $P$  では  $P(\theta_P, \phi_P)$  である。 $\phi_P, \phi_M$  は空間において固定された方向からとられており、地球と共にまわっている方向からとっているわけではないということに注意されたい。

地球の潮汐変形は実際は以下の理由でもっと複雑である。( ) 太陽と月、両方によって潮汐が起こる、( ) 地球を中心に考えると、太陽も月も偏心的で、地球の赤道に対して傾いた軌道をとってまわっている。もし軌道の離心率を無視して考えると、太陽と月はそれぞれ三つの大きな潮汐を地球にもたらす。図 4.4a において、潮汐変形の対称軸は地球と月の中心を通り、地球は  $z$  軸を軸に角速度  $\Omega$  で自転しており、月は平均運動  $n$  をもち、地球の赤道に対する軌道傾斜角は  $I$  である。図 4.4b において、月の余緯度と経度は  $(\theta_M, \phi_M)$ 、地球表面上の点  $P$  では  $P(\theta_P, \phi_P)$  である。 $\phi_P, \phi_M$  は空間において固定された方向からとられており、地球と共にまわっている方向からとっているわけではないということに注意されたい。

余弦定理から、ベクトル  $OP$  と  $OM$  の角度  $\psi$  は<sup>5</sup>

$$\cos \psi = \cos \theta_P \cos \theta_M + \sin \theta_P \sin \theta_M \cos(\phi_P - \phi_M). \quad (4.15)$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_P - 1) \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_M - 1) \\ &\quad + \frac{3}{4} \sin^2 \theta_P \sin^2 \theta_M \cos 2(\phi_P - \phi_M) \\ &\quad + \frac{3}{4} \sin 2\theta_P \sin 2\theta_M \cos(\phi_P - \phi_M). \end{aligned} \quad (4.16)$$

地球上に固定された点における緯度  $\theta_P$  が与えられ、 $P$  点での潮汐の大きさは  $\phi_P, \theta_M, \phi_M$  によって異なる。式 (4.16) における第 1 項の変化は、 $\cos^2 \theta_M = (1/2)(1 + \cos 2\theta_M)$  の時間による変化によって決まる。したがって、この項は  $2n$  の振動によって変化し、半月周潮 (fortnightly tide) を起こす。第 2 項は  $2(\Omega - n) \approx 2\Omega$  の振動によって変化し、半日

<sup>5</sup> 位置ベクトルを成分表示し、内積の関係から導く。 $|OM| |OP| \cos \psi = x_P x_M + y_P y_M + z_P z_M$

周潮 (semidiurnal tide) を起こす．第 3 項は， $(\Omega - n) \approx \Omega$  の振動によって変化し，日周潮 (diurnal tide) を起こす．第 3 項は  $\sin 2\theta_M$  を含むため，日周潮は隔週で強い抑揚がある．その他の潮汐に関する項は月の軌道離心率に関係している．

太陽による半年周潮，半日周潮，日周潮に対応して，振動  $2n_{\text{Sun}}$ ， $2(\Omega - n_{\text{Sun}}) \approx 2\Omega$ ， $(\Omega - n_{\text{Sun}}) \approx \Omega$  がある．ここで， $n_{\text{Sun}}$  は太陽の（地球の）平均運動である．式 (4.13) より，太陽と月の潮汐の大きさの比率はどんな場合でも

$$\frac{m_{\text{Sun}}}{m_{\text{Moon}}} \left( \frac{a_{\text{Moon}}}{a_{\text{Sun}}} \right)^3 \approx 0.46. \quad (4.17)$$

となる．月によって地球に起こる潮汐は  $\zeta = 0.36 \text{ m}$ ，一方太陽によって起こる潮汐は  $\zeta = 0.16 \text{ m}$  である

### 4.3 ポテンシャル理論

潮汐と自転による変形の計算を進める前に、ポテンシャル理論に由来するいくつかの結果を述べておこう。密度  $\gamma$ 、半径  $C$  の均質な球状の物体の重力ポテンシャルを考えると、半径  $r$ 、厚さ  $\delta r$ 、質量  $\delta m$ 、である薄い球殻の内側のポテンシャルと外側のポテンシャルを考えればよい (Ramsey 1940)。球殻の外側のある点におけるポテンシャルは、中心からの距離が  $r'$  とすると

$$V_{\text{ext}}(r') = -\frac{\mathcal{G}\delta m}{r'} \quad (4.18)$$

となり、これは球殻の中心に全ての質量が集まったと考えたときと同じである。よって均一な球の表面の外側のポテンシャルは以下のように与えられる。

$$V_{\text{ext}}(C) = -\frac{\mathcal{G}\sum\delta m}{C} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\mathcal{G}C^2. \quad (4.19)$$

重力は逆二乗の法則<sup>6</sup>(inverse square law) によって記述されるので、球殻の内側の点に働く力はゼロである。したがって、球殻の内側の重力ポテンシャルは一定であり、内部のどの点においてポテンシャルを計算しても決めることができる。球殻の中心におけるポテンシャルを計算すると

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{\mathcal{G}\sum\delta m}{r} = -4\pi\gamma\mathcal{G}r\delta r. \quad (4.20)$$

外半径  $C$ 、内半径  $r$  の均一な球殻の内側のポテンシャルは以下のように与えられる。

$$V_{\text{int}}(C, r) = -4\pi\gamma\mathcal{G}\int_r^C r dr = -2\pi\gamma\mathcal{G}(C^2 - r^2). \quad (4.21)$$

したがって、均質な球状の物体における中心からの距離が  $r$  の点での内側 ( $r < C$ ) のポテンシャル、外側 ( $r > C$ ) のポテンシャルは以下ようになる。

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\mathcal{G}r^2 - 2\pi\gamma\mathcal{G}(C^2 - r^2) = -\frac{2}{3}\pi\gamma\mathcal{G}(3C^2 - r^2), \quad (4.22)$$

$$V_{\text{ext}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\mathcal{G}\frac{C^3}{r}. \quad (4.23)$$

変形した物体の内側のポテンシャル、外側のポテンシャルは球関数によって説明できる。ポテンシャル理論におけるこれらの関数を用いた以下の議論は、Ramsey(1940), MacRobert(1967), Bullen(1975), and Blakely(1995) に基づいている。

空間における重力ポテンシャル  $V$  は以下のラプラス方程式を満たす。

$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.24)$$

以下のオイラーの方程式(Euler's equation) を満たすならば、 $V$  は  $n$  次同次式(homogeneous of degree  $n$ ) である。

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = nV. \quad (4.25)$$

<sup>6</sup>2つの物体に働く力がその2つの物体を結ぶ直線の方にあり、大きさが距離の2乗に反比例するという法則。

ラプラス方程式を満たす同次の関数を，球調和関数<sup>7</sup>(spherical solid harmonics)ともいう．球座標で表すとき，これらは重要な関係を持ち，3つの関数にわけることができ，それぞれ  $r, \theta, \phi$  の3つの変数のうち1つによって変化する．(球関数については，Blakely(1995)が詳しい．)

極球座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いると， $r$  は重心からの動径方向の距離であり， $\theta$  は極軸からとった余緯度であり， $\phi$  は任意の固定した方向からとった経度である．ラプラス方程式は以下のようになり

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0, \quad (4.26)$$

ここで  $\mu = \cos \theta$  である．ラプラス方程式は  $V = r^n S_n(\mu, \phi)$  と置いて式(4.26)に入れることによって解け，ここで  $S_n(\mu, \phi)$  は  $r$  によらない．このことから

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = n(n+1)r^n S_n, \quad (4.27)$$

となり，式(4.26)は

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial S_n}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)S_n = 0. \quad (4.28)$$

これをルジャンドル方程式(Legendre's equation)と言い，この方程式を満たす  $S_n$  は球面調和関数(spherical surface harmonic)と呼ばれる関数である． $n$  を  $-(n+1)$  と書いたとき， $n(n+1)$  が変わらず残っているので，ラプラス方程式の一般解は以下のように書ける．

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) S_n(\mu, \phi). \quad (4.29)$$

この方程式の各項はそれぞれ  $n$  次と  $n+1$  次の体球関数(solid harmonic)と呼ばれる (Ramsey 1940)

この章で述べている変形は，潮汐によっても自転によっても軸対称であり，ルジャンドル方程式は

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu} + n(n+1)\mathcal{P}_n(\mu) = 0, \quad (4.30)$$

ここでルジャンドル多項式  $\mathcal{P}_n(\mu)$  は，

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \left[ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} + \cdots \right] \quad (4.31)$$

<sup>7</sup>調和関数は，例えば三角関数のように，微分したらもとに戻るような関数．



または，ロドリゲスの公式 (Rodrigues's formula)

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n} \quad (4.32)$$

によって与えられる．余緯度  $\theta$  は変形の対称軸から測られている．ルジャンドル多項式は帯球関数(zonal harmonics) であり，最初の 5 項は以下のように与えられる．

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{P}_1(\mu) = \mu = \cos \theta, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \quad (4.35)$$

$$\mathcal{P}_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta), \quad (4.36)$$

$$\mathcal{P}_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9). \quad (4.37)$$

球面調和関数 (surface harmonics) は直交関数であり，球の表面でそれらの種の二重積分は，以下のような有用な性質を持つ．単位球 ( $r = 1$ ) の面積要素は  $\sin \theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$ ．ここで  $Y_m(\mu, \phi)$ ,  $S_n(\mu, \phi)$  を，それぞれ  $m$  次， $n$  次の球面調和関数だとすると ( $m \neq n$ )

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_m(\mu, \phi) S_n(\mu, \phi) d\mu d\phi = 0. \quad (4.38)$$

ここで 2 つの球面調和関数において両方  $n$  次で，そして 1 つが帯球関数  $\mathcal{P}_n(\mu)$  のとき，

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\mu, \phi) \mathcal{P}_n(\mu) d\mu d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(1), \quad (4.39)$$

となり， $S_n(1)$  は  $\mathcal{P}_n(\mu)$  の極での  $S_n(\mu, \phi)$  の値である．

単位球における 2 つの点について考えてみる．変化する点  $(\theta', \phi')$  固定された点  $(\theta, \phi)$  の 2 点である．球の中心でこれらの点に挟まれた角を  $\psi$  とし，積分を考えると

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\theta', \phi') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi'. \quad (4.40)$$

変化する点の座標軸を動かす，変化する余緯度を定める新しい軸が固定点  $(\theta, \phi)$  を通るようにとり，変化する点の新しい角座標を  $(\Theta', \Phi')$ ，ここで  $\Theta' = \psi$  とする．同様に  $S_n(\theta', \phi')$  を  $Y_n(\Theta', \Phi')$  とする．ここで式 (4.39) より

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_n(\Theta', \Phi') \mathcal{P}_n(\cos \Theta') d(\cos \Theta') d\Phi' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(1). \quad (4.41)$$

しかしながら，

$$Y_n(1) = S_n(\theta, \phi). \quad (4.42)$$

このことから

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\mu', \phi') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi' = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(\mu, \phi) \quad (4.43)$$

ここで,  $S_n(\mu, \phi)$  は  $(\mu, \phi)$  について,  $S_n(\mu', \phi')$  は  $(\mu', \phi')$  について同じ形をした関数である (MacRobert 1967) .

固定された点  $P$  での, 均質で球に近い形状をした物体によるポテンシャルについて考える . この物体の表面は以下のように定義され

$$R(\theta') = C \left[ 1 + \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta') \right], \quad (4.44)$$

ここで  $\epsilon_2 (\ll 1)$  は定数であり,  $C$  は平均の半径を表す .  $P$  点は内部 ( $r < C$ ), 外部 ( $r > C$ ) どちらにでもとれ, 球座標は  $(r, \mu, \phi)$  であり,  $\mu = \cos \theta$ , 余緯度  $\theta$  は潮汐バルジの対称軸からとったものである (図 4.5) .  $P$  点での重力ポテンシャルは 2 つの部分に分けることができる . 1 つは球状の物体によるもので, 式 (4.22) と式 (4.23) によって与えられる . もうひとつは主なものではないが, 変形した物体と理想的な球体との間のわずかな物質の移動によるものである . ある点  $P'(r', \mu', \phi')$  において, 物質の薄い層の厚さは  $\epsilon_2 C \mathcal{P}_2(\mu')$  であり, 体積要素は  $\epsilon_2 C^3 \mathcal{P}_2(\mu') d\mu' d\phi'$  である .  $P$  点での質量要素によるポテンシャルは距離  $PP' = \Delta$  によって決まり, ここで

$$\frac{1}{\Delta} = \left( C^2 + r^2 - 2Cr \cos \psi \right)^{-1/2}. \quad (4.45)$$

である .  $r < C$  ならば

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \left[ 1 + \left( \frac{r}{C} \right)^2 - 2\mu \left( \frac{r}{C} \right) \right]^{-1/2}, \quad (4.46)$$

テイラー展開し  $r/C$  の次数で昇べきの順に項を並べると

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \left[ 1 + \left( \frac{r}{C} \right) \mu + \left( \frac{r}{C} \right)^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \mu^2 \right) + \left( \frac{r}{C} \right)^3 \left( -\frac{3}{2} \mu + \frac{5}{2} \mu^3 \right) + \dots \right], \quad (4.47)$$

式 (4.34) から式 (4.37) をよく見てみると, 式 (4.47) は以下のように書け

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{C} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\epsilon_2). \quad (4.48)$$

したがって,  $P$  点における総ポテンシャルへの非中心のポテンシャルの大きさは

$$V_{\text{nc,int}} = -\gamma \mathcal{G} C^2 \epsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{C} \right)^2 \int \int \mathcal{P}_2(\mu') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi'. \quad (4.49)$$

式 (4.43) より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{C} \right)^n \int \int \mathcal{P}_2(\mu') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi' = \frac{4\pi}{5} \left( \frac{r}{C} \right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (4.50)$$

したがって, 内部において  $P$  点における総ポテンシャルへの非中心のポテンシャルの大きさは

$$V_{\text{nc,int}} = -\frac{4\pi}{5} \gamma \mathcal{G} r^2 \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta), \quad (4.51)$$

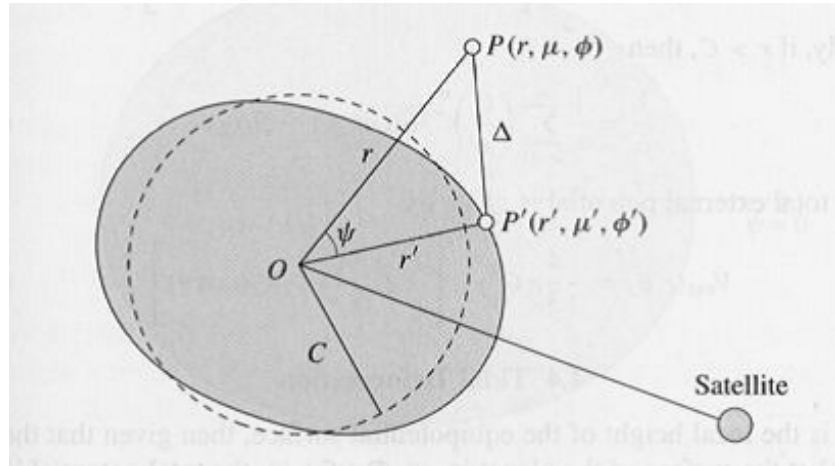


図 4.5: 点  $P$  においての, 平均半径  $C$  の球体から生じた, 変形した惑星によるポテンシャルと, 潮汐バルジによる物質の移動.

そして,  $P$  点における内部の総ポテンシャルはこの項と式 (4.22) によって得られる結果の和であり,

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = -\frac{4}{3}\pi C^3 \gamma \mathcal{G} \left[ \frac{3C^2 - r^2}{2C^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{C^3} \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \right]. \quad (4.52)$$

同様に, ( $r > C$ ) ならば

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{C}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\epsilon_2) \quad (4.53)$$

であり, 外部の総ポテンシャルは

$$V_{\text{ext}}(r, \theta) = -\frac{4}{3}\pi C^3 \gamma \mathcal{G} \left[ \frac{1}{r} + \frac{3}{5} \frac{C^2}{r^3} \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \right]. \quad (4.54)$$

#### 4.4 潮汐変形

$h(\psi)$  を等ポテンシャル面の局所的な高さ (local height) とし, 惑星表面の潮汐ポテンシャルが  $-\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi)$  で与えられたとき, 総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \psi) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{B} + gh(\psi) - \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.55)$$

ここで  $B$  は惑星の平均半径である. これは惑星表面上では  $\psi$  によらず, したがって,  $h(\psi) = \zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$  であり,  $\psi$  は潮汐バルジの対称軸からとった. 平衡潮汐は堅く変形しない球状の惑星を覆う, 密度ゼロの浅い海の形を決める. もちろん, 実際は密度がゼロの流体も無いし, 曲がらない固体も無い. 我々は実際の固体物質, 流体物質の潮汐変形を理解する必要がある.

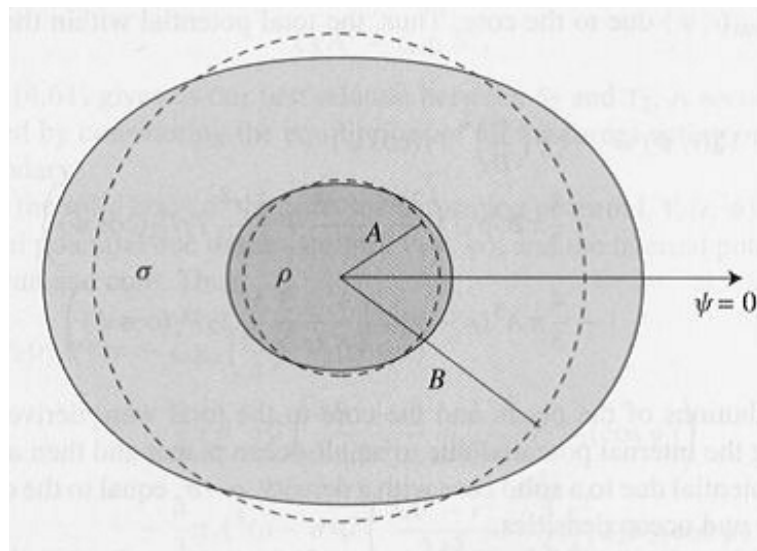


図 4.6: 平均半径  $A$ , 密度  $\rho$  の変形した核と, それを覆う平均半径  $B$ , 密度  $\sigma$  の変形した海をを持つ惑星のモデル. 半径  $A, B$  の円は点線で表されている.

関連する要素を挙げるために、単純な場合を考えてみると、2つの部分から成る平均半径が  $B$  の惑星を考える．この惑星は均質で非圧縮な密度  $\sigma$  の流体の海と、均質で非圧縮な平均半径  $A$ 、密度  $\rho$ 、剛性が  $\mu$  の固体の核から成る (Street 1925, Dermott 1979a, 図 4.6)．剛性  $\mu$  とは弾性のある物体を変形させるのに必要な力の大きさである．

平衡潮汐は2次の面調和関数 (second-order surface harmonic) であり、完全な剛体で、海が無く、遠くに1つ衛星が回っているような球状の惑星の近くに存在するであろう等ポテンシャル面を決める．惑星が完全な剛体でなく、海を持っているとしたら、海面と平衡潮汐が一致することはないだろう．これは海流の運動エネルギーによる効果さえも無視した場合である．衛星の重力場に対する海や核の反応を計算するために、潮汐バルジそのものによる重力場 (self gravitation) の効果と、固体内部の弾性力の効果を考えなくてはならない．核と海の両方で起こる全ての力の振る舞いのもとでの、核の弾性変形も考えなくてはならない．それはつまり、惑星の様々な部分に生じる潮汐の効果を考えるということで、変形した核のポテンシャルと、海の潮汐そのものを考えるということである (Street 1925)．

潮汐が引き起こすポテンシャルは2次の球調和関数なので、惑星の変形は同じ2次の調和関数によって記述されねばならない (Love 1911)．そうでないと、例えば海面が等ポテンシャル面にならなくなってしまう．4.2節ですで見られたように、潮汐ポテンシャルは角度  $\psi$  にのみ依存し、これは2つの中心点を結んだ線について軸対称であることを意味する．したがって、核の境界線 (core boundary) と海面 (ocean surface) の変形した形は以下のように表せて

$$R_{cb}(\psi) = A[1 + S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)] \quad (4.56)$$

$$R_{os}(\psi) = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)] \quad (4.57)$$

ここでそれぞれ、 $S_2, T_2$  は定数である． $S_2$  と  $T_2$  決めるのに (i) 静的な海の表面は等ポテンシャル面であるということ (ii) 平均的な核の境界に生じる全ての力の平衡を考えること、を用いる．

海の中のポテンシャル  $V_o(r, \psi)$  は三つのポテンシャルの足し合わせであり、(i) ひとつめは衛星による潮汐ポテンシャル

$$V_3(r, \psi) = -\frac{\mathcal{G}m_s}{a^3} r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) = -\zeta g \left(\frac{r}{B}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.58)$$

これは式 (4.9)<sup>8</sup> と式 (4.12)<sup>9</sup> を一般化したものであり、(ii) ふたつめは海による  $V_{int}(r, \psi)$ 、(iii) みっつめは核による  $V_{ext}(r, \psi)$  である．よって、海の内部の総ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_o(r, \psi) = & -\zeta g \left(\frac{r}{B}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \\ & -\frac{4}{3} \pi B^3 \sigma \mathcal{G} \left( \frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{B^3} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \\ & -\frac{4}{3} \pi A^3 (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{5} \frac{A^2}{r^3} S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

<sup>8</sup>式 (4.9) :  $V_3(\psi) = -\frac{\mathcal{G}m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

<sup>9</sup>式 (4.12) :  $V_3(\psi) = -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

総ポテンシャルへの海と核の寄与は，海に覆われた惑星による内側のポテンシャルを計算することと，密度  $\rho - \sigma$  (核と海の密度の違いと等しい) の固体の核による外側のポテンシャルを加えることによって得られる．

海面のポテンシャル  $V_{os}(r, \psi)$  を計算するために，表面の式を  $r = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)]$  として式 (4.59) に入れ，その結果を展開し， $\zeta/B$ ， $S_2$ ， $T_2$  の 2 次以上の項を無視すると<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} V_{os}(r, \psi) = & -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) - \frac{4}{3} \pi B^2 \sigma \mathcal{G} \left( 1 - \frac{2}{5} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \\ & - \frac{4}{3} \pi \frac{A^3}{B} (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left( 1 - T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) + \frac{3}{5} \left( \frac{A}{B} \right)^2 S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

この式の  $\psi$  によらない項は，圧縮力だけを引き起こす．核と海を非圧縮としたから，これらの項は惑星の形を決めるのに何の影響も及ぼさないので，無視できる．海面が等ポテンシャル面なので， $\psi$  に依存する項の足し合わせはゼロになる．したがって<sup>11</sup>

$$\frac{\zeta_c}{A} = \left[ \frac{2\sigma}{5\rho} + \left( \frac{A}{B} \right)^3 \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \right] T_2 - \frac{3}{5} \left( \frac{A}{B} \right)^5 \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) S_2. \quad (4.61)$$

ここで

$$\zeta_c = \frac{m_s}{m_c} \left( \frac{A}{a} \right)^3 A, \quad (4.62)$$

であり， $m_c$  は核の質量，そして

$$g_c = \frac{\mathcal{G} m_c}{A^2} \quad (4.63)$$

これは核の境界での重力である． $\zeta_c$  は海が動いたときに核の境界に生じる“平衡潮汐”の大きさであり，式 (4.13)<sup>12</sup> の  $\zeta$  と以下のような関係を持つ

$$\zeta g A^2 = \zeta_c g_c B^2. \quad (4.64)$$

式 (4.61) は  $S_2$  と  $T_2$  の間にある 1 つ目の関係を与える．2 つ目の関係は平均の核の境界に働く全ての力の平衡を考えることにより得られる．

固体である核の内部では，変形ポテンシャル  $V_c(r, \psi)$  は衛星による潮汐ポテンシャル  $V_3(r, \psi)$  と，核と海による内部ポテンシャルの和である．よって

$$\begin{aligned} V_c(r, \psi) = & -\zeta_c g_c \left( \frac{r}{A} \right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \\ & - \frac{4}{3} \pi B^3 \sigma \mathcal{G} \left( \frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{B^3} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \\ & - \frac{4}{3} \pi A^3 (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left( \frac{3A^2 - r^2}{2A^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{A^3} S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

<sup>10</sup> テキストの第 2 項は誤植  $-\frac{4}{3} \pi B^2 \sigma \mathcal{G} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{5} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right)$

<sup>11</sup> ポテンシャル  $\frac{\mathcal{G} m_p}{B} = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} \rho B^2$  で割って，無次元の量で整理．

<sup>12</sup> 式 (4.13) :  $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$

惑星の中心と同じ中心を持つ核の中の球体を考える． $r$  は変化しないので，有効な変形ポテンシャルは  $V_c(r, \psi)$  の中の  $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  だけに依存する項によって与えられる．その他の項は圧縮力を引き起こす項なので無視できる．したがって有効な変形ポテンシャルは以下のように書け

$$V_c(r, \psi) = -Zr^2\mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.66)$$

ここで，

$$Z = \frac{g_c}{A} \left( \frac{\zeta_c}{A} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) + \frac{3}{5} S_2 \right). \quad (4.67)$$

Chree(1896a)によると，このような変形ポテンシャルによる力のもとでの核の歪み (yielding) は，平均の核の境界  $r = A$  で単位面積に働く，大きさ  $\rho Z A^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$  の外向きの垂直の力によって起こる歪みと同じである．

他の圧力もこの境界で働く．それらは，海の静水圧と固体核の潮汐による荷重項から生じるものである．例えば， $(B - A) \ll B$  であるような浅い海では，海の中で  $g$  の変化が無く，これらの圧力が生じる原因は (i)  $\psi$  による海の深さの変化，(ii)  $\psi$  による惑星の中心からの核の境界までの距離の変化，の2つである．これらの圧力は，重力加速度と密度と潮汐の高さの積によって得られ以下のように書け，

$$P_o(\psi) = g\sigma B(T_2 - S_2)\mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.68)$$

$$P_c(\psi) = g_c\rho A S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi). \quad (4.69)$$

深い海では  $g$  は一定でなく，そして核の中の潮汐による荷重項はそのまま変わらず残っているが，核における静水圧の角変化は，もはや海の潮汐の高さのみによっては決められない．海の中での重力加速度の角変化も利用せねばならない．

一般に深い海では海による核の境界での圧力は以下のように与えられ<sup>13</sup>，

$$P_o(\psi) = \int_{R_{cb}}^{R_{os}} \sigma(r) \frac{\partial V_o(r, \psi)}{\partial r} dr, \quad (4.70)$$

ここで，核の境界から海面まで積分した．今のモデルでの海は非圧縮で密度が一定なので，

$$P_o(\psi) = \sigma[V_o(R_{os}, \psi) - V_o(R_{cb}, \psi)]. \quad (4.71)$$

さらに，ポテンシャルの変化する部分だけが変形を起こす力（ここでは圧縮を考えない）に寄与するのであり，そして海面は等ポテンシャル面なので， $V_o(R_{os}, \psi)$  は一定であり，無視できる．

核の境界でのポテンシャル  $V_{cb}(\psi)$  は，核の境界での式  $R_{cb} = A[1 + S_2\mathcal{P}_2(\cos \psi)]$  を式 (4.59) か式 (4.65) に入れることで得られ，結果を展開し  $\zeta/B$ ， $S_2$ ， $T_2$  の2次以上の項を無視すると

$$V_{cb}(\psi) = constant - Ag_c \left( \frac{\zeta_c}{A} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) - \frac{2}{5} S_2 \right) \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.72)$$

<sup>13</sup> 静水圧平衡の式の積分形．微分形は  $\frac{dP}{dr} = -\rho g$  ．

ここで  $\psi$  は第 2 項, 式の右手側にある方に依存しており, これは核の境界の圧力の変化する部分  $P_o(\psi)_\psi$  に寄与する. したがって

$$P_o(\psi)_\psi = \sigma Ag_c \left( \frac{\zeta_c}{A} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) - \frac{2}{5} S_2 \right) \mathcal{P}_2(\cos \psi). \quad (4.73)$$

平均の核の境界における単位面積に生じる有効な外向きの垂直な力の合計は, 核内の弾性力と海と核の潮汐による荷重項の和である. これを  $X\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  と書き, ここで<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} X &= \rho A^2 Z - P_o(\psi)_\psi - \rho g_c A S_2 \\ &= \frac{2}{5} \rho g_c A \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \left( \frac{5}{2} \frac{\zeta_c}{A} - S_2 + \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

$\sigma \rightarrow \rho$  となると,  $X \rightarrow 0$  となり, 海が静水圧平衡となっている場合はこれは必ず実現する.

Love(1944) によると, この変形圧力による固体核の半径の変化は

$$\Delta R(\psi) = \frac{5}{19} \frac{A}{\mu} X \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (4.75)$$

これは  $AS_2\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  と等しくなっている. これにより  $S_2$  と  $T_2$  の 2 つ目の関係がわかり,

$$S_2 = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \left( \frac{5}{2} \frac{\zeta_c}{A} - S_2 + \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) \right) \quad (4.76)$$

ここで  $\tilde{\mu}$  は固体核の有効剛性(effective rigidity) であり, 無次元の量で以下のように定義される

$$\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g_c A}. \quad (4.77)$$

これは核の境界における弾性力と重力の比である.

$\tilde{\mu} \ll 1$  ならば, 核は流体として振る舞い, 一方  $\tilde{\mu} \gg 1$  では核内での弾性力が優位である.  $\sigma = \rho$  ならば  $S_2 = 0$  で, 弾性核は変形しない. 惑星に海がなかったら,  $\sigma = 0$  であり, 式 (4.76) から孤立した核での潮汐の大きさは

$$AS_2 = \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}}. \quad (4.78)$$

一般に以下のように書け

$$AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}} \quad \text{and} \quad BT_2 = H \frac{5}{2} \zeta, \quad (4.79)$$

ここで  $F$  は無次元の量で, 核の潮汐の大きさにおける海の影響の大きさであり,  $H$  は惑星の外形における内部構造の影響の大きさである. 式 (4.61) と式 (4.76) から  $T_2$  を削除すると,

$$F = \frac{(1 + \tilde{\mu})(1 - \sigma/\rho)(1 + 3/2\alpha)}{1 + \tilde{\mu} - \sigma/\rho + (3\sigma/2\rho)(1 - \sigma/\rho) - (9/4\alpha)(A/B)^5(1 - \sigma/\rho)^2} \quad (4.80)$$

<sup>14</sup>第 1 項  $\rho A^2 Z$  は, Chree(1896a) による関係より, 変形ポテンシャルよる力を弾性力として考えた.



$$H = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left( \frac{1 + \tilde{\mu} + (3/2)(A/B)^2 F \delta}{(1 + \tilde{\mu})(\delta + 2\sigma/5\rho)} \right) \quad (4.81)$$

ここで

$$\alpha = 1 + \frac{5\rho}{2\sigma} \left( \frac{A}{B} \right)^3 \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \quad \text{and} \quad \delta = \left( \frac{A}{B} \right)^3 \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \quad (4.82)$$

また  $\langle\rho\rangle$  は平均密度である。惑星が完全に流体なら、もしくは熱による流動によって固体核が静水圧平衡になると（衛星の自転速度が軌道の平均運動と等しい、つまり同期(synchronous)の衛星における潮汐バルジへの応用がある）、 $\tilde{\mu} = 0$  であり、 $H$  の静水値は<sup>15</sup>

$$H_h = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left( \frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right), \quad (4.83)$$

ここで

$$\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho} \quad (4.84)$$

(Dermott 1979a) .

これらの結果を用いて、浅く均一な海を持つ惑星における潮汐の大きさを決める。 $A = B$ 、 $\zeta_c = \zeta$ 、 $\langle\rho\rangle = \rho$  ならば、海面は等ポテンシャル面になり、式(4.61)は

$$\frac{\zeta}{A} = \frac{2}{5} S_2 + \left( 1 - \frac{3\sigma}{5\rho} \right) (T_2 - S_2). \quad (4.85)$$

式(4.61) と式(4.76) から  $S_2$  のみを含む項を削除すると

$$A(T_2 - S_2) = \frac{\zeta \tilde{\mu}}{1 - \sigma/\rho + \tilde{\mu}(1 - 3\sigma/5\rho)} \quad (4.86)$$

これは海の潮汐の大きさである (Chree 1896b) .  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$  とすると  $A(T_2 - S_2) \rightarrow 0$  である。さらに、 $\sigma = \rho$  ならば

$$A(T_2 - S_2) = \frac{5}{2} \zeta \quad (4.87)$$

であり、 $\tilde{\mu}$  に依存しない。したがって、核と海が同じ密度を持つとき、核は変形せず、海の潮汐の大きさは式(4.13)<sup>16</sup>で与えられる“平衡”潮汐よりも  $5/2$  倍大きい。

浅い海の場合、固体潮汐の大きさは式(4.86)の  $T_2 - S_2$  を式(4.61)に入れることによりわかる。このことにより

$$AS_2 = \frac{5}{2} \zeta \left[ \frac{(1 - \sigma/\rho)}{1 - \sigma/\rho + \tilde{\mu}(1 - 3\sigma/5\rho)} \right]. \quad (4.88)$$

海の無い惑星では、 $\sigma = 0$  となり

$$AS_2 = \frac{(5/2)\zeta}{1 + \tilde{\mu}}, \quad (4.89)$$

<sup>15</sup>テキスト  $\frac{2\langle\rho\rangle}{5\sigma}$  は誤植

<sup>16</sup>式(4.13) :  $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$

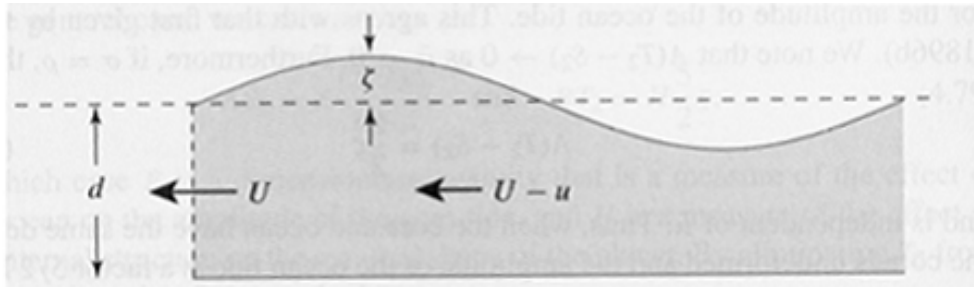


図 4.7: 均一で深さが  $d$  で 2 本の平行な緯度線に仕切られた赤道の運河での津波 (tidal wave) の図．地球を中心に，月と共に自転している基準の座標においては，潮汐バルジは変動しない．固体地球に対するバルジの速度は  $U$  である．しかしながら，潮汐バルジにある流体は，海の深さについて均一な速度  $u$  の波によって与えられる．

これは Lord Kelvin (Thompson 1863) による．Kelvin はこの結果を  $AS_2 \approx 0.6 \zeta$  の半月周潮の場合に適用し，地球の剛性は  $\sim 1.2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$  であり，未圧縮の鋼より  $\sim 50\%$  大きな剛性をもつことがわかった．当時は地球の中はどろどろに融けていると思われていたので (Bullen 1975)，この結果は驚きであった．

地球の場合，より現実的には，密度  $\rho$  で剛性が  $\mu$  の固体核を持ち，密度  $\sigma$  の浅い海で覆われている考えられている．この場合，海の中と固体核の潮汐の大きさは式 (4.86) と式 (4.88) によって得られる．しかしながら，これらの大きさは，海は静水圧平衡であるとして計算しており，海での潮流は海面の形を決めるのに関係ないとしている．地球では，これは良い想定とは言えない．

海流の影響は海盆 (ocean basin) の自由振動周波数に依存し，これは海盆の大きさ，形，深さ，によって決まる．具体的に考えるために，Proudman(1953) によると，均一で深さが  $d$  で 2 本の平行な緯度線に仕切られた赤道の運河を考える．地球を中心に，月の平均運動と共に自転している基準の座標においては，潮汐バルジは変動しない．したがって地球表面に対するバルジの速度は  $U = 2\pi A/T_E \approx 500 \text{ m s}^{-1}$  ここで  $T_E$  は地球の自転周期である．しかしながら  $U$  は海での潮流の速度ではない．潮汐バルジにある流体は海の深さについて均一に速度  $u$  で流れる (図 4.7)．与えられた緯度で， $\zeta$  が平均海面の上の高さを表しているならば，連続の方程式から

$$(U - u)(d + \zeta) = Ud. \quad (4.90)$$

$\zeta \ll d$  ならば

$$u = \frac{\zeta}{d}U. \quad (4.91)$$

地球の海の深さの平均は  $\sim 4 \text{ km}$  であり， $u \sim 0.1 \text{ m s}^{-1}$  である．ベルヌーイの定理より，静水圧による仕事を，流線に沿った流れでの流体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーと関連づけて

$$\frac{1}{2}(U - u)^2 + g\zeta + \Psi = \text{constant}, \quad (4.92)$$

ここで  $\Psi$  は潮汐ポテンシャルである．運河の表面で  $\Psi = -g\bar{\zeta}$  とすると， $U^2$  は一定で， $u^2 \ll uU$  であり

$$Uu = g(\zeta - \bar{\zeta}). \quad (4.93)$$

式 (4.91) から  $u$  を置き換えると

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{1 - U^2/gd}. \quad (4.94)$$

深さ  $d_{\text{res}} = U^2/g \approx 22$  km の赤道の運河で地球に対して共鳴が起こり，海の深さの平均は  $d_{\text{res}}$  より小さいので，潮汐はひっくり返る．この考え方は地球には完全にはあてはめられず，なぜならほぼ全球を覆う海 (near global ocean) のため，総潮汐ポテンシャルが潮流から分かれていると考えることができないからである．しかしながら式 (4.94) よって，地球の海の形を計算するとき，海流による影響を含め，様々な海盆の共鳴の可能性を考えなくてはならないということがわかる．

## 4.5 自転変形

4.4 節では、惑星のまわりをまわる衛星によって起こる潮汐により、惑星表面がどのように変形するかを見てきた。核とマントルによって成る惑星を考えることで、それぞれの変形についての式が得られる。最も重要なことは、変形した惑星の形 (図 4.6) は惑星と衛星を結ぶ線に沿った半長軸  $a$ 、対称軸 (惑星と衛星を結ぶ線) と垂直に交わる円を描く半短軸  $b = c$  の偏心回転楕円体によって見積もられる、ということである。回転楕円体は、対称軸からとった角度  $\psi$  の 2 次のルジャンドル多項式  $P_2(\cos \psi)$  を用いて形作られる。この節では、潮汐変形によって導かれた解析結果の多くが、自転変形に直接適用できるということを見ていく。

角速度  $\Omega$  で自転する剛体の惑星の回転楕円体を考えてみよう (図 4.8)。表面上の点  $P$  は遠心加速度  $\mathbf{a}_{cf,x} = \Omega^2 r \sin \theta \hat{x}$  を受けており  $x = r \sin \theta$  なので、 $\mathbf{a}_{cf,x} = \Omega^2 x \hat{x}$ 。対称による  $y - z$  平面上の同様の点は  $\mathbf{a}_{cf,y} = \Omega^2 y \hat{y}$  を受ける。惑星の自転は自転軸に沿った方向には加速度を起こさない。それ故に、表面上の任意の点  $(x, y, z)$  は以下の加速度を受ける

$$\mathbf{a}_{cf} = \Omega^2 (x \hat{x} + y \hat{y}). \quad (4.95)$$

遠心ポテンシャル  $V_{cf}$  により、この遠心加速度を考えることができ、 $\mathbf{a}_{cf} = -\nabla V_{cf}$  で、極からの余緯度で

$$V_{cf}(r, \theta) = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.96)$$

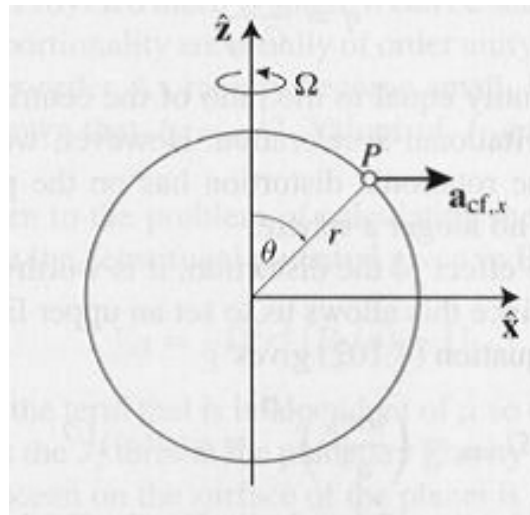


図 4.8: 角速度  $\Omega$  で自転する惑星上の点  $P(x - z$  平面内) が受ける加速度。ここで  $\theta$  は  $z$  軸 (自転軸) からとった角度であり、 $r$  は動径方向の距離である。

ここで惑星の表面を覆う海を考えてみよう。流体のうける総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{Gm_p}{r} + V_{cf}(r, \theta). \quad (4.97)$$

平衡ならば、流体の表面は等ポテンシャル面になり、局所的に重力加速度と遠心加速度の和に対して垂直になっている。海面の球体からのずれは小さいと仮定して、

$$r_{\text{ocean}} = a + \delta r(\theta) \quad (4.98)$$

ここで  $a = r_{\text{equatorial}}$  であり、惑星の赤道半径 (equatorial radius) である。よって表面のポテンシャルは一定であり

$$V_{\text{total}}(\text{surface}) \approx -\frac{\mathcal{G}m_p}{a} + \frac{\mathcal{G}m_p}{a^2}\delta r - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 a \sin^2 \theta \delta r. \quad (4.99)$$

ほとんどの惑星で  $\Omega^2 a \ll \mathcal{G}m_p/a^2$  なので (以下で述べる)、式 (4.99) の最後の項は無視できる。したがって

$$\delta r \approx \text{constant} + \frac{\Omega^2 a^4}{2\mathcal{G}m_p} \sin^2 \theta. \quad (4.100)$$

これらのことから、極において、自転の影響によって平らになると考えられる。変形の程度は、惑星の偏平性 (oblateness)、もしくは偏平率 (flattening) によって見積もることができ

$$f = \frac{r_{\text{equatorial}} - r_{\text{pole}}}{r_{\text{equatorial}}}. \quad (4.101)$$

以上のことから、惑星において  $f \approx q/2$  となり、ここで

$$q = \frac{\Omega^2 a^3}{\mathcal{G}m_p} \quad (4.102)$$

これは無次元の量で赤道での遠心加速度と重力加速度の比と等しい。しかしながら、惑星の重力場において、惑星がもはや球体から変形しているということを考えると、自転による変形がもつフィードバックの効果をここでは無視している。

変形による効果を取り入れる前に、極端な場合を考えてみるとよい。 $q \rightarrow 1$  とすると、惑星の自転速度の上限が得られる。式 (4.102) より<sup>17</sup>

$$\Omega_{\text{max}} \approx \left( \frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} \right)^{1/2} \approx 2(\mathcal{G}\langle\rho\rangle)^{1/2}, \quad (4.103)$$

ここで  $\langle\rho\rangle$  は惑星の平均密度である。地球では  $\langle\rho\rangle = 5.52 \text{ g cm}^{-3}$  であり、 $\Omega_{\text{max}} \approx 1.2 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$  そのとき自転周期は  $P_{\text{min}} = 1.4 \text{ h}$  である。木星では  $P_{\text{min}} \approx 2.9 \text{ h}$ 、実際の自転周期は  $9.9 \text{ h}$  である。

自転による偏平により、ほとんどの惑星は (しかしながら衛星ではほとんどあてはまらないが) 偏心回転楕円体と近似して扱うことができる (つまり、2つの等しい長軸 ( $a = b$ ) と、1つの短軸 ( $c$ ) を持つ3軸楕円体)。ポテンシャル理論から得られる基本的な結果により、対称軸を持つ物体の、外側の重力ポテンシャルは以下のように書け<sup>18</sup>

$$V_{\text{gravity}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \theta) \right], \quad (4.104)$$

<sup>17</sup>式 (4.103) の右側  $a(\mathcal{G}\langle\rho\rangle)^{1/2}$  は誤植。

<sup>18</sup>式 (4.104) で、テキスト  $\mathcal{P}_2(\cos \theta)$  は誤植

ここで  $m$  は総質量で,  $R(= a$  自転変形の場合の  $a$  と等しい) は赤道半径,  $J_n$  は無次元の定数, 4.3 節で見られたように,  $\mathcal{P}_n(\cos \theta)$  は  $n$  次のルジャンドル多項式である. 座標の原点を物体の重心にとったので,  $n = 1$  の項が無いことに注目されたい.  $J_n$  は物体の内部の質量分布を反映しており, ひとつの惑星について実験によって決められなくてはならない. これらの量で, 最も重要なのは  $J_2$ <sup>19</sup> であり, 主軸まわりの 3 つの慣性能率  $A, B, C$  についての単純な物理的解釈をすることができる. MacCullagh's 定理 (式 (5.36) 参照<sup>20</sup>, また Cook 1973 により導出) により以下のように書け (Cook 1980)

$$J_2 = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{ma^2} \approx \frac{C - A}{ma^2}, \quad (4.105)$$

ここで自転による歪みのように  $A \approx B$  のとき, 近似ができる. 一般的に,  $J_n$  は積分によって与えられ

$$J_n = + \frac{1}{mR^n} \int_0^R \int_{-1}^{+1} r^n \mathcal{P}_n(\mu) \rho(r, \mu) 2\pi r^2 d\mu dr, \quad (4.106)$$

ここで  $\mu = \cos \theta$ ,  $\rho(r, \mu)$  は内部の密度分布である.  $\mathcal{P}_n(\mu)$  は奇関数なので, 奇数の  $n$  のとき,  $J_3 = J_5 = J_7 = \dots = 0$  となり, 惑星において北半球と南半球は対称である. 実際は, ゼロでない  $J_3$  の値が測られているのは地球だけである.  $q$  は小さい場合,  $J_n \propto q^{n/2}$  と書け, ここで比例定数は普通 1 のオーダーである. それ故に, 一般に  $q \ll 1$  なので,  $J_n$  の高次の項は急速に小さくなる. 均一な密度を持つ惑星では,  $J_2 = q/2$  である.  $J_2$  および  $J_4$  の値は表 A.4 に載っている.

ここで自転する惑星の偏平率を計算する問題に戻ることができる. 式 (4.96) で与えられた遠心ポテンシャルを以下のように書け

$$V_{cf} = \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\mu) - 1]. \quad (4.107)$$

ここで  $\mu$  に依存しない項は無視できる. なんのためかということ, 惑星の重力場において  $V_{cf}$  が  $J_2$  の項と同じ角依存性を持つようにするためである. 今, 惑星の表面の海による総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} + \left[ \frac{\mathcal{G}m_p a^2}{r^3} J_2 + \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 \right] \mathcal{P}_2(\mu), \quad (4.108)$$

ここで  $J_4, J_6$  などは無視した. すでに出てきたように, 表面を等ポテンシャルとして  $r = a + \delta r(\theta)$  と書く. 式 (4.108) に代入して展開すると

$$\delta r = \text{constant} - \left[ J_2 + \frac{1}{3} q \right] R \mathcal{P}_2(\mu). \quad (4.109)$$

次の式を得るために, この  $\delta r$  の新しい表現に式 (4.101) における  $f$  の定義を用いることができ,

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q, \quad (4.110)$$

<sup>19</sup>  $J_2$  は赤道面のはり出しをあらわす係数である.

<sup>20</sup> 式 (5.36), また  $I = \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta$

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}(A + B + C - 3I)}{2r^3}$$

以前に得た結果  $f \approx q/2$  を置き換えている．Yoder(1995) を用いると， $f$  の計算値と観測値を比べることができる．地球では  $f_{\text{calc}} = 0.003349$ ， $f_{\text{obs}} = 0.003353$  である．木星の場合  $f_{\text{calc}} = 0.06670$ ， $f_{\text{obs}} = 0.06487$  である．この値は木星の円盤像において極が平らになっているのを目で確認できるほど大きいものである．この比較から，式 (4.110) は明らかに偏平率のよい見積もりを与えていると言える．

潮汐変形も自転変形も両方，表面を持ち上げて，2 次のルジャンドル多項式の関係によって形作られるという事実は，核とマントルによって成る惑星の潮汐変形について述べた 4.4 節の中で発展した理論は，自転変形においても直接適用できるといことを意味する．どちらの場合においても変形の程度を測ることで，惑星の内部構造についての情報を明らかにすることができる．もちろんその理論は，衛星が (i) 惑星によって起こる潮汐，(ii) 衛星自身の自転，によって変形する場合にも同じように適用することができる．4.7 節では，同期自転する衛星における変形という特別な場合について述べる．

惑星の  $J_2$  は，衛星やリング物質などの軌道天体によっておこる重力場を和らげる．主要な結果は，軌道運動をしている天体の楕円の軌道が回転する，つまり空間における歳差運動である．力学的な結果については，節 6.11, 7.7, 7.9, 8.11 でより詳しく議論されている．今の目的のためには，以下のことを知っていれば十分であり， $J_2$  による歳差運動の効果は，衛星の軌道，または細い偏心的なリングを監視することで直接観測することができる．それ故に， $J_2$  は観測可能な量であり，式 (4.105) により， $J_2$  を，2 つの主慣性能率の差である  $C - A$  と関連付けることができる．

しかしながら，それぞれ別々に計算するために，それによって内部のモデルを知るために， $C$  と  $A$  の間の関係がさらに必要である．地球におけるひとつの方法は，自転によって偏平している地球における，太陽と月によって及ぼされるトルクの結果を観察することである．これは地球の自転軸を，地球の軌道面に対して垂直に， $(C - A)/C$  に比例した割合で回転させ (Cook 1980)，この効果は月太陽歳差運動 (luni-solar precession) と呼ばれる．現在では，この  $C$  と  $A$  を決める方法は，地球 - 月系にのみあてはめることができるものである．他の惑星では，他の方法を用いなければならない．

#### 4.6 Darwin-Radau relation

Darwin-Radau relation(参照例 Cook 1980) は, 慣性能率の係数  $C/mR^2$  ( $m$  は物体の質量,  $R$  は平均半径) を惑星または衛星における  $q, f, J_2$  の値と関連付ける近似式である. この関係は, Clairaut(1743) に基づいた Radau(1885) によって最初に見出され, Darwin(1899) もこの問題に寄与している. 基礎となる仮定は, 関連する物体は静水圧平衡にあるということである. この関係はいくつもの違った形で表現できるが, ここでは Cook(1980) による形を適用し

$$\frac{C}{mR^2} = \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \left( \frac{5q}{2f} - 1 \right)^{1/2} \right]. \quad (4.112)$$

慣性能率の係数  $\bar{C}$  を無次元の量として以下のように定義し

$$\bar{C} = \frac{C}{mR^2} \quad (4.113)$$

式(4.110) で与えられた  $J_2, q, f$  の関係を用いると, 式(4.112) の Darwin-Radau relation は以下のように書くことができ

$$\frac{J_2}{f} = -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2. \quad (4.114)$$

しかしながら, この形の Darwin-Radau relation によって与えられる  $\bar{C}$  と  $J_2/f$  の関係は, 4.4 節で考えた, より現実的な惑星の変形モデルを用いて得られる, より一般的な結果の極限の場合である. 核 - マントルモデルにより, Dermott(1979b) は以下を得た

$$\bar{C} = \frac{2}{5} \left[ \frac{\sigma}{\langle \rho \rangle} + \left( 1 - \frac{\sigma}{\langle \rho \rangle} \right) \left( \frac{A}{B} \right)^2 \right]. \quad (4.115)$$

慣性能率の定義と, 知られている核とマントルの大きさと変形を用いて, 第一原理からこの結果が得られる. 衛星の表面と核 - マントル境界面は平衡であるとする, 式(4.79)<sup>21</sup> で用いられた係数  $H$  は式(4.83)<sup>22</sup> で与えられる静水値  $H_h$  を持つ. Dermott(1979b) は  $J_2/f$  の値と  $H_h$  を以下の方程式によって関連付けた

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{5H_h} \right). \quad (4.116)$$

<sup>21</sup>式(4.79)  $AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta c}{1+\tilde{\mu}}$  and  $BT_2 = H \frac{5}{2}\zeta$

$$H = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left( \frac{1 + \tilde{\mu} + (3/2)(A/B)^2 F \delta}{(1 + \tilde{\mu})(\delta + 2\sigma/5\rho)} \right)$$

<sup>22</sup>式(4.83)

$$H_h = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left( \frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right)$$



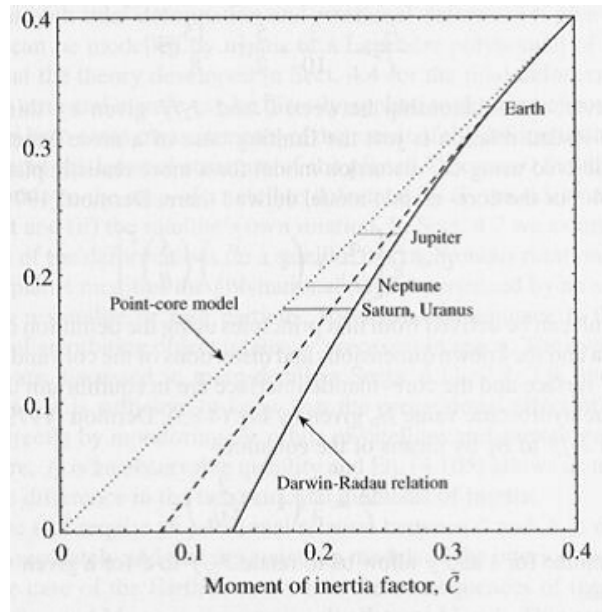


図 4.9: 慣性能率  $\bar{C}$  の関数としての  $J_2/f$ , それぞれ (i) 核が点のモデル (点線), (ii)  $A/B = 0.5$  のモデル (破線), (iii) Darwin-Radau relation の場合 (実線). 地球と巨大惑星の  $J_2/f$  の値が示してある.

$\delta$  と  $\gamma$  の式によって<sup>23</sup>, 与えられた値  $A/B$  で,  $J_2/f$  を  $H_h$  に関連付けることができ

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} + \frac{\bar{C} - \frac{2}{5}(A/B)^2}{1 - (A/B)^2} + \frac{8 - 20(A/B)^2 + 10\bar{C}[5(A/B)^3 - 2]}{12[(A/B)^5 - 1] + 15\bar{C}[2 - 5(A/B)^3 + 3(A/B)^5]}. \quad (4.117)$$

この式は 2 つの極限が考えられ

- 核が点の場合  $A/B \rightarrow 0$  で

$$J_2/f \rightarrow \bar{C}. \quad (4.118)$$

- Darwin-Radau relation の場合  $A/B \rightarrow 1$  で

$$J_2/f \rightarrow -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2. \quad (4.119)$$

図 4.9 は, 核が点のモデル, Darwin-Radau モデル,  $A/B = 0.5$  の一般的な核 - マントルのモデルにおける,  $\bar{C}$  の関数としての  $J_2/f$  をプロットしたものを示している. 地球と巨大惑星における  $J_2/f$  の知られている値が水平線で示してあり, それぞれの惑星における  $\bar{C}$  の極限值も示している.  $J_2/f$  の値で与えられる  $\bar{C}$  の値の幅が,  $J_2/f$  が大きくなるにつれて小さくなっていくことに注目されたい. キーポイントは,  $J_2/f$  の値により, 慣性能率

<sup>23</sup>式 (4.82)  $\delta = \left(\frac{A}{B}\right)^3(1 - \frac{\sigma}{\rho})$ , 式 (4.84)  $\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho}$

に制限を置くことができるということである。式 (4.105) から<sup>24</sup>  $C - A$  の値と, この情報を結び付けると,  $C$  と  $A$  の推定値が得られる。このような推定値は惑星内部の詳細なモデルに制限を与える。

---

<sup>24</sup>式 (4.105)

$$J_2 = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{ma^2} \approx \frac{C - A}{ma^2}$$

#### 4.7 衛星の形状と内部構造

静水圧平衡にある衛星を考えてみよう．衛星は同期自転し，惑星に対して赤道に近い軌道を取り，円に近い軌道をとると仮定する．衛星は惑星により潮汐変形を受け，同様に自転により自転変形も受ける．以上の理論と，衛星の平均運動  $n$  が自転の角速度と等しいことから，変形の結果，衛星の形が三軸楕円体になることがわかる．実際に，静水圧平衡にある衛星では半長軸と半短軸に特有の関係があるので，衛星の形を正確に測ることにより，平衡かどうか決めることができ，また，他のデータと結びつけることにより，衛星の内部構造の特徴を推測することができる．

衛星の自転により起こる，点  $(r, \theta, \psi)$  での遠心ポテンシャルは

$$V_{\text{rotational}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (4.120)$$

(式 (4.107) 参照<sup>25</sup>)，ここで  $\theta$  は半径ベクトルと垂直軸の間の角度であり， $\mathcal{P}_2(\cos \theta) = (1/4)(3 \cos 2\theta + 1)$  は 2 次のルジャンドル多項式である． $V_{\text{rotational}}$  は，斜影された半径ベクトルと  $x - y$  平面の間の角度  $\psi$  から独立であることに注目されたい．これにより  $z$  軸について等ポテンシャル面が対称であることがわかる．同じ点における惑星による潮汐ポテンシャルは

$$V_{\text{tidal}} = -\frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.121)$$

(式 (4.9) 参照<sup>26</sup>)，ここで  $m_p$  は惑星の質量である． $V_{\text{tidal}}$  は，半径ベクトルと  $z$  軸の角度  $\theta$  から独立であることに注目されたい．これにより  $x$  軸について等ポテンシャル面が対称であるということになる．しかしながら，ケプラーの第 3 法則を用い  $\frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} = an^2$ ，また  $n = \Omega$  であることに注目すると以下のように書け

$$V_{\text{tidal}} = -\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.122)$$

したがって  $V_{\text{rotational}}$  は確かに  $V_{\text{tidal}}$  と同じ形をしており，絶対値が係数 3 だけ違うのと，対称軸が異なるだけである．このことにより，4.4 節で発展した潮汐変形の理論を，直接自転変形に適用できる．図 4.10 はそれぞれのタイプの変形における等ポテンシャル面の比較を示している．自転変形の場合 (図 4.10a) は， $z$  軸に対して対称な形をしており，一方，潮汐変形の場合 (図 4.10b) は， $x$  軸 (衛星と惑星を結ぶ線に沿う) が対称軸となっている．

式 (4.57) によって与えられるマントル表面 (つまり衛星表面) の形のモデルを用いると<sup>27</sup> 自転の場合に導入されねばならない，付加係数  $-1/3$  を考慮し，それぞれの変形の形を計算することができる．一般的な三軸楕円体の半軸  $a, b, c$  (それぞれ  $x, y, z$  軸に沿う) によって形を定義するのが最も簡単である．ルジャンドル多項式の  $\theta$  と  $\psi$  の適切な値を求めることによってこれらの量はそれぞれ  $B$  と  $T_2$  のみの関数として計算することができる．

<sup>25</sup>式 (4.107)  $V_{\text{cf}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\mu) - 1]$

<sup>26</sup>式 (4.9)  $V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_p}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

<sup>27</sup>式 (4.57)  $R_{\text{os}}(\psi) = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)]$

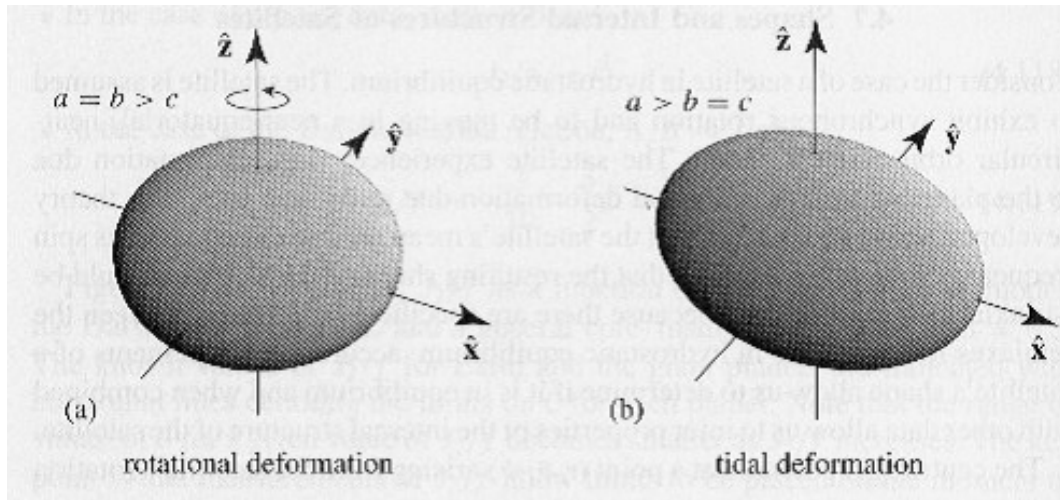


図 4.10: (a) 自転変形から生じる等ポテンシャル面の例，自転軸は  $z$  軸 (b) 潮汐変形から生じる等ポテンシャル面の例，潮汐が起こっている天体は  $x$  軸方向に沿っている．

自転変形においては， $a$  と  $b$  を与えるために  $\theta = \pi/2$  での  $\mathcal{P}_2(\cos \theta)$  だけを計算すればよく， $c$  を与えるためには  $\theta = 0$  を計算すればよい．これにより

$$a_r = B(1 + T_2/6), \quad b_r = B(1 + T_2/6), \quad c_r = B(1 - T_2/3). \quad (4.123)$$

潮汐変形においては， $a$  を与えるために  $\psi = 0$  での  $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  だけを計算すればよく， $b$  と  $c$  を与えるためには  $\psi = \pi/2$  を計算すればよい．これにより

$$a_t = B(1 + T_2), \quad b_t = B(1 - T_2/2), \quad c_t = B(1 - T_2/2). \quad (4.124)$$

自転軸が軌道面に対して垂直だと仮定し，さらに自転と潮汐による寄与を線形的に足し合わせることができると仮定すると，結果としてできる三軸楕円体の形は以下の半軸によって与えられ

$$a = B(1 + 7T_2/6), \quad b = B(1 - T_2/3), \quad c = B(1 - 5T_2/6). \quad (4.125)$$

特に，静水圧平衡にある同期自転する衛星の形は，自転変形と潮汐変形によって支配され，

$$b - c = \frac{1}{4}(a - c) \quad (4.126)$$

という結果を得る (Dermott1979b)．さらに，惑星によって衛星に起こる潮汐の場合の式 (4.13) を適応し<sup>28</sup>，式 (4.102) と結びつけることにより<sup>29</sup>， $\zeta/B = q$  を得る<sup>30</sup>．したがって，

<sup>28</sup>式 (4.13)  $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$

<sup>29</sup>式 (4.102)  $q = \frac{\Omega^2 a^3}{g_{m_p}}$

<sup>30</sup>テキスト  $\zeta/B = 3q/4$  は誤植．よって式 (4.127) の  $\frac{15}{4} H_h q B$  も誤植．

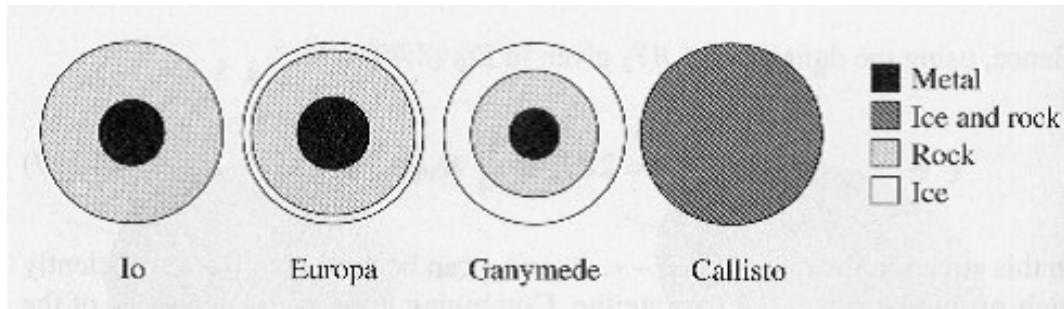


図 4.11: 探査機のデータから求めたガリレオ衛星の内部モデル．全ての衛星が同じ半径のスケールで描かれている．データは Anderson et al.(1996a,1996b,1997a,1997b) ．

式 (4.79) で与えられる  $BT_2$  の定義を用いると<sup>31</sup>

$$a - c = 2BT_2 = 5H_hqB. \quad (4.127)$$

この式の中の  $a - c$ ,  $B$ ,  $q$  は十分に解像度が高い衛星の画像から測ることができる．これらを衛星の質量に関する知識と結びつけることにより，平均密度  $\langle \rho \rangle$  を得る．式 (4.83) の中の係数  $H_h$  の定義<sup>32</sup> から，これが  $A/B$  ( $A$  は核の平均半径),  $\sigma$ ,  $\rho$  (それぞれ核とマンツルの密度) の値を制限することがわかる．これは，特に惑星に近く，潮汐変形も自転変形も大きい衛星の内部構造を決めるために用いることができるテクニックの基礎である．

Dermott(1979b) は，ここで示された理論と，4.5 節，4.6 節の中での理論を用い，探査機による (a) イオ，ガニメデ，タイタンのような衛星の重力モーメント，(b) ミマス，テチスのような衛星の形の測定により，内部分化の証拠を得ることができるのではないかと，いうことを示唆した．Dermott & Thomas(1988) は，ボイジャー探査機によって得られた高解像度の画像を用い，2 次精度版の形状決定法 (a second-order version of the shape technique) をミマスに適用した．彼等は，ミマスが三軸楕円体にとってもよい近似をもつとし，式 (4.126) で予測される割合 0.25 と比べて測定値は  $(b - c)(a - c) = 0.27 \pm 0.04$  であり，これはミマスが静水圧平衡に近いということを示唆している．Dermott & Thomas は，平均半径の推定値  $B = 198.8$  km と，Kozai(1957) によって決められたミマスの質量を結びつけて，平均密度  $\langle \rho \rangle = 1.137 \pm 0.018$  g cm<sup>-3</sup> を得た．彼等は，未分化の衛星で予測される値  $20.3 \pm 0.3$  km と比べて  $a - c = 16.9 \pm 0.7$  km であることを示した．予測されたバルジより小さいということは，中心に凝縮した衛星ということを示唆している．その内部モデルのひとつは観測と一致し， $A/B = 0.44 \pm 0.09$  の岩石コア，密度  $\sigma = 0.96 \pm 0.08$  g cm<sup>-3</sup> の氷のマンツルが予測される<sup>33</sup>．もうひとつの可能性はミマスに多孔性の(したがっ

<sup>31</sup>式 (4.79)  $AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1+\mu}$  and  $BT_2 = H \frac{5}{2}\zeta$

<sup>32</sup>式 (4.83)

$$H_h = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left( \frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right)$$

<sup>33</sup>テキストでは  $\rho = 0.96 \pm 0.08$  g cm<sup>-3</sup> となっているが，マンツルの密度なので  $\sigma$  の誤植．

てかなり密度が低い) 氷でできた深い表土があるかもしれないということだ。土星の共軌道衛星であるヤヌスとエピメテウス (3.12 節を参照) の力学的相互作用の観測により, 同種の多孔性の氷組成が示唆されることに注目すると興味深い。

ガリレオ探査機は木星系を巡り, 四つのガリレオ衛星全てに表面から 1000 km 以内まで近づいた。Anderson et al(1996a,1996b,1997b) は探査機が得たデータを用い, イオ ( $\bar{C} = 0.378 \pm 0.007$ ), エウロパ ( $\bar{C} = 0.347 \pm 0.014$ ), ガニメデ ( $\bar{C} = 0.311 \pm 0.003$ ), カリスト ( $\bar{C} = 0.406 \pm 0.030$ ) の慣性能率の推定値を得た。静水圧平衡にある衛星が均質であるとすると,  $\bar{C} = 0.4$  であろう, ということ思い出してほしい。それ故に, イオ, エウロパ, ガニメデは全て中心に凝縮している。実際に, 太陽系の天体の中でガニメデ  $\bar{C}$  の計測値は最も小さい。しかしながら, カリストの最初のデータ (Anderson et al. 1997b) は, カリストが未分化であることを示唆しており, さらなる探査により岩石と氷の部分別の可能性が示されている (Anderson et al. 1998)。衛星の平均密度のデータと結びつけると, 内部のモデルを求めることができる。これらは図 4.11 で概要が示されている。イオの潮汐熱は 4.11 節で議論されているが, ここでガリレオ探査機のデータの解釈から生じる, より興味深い可能性のひとつに注目されたく, エウロパは水の氷でできた殻の下に, 液体の水の海があるかもしれない。

ここまでは, 衛星が円に近い軌道をもつと仮定してきたが, 実際は衛星がかなり偏心軌道をまわっているため, 潮汐ポテンシャルと共に衛星の形も変化する。探査機が繰り返し衛星に近づき, その度に  $\bar{C}$  と  $J_2$  の測定値を得ることができるという状況において, 衛星の剛性のような物性についての情報と同様に非常に正確なモーメントの測定値を得ることができる。カッシーニ探査機は, 土星の衛星タイタンから繰り返される重力補助を利用し, 内部構造についての今までにない情報を与えてくれるであろう (Rappaport et al. 1997)。

## 4.8 ロッシュ範囲

質量  $m_p$  , 半径  $R_p$  の惑星の周りを同期自転する, 質量  $m_s$  , 半径  $R_s$  の小さな球状の衛星を考えてみよう. 衛星の円軌道の半長軸を  $a$  とし, 平均運動を  $n$  とする. 3.6 節で見られたように, 不安定なラグランジュ平衡点  $L_1, L_2$  は, 惑星と衛星の中心を結ぶ線上で衛星の中心から距離  $d_L$  のところにあり, ここで  $d_L$  は

$$d_L = \left( \frac{m_s}{3m_p} \right)^{1/3} a \quad (4.128)$$

と書ける. ヤコビ定数はこれらの点を通る臨界ゼロ速度曲面と関係があり, ヒル方程式 (3.13 節を見よ) から求められ,  $C_H = 9(m_s/3m_p)^{2/3}$  で与えられる. この曲面によって閉じられている領域はロッシュローブ (Roche lobe) と呼ばれ, 重要な物理的意味がある.

衛星の赤道と, 衛星と惑星の中心を結ぶ線の両方についての粒子の安定性について考えてみよう. この問題は, その粒子がもはや衛星に重力的に補足されなくなる半長軸  $a_L$  を計算することである. 衛星の中心にある粒子では, 重力と遠心力は平衡で  $\mathcal{G}m_p/a^2 = n^2a$  である. しかしながら, 赤道上の粒子は以下の三つの力 (i) 潮汐シアーによる, 過剰な重力または遠心力. (ii) 衛星の自転による遠心力. (iii) 衛星の重力による力. を受ける. もしこの粒子が平衡だとこれらの力は釣り合い,

$$-\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} \right) R_s + n^2 R_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{R_s^2} \quad (4.129)$$

と書け, このことにより以下のように書ける.

$$\frac{3m_p}{m_s} = \left( \frac{a}{R_s} \right)^3 \quad (4.130)$$

このように, 小さい球状の衛星ではロッシュ限界 (Roche limit)  $a_L(\text{spherical})$  は以下のように与えられる.

$$a_L(\text{spherical}) = \left( \frac{3m_p}{m_s} \right)^{1/3} R_s = \left( \frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p \quad (4.131)$$

ここで  $\rho_p$  と  $\rho_s$  はそれぞれ惑星と衛星の平均密度である. 式 (4.128) と式 (4.131) を比べるとロッシュ限界において  $L_1$  と  $L_2$  は衛星の表面に接していることがわかる. ふたつの密度が近似的に等しいと, 惑星の半径で書いて  $a_L(\text{spherical}) \approx 1.44R_p$  となる.

しかしながら, 衛星が (もしくは恒星が) 静水圧平衡にあると, ロッシュ限界で衛星はそのロッシュローブを満たす. この場合, 式 (4.129) はいくつかの修正を要する. 潮汐力と遠心力が大きくなり, 一方で衛星による重力は小さくなり, 式 (4.129) 中の重力の項はよくない近似になってしまう. より完全な解析により  $a_L(\text{hydrostatic}) = 2.46R_p$  が示されている (Chandrasekhar 1987)

惑星のリングの系は全て  $a_L(\text{spherical})$  と  $a_L(\text{hydrostatic})$  の間のロッシュ範囲 (Roche zone) の中にある (図 10.1 を参照). 順行軌道で, 同期軌道より内側にあり, いくつかの下

限より大きな質量をもつ衛星は、潮汐摩擦によって太陽系の年齢よりも短いタイムスケールにおいて、惑星に向かって落ち込んでいく (4.9 節参照)。これらの衛星がロッシュ範囲に入り、潮汐によって粉砕されると、このことは惑星のリングの起源と軌道半径についての理解の助けとなり得る。式 (4.129) で引力は重力によるものだけであるが、以下の引っ張り強度 (tensile strength)

$$\mathcal{T} \geq (8/57)\pi G \rho_p \rho_s R_s^2 \quad (4.132)$$

がある衛星は惑星の表面の軌道を周ることができる (Aggarwal & Oberbeck 1974)。このことから、 $\mathcal{T} \geq 10^6 \text{ Nm}^{-2}$  の引っ張り強度を持ち大きさが  $R_s \sim 200\text{km}$  の氷衛星は土星の表面の軌道を周ることができる。しかしながら、巨大惑星の近くの衛星は激しい彗星の衝撃を受け、小さな衛星がロッシュ範囲の外側にある場合は、全て粉砕し、後に再集積され、小さな衛星がロッシュ範囲の内側にある場合は、全て粉砕し、散乱し、リングが形成される (Smith et al 1981)。



#### 4.9 Tidal Torques

角速度  $\Omega$  で自転する惑星の周りを周る衛星によって引き起こされる潮汐を考える．衛星は赤道に平行な円軌道を周り，平均運動を  $n$  とする． $\Omega \neq n$  であると，惑星は潮汐振動を受ける．今までは，系においてエネルギーは保存されると仮定してきた．しかしながら，実際は潮汐振動は常に摩擦を起こし，その結果エネルギーの損失と惑星の潮汐応答における位相のずれが生じる．

惑星の応答と強制調和振動子の応答を比べるのは有用である．運動方程式は以下のように書ける．

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (4.133)$$

ここで  $x$  は平衡の配置からの変位であり， $m$  は慣性質量， ${}^{34}kx$  は復元力で  $k(>0)$  は強度パラメーターである (stiffness parameter)．運動方程式は以下のように書くこともできる．

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4.134)$$

ここで  $\omega_0$  は振動子の自然振動数で， $\tau(>0)$  は減衰のタイムスケール (damping timescale)， $F_0/m$  と  $\omega$  は，それぞれ外部からの駆動力の振幅と振動数である．解を以下のように置く．

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (4.135)$$

式 (4.134) に代入すると，以下のような系の定常状態の応答が示せる．

$$A = (F_0/m) \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.136)$$

ここで  $A$  は正である，相の変位  $\delta$  は以下のように与えられる．

$$\sin \delta = -(\omega/\tau) \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.137)$$

このように， $\delta$  は駆動力の振動数  $\omega$  に依存しているが，振幅  $F_0/m$  からは独立である．減衰力は常に運動と逆向きなので， $\omega$  の値によらず  $\delta$  は負になり ( $-\pi < \delta \leq 0$ )，応答は常に駆動力に遅れる (Baierlein 1983, Feynman et al. 1963)．

相変位  $\delta$  を振動子の特殊散逸関数 (specific dissipation function)  $Q$  と関係付けることができる<sup>35</sup>． $Q$  は以下のように定義される．

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E} \quad (4.138)$$

ここで  $\Delta E$  は 1 周期で散逸するエネルギーで， $E_0$  は蓄えられる最大のエネルギーである．変位  $\delta x$  にわたって復元力によってなされる仕事は  $kx\delta x$  である．したがって，振動子に蓄

<sup>34</sup>慣性質量 ( $F = ma$ ) は加速しにくさ，重力質量 ( $F = GMm/r^2$ ) は引き付けあう程度．

<sup>35</sup> $Q$ :クオリティファクター， $Q$  値．系の摩擦が大 散逸大  $Q$  は小．系の摩擦が小 散逸小  $Q$  は大

えられる最大のエネルギーは

$$E_0 = \int_0^A kx dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{F_0^2}{m} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{-1} \quad (4.139)$$

時間  $\delta t$  の間に変位  $\delta x$  にわたって抵抗力 (drag force) によってなされる仕事は  $\beta \dot{x} \delta x$  である。それ故に、エネルギー散逸の割合は  $\dot{E} = -\beta \dot{x}^2$  であり、式 (4.135) を時間微分すると、エネルギー散逸の割合の平均は  $\langle \dot{E} \rangle = (1/2)\beta(A\omega)^2$  となる。1 周期で散逸するエネルギーは  $\Delta E = \langle \dot{E} \rangle (2\pi/\omega)$  である。したがって、

$$\Delta E = \pi (F_0^2/m) (\omega/\tau) \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right]^{-1} \quad (4.140)$$

となる。 $\omega_0^2 \gg \omega^2 \gg (\omega/\tau)^2$  であるとする、系が共鳴から遠くなり、減衰は小さくなり、以下のようになる。

$$\sin \delta = -1/Q \quad (4.141)$$

いかなる場合でも、引き起こされる調和振動子をモデルとして用いると、惑星における潮汐応答において潮汐摩擦の効果が  $\delta$  の負の変位を引き起こすことについて論じることができる。円軌道を周る衛星は、惑星に振動が  $2(\Omega - n)$  の半日周潮を引き起こす (4.2 節参照)。 $\Omega > n$  (衛星が同期軌道より上にある) だと、潮汐バルジは潮汐を起こしている衛星よりも角度  $\epsilon$  だけ前に運ばれる。ここで  $2\epsilon = \delta = Q^{-1}$ 。逆に、 $\Omega < n$  (衛星が同期軌道より下にある) で、潮汐散逸関数  $Q$  は振幅と振動数から独立であると、潮汐バルジは潮汐を起こしている衛星よりも同じ角度  $\epsilon$  だけ後に遅れる (MacDonald 1964)。このように、潮汐摩擦によって、潮汐バルジの軸は惑星と衛星の中心を結ぶ線と揃わなくなる。このことにより、潮汐トルク (tidal torque)、そして惑星と衛星の間のエネルギーと角運動量の輸送が生じる。

衛星でのトルク  $\mathbf{\Gamma}$  は衛星の位置が  $\mathbf{r}$  での、惑星の外側のポテンシャル  $V_{\text{ext}}$  の勾配によって決められ、以下のように与えられる。

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.142)$$

ここで

$$\mathbf{F} = -m_s \nabla V_{\text{ext}} \quad (4.143)$$

惑星と衛星の中心を結ぶ線と垂直な力の要素である  $F_\psi = -(m_s/r)(\partial V_{\text{ext}}/\partial \psi)$  だけが、トルクに寄与し、非中心の惑星のポテンシャルである  $V_{\text{nc,ext}}$  だけが、その力の要素に寄与する。したがって、衛星のトルクの大きさは以下のように与えられる。

$$\Gamma = -m_s \frac{\partial V_{\text{nc,ext}}}{\partial \psi} \quad (4.144)$$

そしてニュートンの運動の法則から、等しい反対向きのトルクが惑星に働く。

衛星が同期軌道より上にあると ( $\Omega > n$ )、潮汐バルジは衛星より前に運ばれ (図 4.12a)、このトルクによってなされる仕事は系の軌道のエネルギーを  $\Gamma n$  の割合で増やすように働

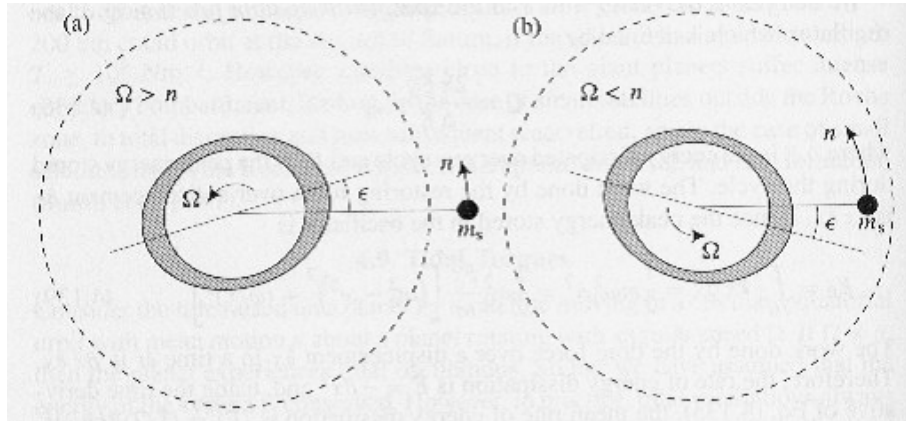


図 4.12: いかなる場合でも, 引き起こされる調和振動子をモデルとして用いると, 惑星における潮汐応答において潮汐摩擦の効果が  $\delta$  の負の変位を引き起こす. 円軌道を周る衛星は, 惑星に振動が  $2(\Omega - n)$  の半日潮汐を引き起こすことを示す. (a)  $\Omega > n$  衛星が同期軌道 (破線) より上にあり, 潮汐バルジは潮汐を起こしている衛星よりも角度  $\epsilon$  だけ前に運ばれる. ここで  $2\epsilon = \delta = Q^{-1}$ . (b)  $\Omega < n$  衛星が同期軌道より下にあり, 潮汐散逸関数  $Q$  は振幅と振動数から独立だと, 潮汐バルジは潮汐を起こしている衛星よりも同じ角度  $\epsilon$  だけ後に遅れる.

く. 同時に, 等しい反対向きのトルクは惑星の自転のエネルギーを  $\Gamma\Omega$  の割合で減らすように働く.  $\Omega \neq n$  であるので, これらの仕事の割合は等しくならず, 系の力学的エネルギーの合計  $E$  は割合  $\dot{E}$  で減少していく.

$$\dot{E} = -\Gamma(\Omega - n) < 0 \quad (4.145)$$

反対に, 衛星が同期軌道より下にあると ( $\Omega < n$ ), 潮汐バルジは衛星より後に遅れ (図 4.12b), トルクの方向は逆になる. この場合, 系の軌道のエネルギーは減少し, 一方で惑星の自転のエネルギーは増加する. しかしながら, この場合も系の力学的エネルギーの合計は以下の割合  $\dot{E}$  で減少していく.

$$\dot{E} = \Gamma(\Omega - n) < 0 \quad (4.146)$$

どちらの場合もこのエネルギーは惑星の内部で熱として散逸し, 軌道進化の割合を決めるのは, エネルギーの散逸の割合なのである.

系の総エネルギーは惑星の自転のエネルギー  $\frac{1}{2}I\Omega^2$  (ここで  $I$  は惑星の慣性能率) と系の軌道のエネルギー  $\mathcal{G}m_p m_s / 2a$  (2.7 節 参照) の和である. したがって, 総エネルギーの変化の割合は以下のように与えられる.

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}I\Omega^2 - \mathcal{G} \frac{m_p m_s}{2a} \right) = I\Omega\dot{\Omega} + \mathcal{G} \frac{m_p m_s}{2a^2} \dot{a} \quad (4.147)$$

ケプラーの第三法則を用いて  $\mathcal{G}(m_p + m_s) = n^2 a^3$ , であり, 以下を得る.

$$\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} n^2 a \dot{a} \quad (4.148)$$

しかしながら，力学的エネルギーの一部は熱として散逸してしまっている一方で，系の総角運動量  $L$  は保存され

$$L = I\Omega + \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} a^2 n \quad (4.149)$$

である．それ故に  $\dot{L} = 0$  であり，そして

$$I\dot{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} n a \dot{a} \quad (4.150)$$

である．この  $I\dot{\Omega}$  の表現を式 (4.148) に代入し，以下を得ることができ，

$$\dot{E} = -\frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} n a \dot{a} (\Omega - n) \quad (4.151)$$

そして  $\dot{E} < 0$  なので以下のようになる．

$$\text{sign}(\dot{a}) = -\text{sign}(\dot{\Omega}) = \text{sign}(\Omega - n) \quad (4.152)$$

したがって， $\Omega > n$  ならば衛星の軌道の半長軸は大きくなり，一方で惑星の自転速度は小さくなる．これは地球-月系にあてはまり，月はゆっくりと地球から遠ざかっており，一方地球の自転周期はゆっくりと増加しており，一日の長さは長くなっていっている．反対に， $\Omega < n$  ならば，衛星の軌道の半長軸は小さくなり，一方で惑星の自転速度は大きくなる．これは火星の衛星フォボスにあてはまり，火星に向かってゆっくりと螺旋状に落ちていっている．軌道進化のタイムスケールを計算するためには，潮汐トルク  $\Gamma$  の大きさの潮汐遅れ角についての式が必要である．

式 (4.12) のように  $V_3(\psi) = -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi)$  の大きさの潮汐ポテンシャルによって均質な惑星が変形すると，変形した惑星におけるある点  $P(\psi)$  での非中心の外側のポテンシャルは式 (4.54) によって与えられ<sup>36</sup> 以下のように書ける．

$$V_{\text{nc,ext}} = -\frac{3}{5} C \epsilon_2 g \left( \frac{C}{r} \right)^3 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.153)$$

<sup>36</sup>式 (4.54)

$$V_{\text{ext}}(r, \theta) = -\frac{4}{3} \pi C^3 \gamma \mathcal{G} \left[ \frac{1}{r} + \frac{3}{5} \frac{C^2}{r^3} \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \right].$$

$\gamma = \frac{3m_p}{4\pi C^3}, g = \mathcal{G} \frac{m_p}{C^2}$  より

$$\begin{aligned} \text{第 2 項} = V_{\text{nc,ext}} &= -\frac{4}{5} \pi \gamma \mathcal{G} \epsilon_2 C^2 \left( \frac{C}{r} \right)^3 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \\ &= -\frac{3}{5} \mathcal{G} \frac{m_p}{C^2} \epsilon_2 C \left( \frac{C}{r} \right)^3 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \\ &= -\frac{3}{5} C \epsilon_2 g \left( \frac{C}{r} \right)^3 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

均質な固体の天体という特別な場合において，惑星表面の起伏は以下のように与えられる  
 ということを示した (式 (4.89) <sup>37</sup> 参照) .

$$C\epsilon_2 = \frac{(5/2)\zeta}{1 + \tilde{\mu}} \quad (4.154)$$

一般の場合では，この起伏を  $h_2\zeta$  によって記述し，非中心の外側のポテンシャルは以下の  
 ように書く .

$$V_{nc,ext} = -k_2\zeta g \left(\frac{C}{r}\right)^3 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.155)$$

係数  $h_2$  と  $k_2$  は A. E. H. Love によって導入されたもので，ラブ数 (Love numbers) とし  
 て知られている . ラブ数は天体の内部構造を知る便利な方法において頻繁に用いられる .

惑星の内部構造がわかっていると，ラブ数は計算することができる . 均質な固体の天体  
 という単純な場合は，

$$h_2 = \frac{5/2}{1 + \tilde{\mu}} \quad \text{そして} \quad k_2 = \frac{3/2}{1 + \tilde{\mu}} \quad (4.156)$$

となる . その他の場合の天体で表面が静水圧平衡にあると，外側のポテンシャルは表面の  
 ポテンシャルによって十分に決められる . 表面の点  $P(r, \psi)$  において，総ポテンシャルは  
 中心のポテンシャルと  $r = C$  で式 (4.155) によって与えられる非中心のポテンシャルと潮  
 汐ポテンシャルの和になる . 表面を等ポテンシャル面とすると，以下を得る .

$$-\frac{\mathcal{G}m_p}{r} - k_2\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) - \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) = constant \quad (4.157)$$

表面の式  $r = C[1 + \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)]$  を式 (4.157) に代入して， $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$  への依存を取り除く  
 と，以下を得る .

$$k_2 = (C\epsilon_2/\zeta) - 1 \quad (4.158)$$

4.4 節で述べられている特別なモデルにおいて， $C\epsilon_2/\zeta = \frac{5}{2}H$  であり (式 (4.79) <sup>38</sup> 参照)，  
 ここで  $2/5 \leq H \leq 1$  であり，よって  $k_2 = (5/2)H - 1$  である .

式 (4.144)，式 (4.145) と式 (4.13) から， $\partial \mathcal{P}_2(\cos \psi)/\partial \psi = -\frac{3}{2} \sin 2\psi$  であり，以下を  
 得る .

$$\Gamma = \frac{3}{2} k_2 \frac{\mathcal{G}m_s^2}{a^6} C^5 \sin 2\epsilon \quad (4.159)$$

ここで  $\epsilon$  は潮汐遅れ角である . したがって，式 (4.145)，式 (4.146)，式 (4.151) と式 (4.159)  
 より以下のようになる .

$$\dot{a} = \text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p} m_s}{Q_p m_p} \left(\frac{C_p}{a}\right)^5 na \quad (4.160)$$

ここで添字  $p$  について説明しておく .  $p$  は以下のことを強調するためのものであり，その  
 内容は，この場合が惑星に起こっている潮汐の場合であり，変数  $\Omega_p, k_{2p}, Q_p$ ，と  $C_p$  は惑星

<sup>37</sup>式 (4.89)  $AS_2 = \frac{(5/2)\zeta}{1 + \tilde{\mu}}$

<sup>38</sup>式 (4.79)  $AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta c}{1 + \tilde{\mu}}$  and  $BT_2 = H \frac{5}{2} \zeta$

における値だということである． $I_p = \alpha_p m_p C_p^2 (\alpha_p \leq 2/5)$  であると，以下ようになる．

$$\dot{\Omega}_p = -\text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{2\alpha_p Q_p} \frac{m_s^2}{m_p(m_p + m_s)} \left(\frac{C_p}{a}\right)^3 n^2 \quad (4.161)$$

衛星が惑星に潮汐を起こすのと同時に，惑星も衛星に潮汐を起こす．同様の議論を用いることができ，この潮汐により以下のことを示すことができ，

$$\dot{a} = \text{sign}(\Omega_s - n) \frac{3k_{2s}}{Q_s} \frac{m_p}{m_s} \left(\frac{C_s}{a}\right)^5 na \quad (4.162)$$

であり，そして以下ようになる．

$$\dot{\Omega}_s = -\text{sign}(\Omega_s - n) \frac{3k_{2s}}{2\alpha_s Q_s} \frac{m_p^2}{m_s(m_p + m_s)} \left(\frac{C_s}{a}\right)^3 n^2 \quad (4.163)$$

式 (4.162) と式 (4.163) が式 (51) と式 (4.161) の添字の単純な変換によって得られるという事実は，2つの天体のその共通重心についての運動が基本的に対称であるということを反映している．しかしながら， $m_s \ll m_p$  であるとすると，例えば，月によって地球に起こる潮汐にあてはまり，そして地球によって月に起こる潮汐にあてはまり，そのとき

$$\dot{\Omega}_p = -\text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{2\alpha_p Q_p} \left(\frac{m_s}{m_p}\right)^2 \left(\frac{C_p}{a}\right)^3 n^2 \quad (4.164)$$

であり，また

$$\dot{\Omega}_s = -\text{sign}(\Omega_s - n) \frac{3k_{2s}}{2\alpha_s Q_s} \left(\frac{m_p}{m_s}\right) \left(\frac{C_s}{a}\right)^3 n^2 \quad (4.165)$$

である． $m_s \gg m_p$  であると，太陽によって地球に起こる潮汐があてはまり，そのとき

$$\dot{\Omega}_p = -\text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{2\alpha_p Q_p} \left(\frac{m_s}{m_p}\right) \left(\frac{C_p}{a}\right)^3 n^2 \quad (4.166)$$

である．

ここまでの議論では，惑星の自転は衛星の軌道運動と同じ方向であると仮定してきた．この法則の重要な例外はトリトンの軌道であり，その軌道は円軌道に近いが海王星の赤道面に対して  $153.834^\circ$  傾いており，惑星の自転の方向と逆行している．この場合は図 4.12a の衛星の運動の方向を変えることで，軌道進化の兆候を推定することができる (Goldreich & Soter 1966)．そのとき，惑星に起こる潮汐は惑星の自転と衛星の軌道運動の両方を妨げるように働き，同期軌道の位置とは無関係に，衛星の軌道は以下で与えられる割合で落ちていく．

$$\dot{a} = -\frac{3k_{2p}}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{C_p}{a}\right)^5 an \quad (4.167)$$

軌道進化の割合はいくつかの定数の関数である．しかしながら， $a, m_s, R_p, m_p$  とそして  $k_2$  でさえかなり精度よく決められているが，惑星の潮汐散逸関数  $Q$  はよくわかっていな

Body	Type	Perturber	$k_2$	$Q$	$\tau$ (y)
Mercury	rocky	Sun	(0.1)	(100)	$4 \times 10^9$
Venus	rocky	Sun	0.25	(100)	$6 \times 10^{10}$
Earth	rocky	Sun	0.299	12	$5 \times 10^{10}$
Mars	rocky	Sun	0.14	86	$7 \times 10^{12}$
Earth	rocky	Moon	0.299	12	$1 \times 10^{10}$
Moon	rocky	Earth	0.030	27	$2 \times 10^7$
Phobos	rocky	Mars	(0.0000004)	(100)	$3 \times 10^5$
Io	rocky	Jupiter	(0.03)	(100)	$2 \times 10^3$
Europa	rocky	Jupiter	(0.02)	(100)	$4 \times 10^4$
Hyperion	icy	Saturn	(0.0003)	(100)	$1 \times 10^9$
Miranda	icy	Uranus	(0.0009)	(100)	$8 \times 10^3$
Ariel	icy	Uranus	(0.10)	(100)	$1 \times 10^4$
Triton	icy	Neptune	(0.086)	(100)	$4 \times 10^4$
Charon	icy	Pluto	(0.006)	(100)	$6 \times 10^5$
Pluto	icy	Charon	(0.06)	(100)	$1 \times 10^7$

図 4.1: 各惑星各衛星において与えられる Tidal despinning timescales  $\tau$ . かつこの中にある  $k_2$  と  $Q$  の値は, 岩石天体の平均剛性  $\langle\mu\rangle = 5 \times 10^{10} \text{N m}^{-2}$  と氷天体の平均剛性  $\langle\mu\rangle = 4 \times 10^9 \text{N m}^{-2}$  も用いて計算された推定値である. その他全ての値は Yoder(1995) による.

い(4.13節参照)。いくつかの重要な太陽系の天体において、最初の周期を10時間と仮定して得られた tidal despinning timescales の推定値が、表 4.1 に示してある。

さらに、衛星が楕円軌道であり逆行軌道であると、異なった振動数と振幅の潮汐を惑星に引き起こし、振幅と振動数の  $Q$  についての依存性を考えなくてはならない。

アポロと Lunakhod ミッションが残したレーザー反射板を用いた月レーザー実験 (Lunar laser ranging experiments) によれば、月は地球から現在の割合  $\dot{a} \approx +10^{-9} \text{ms}^{-1}$  で遠ざかっている。これは地球の自転が遅くなっていることの測定とは独立して成り立っている。



#### 4.10 Satellite Tides

ここまでは、衛星は赤道に平行な円軌道を周ると仮定してきた。この仮定は、潮汐自転変化のタイムスケールを推定するには十分であり、主星に近い衛星においてこれらのタイムスケールは太陽系の年齢よりも十分に小さいということが表 4.1 で示される結果によって示される。

しかしながら、衛星の軌道が楕円軌道であると、潮汐進化は衛星が同期自転（すなわち  $\Omega_s = n$ ）に達しても終らない。惑星によって衛星に起こる潮汐による、衛星の内部での潮汐散逸によって、衛星が熱せられ、軌道が円状になることがある。あるケースでは、このことにより広範囲の融解や太陽系の中で最も劇的な火山活動が生じている。

離心率の減衰するタイムスケールは、総エネルギー  $E$  の散逸の割合から推定することができる。ここで  $E = -Gm_p m_s / 2a < 0$  である。この場合、惑星は質点として扱われ、系の総角運動量  $L$  は軌道の角運動量  $L_{\text{orbital}}$  と同期衛星の自転の角運動量の和であり、以下のように書ける。

$$L = \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} a^2 n (1 - e^2)^{1/2} + \alpha_s m_s C_s^2 n \quad (4.168)$$

しかしながら、 $a^2 \gg C_s^2$  であると、衛星の自転の角運動量（そしてエネルギー）は無視できて、以下のように書ける。

$$e^2 = 1 + \frac{2EL_{\text{orbital}}^2}{G^2} \frac{(m_p + m_s)}{(m_p m_s)^3} \quad (4.169)$$

角運動量は保存されるので、 $\dot{L}_{\text{orbital}} = 0$  であり、したがって

$$\dot{e} = -\frac{\dot{E}}{2eE} (1 - e^2) \approx -\frac{\dot{E}}{2eE} \quad (4.170)$$

潮汐振動子は全て散逸的であるので、 $\dot{E} < 0$  であり、それ故に衛星に働く潮汐は常に軌道の離心率と半長軸を減少させ、一方で平均運動が増加する。

ここで、楕円軌道を周る同期衛星によって生じる潮汐ポテンシャルを考えることによって、惑星と衛星の間の潮汐相互作用の性質を決めよう。惑星を中心に固定した座標系で見ると、衛星は惑星を焦点のひとつとする楕円軌道を周り（図 4.13a）、また衛星の自転軸は軌道面に垂直であると仮定する。2.5 節の結果を用いると、近点 (pericentre) の時間  $t$  後の衛星の軌道半径は以下のように与えられる。

$$r = a(1 - e \cos E) \approx a(1 - e \cos nt) \quad (4.171)$$

半径ベクトルと衛星と空の焦点を結ぶ線とが成す角を  $\varphi$  とすると（図 4.13a）、正弦定理により、

$$\frac{\sin \varphi}{2ae} = \frac{\sin f}{2a - r} \quad (4.172)$$

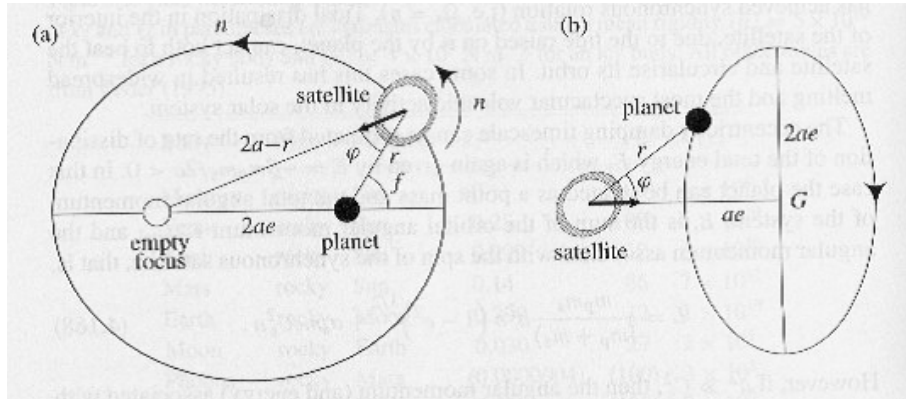


図 4.13: (a) 惑星を中心に固定したときの、衛星の楕円軌道の行程．衛星は軌道の空の焦点に向け常に同じ面 (矢印マーク) を向ける．(b) 衛星を中心に固定され衛星と共に自転する座標系での惑星の行程． $e$  の値は小さいので、惑星はその guiding centre  $G$  について、半長軸と半短軸の比が 2:1 の楕円軌道を周る．

を得る．ここで  $f$  は真近点離角である．それ故に、

$$\sin \varphi = \frac{2e}{1 + (1 - r/a)} \sin f \approx 2e \sin nt + \mathcal{O}(e^2) \quad (4.173)$$

2.6 節で見られたように、 $\mathcal{O}(e^2)$  の項を無視すると、同期自転する衛星は軌道の空の焦点に常に同じ面を向ける (図 4.13a)．同じ系を考えると、固体の衛星を中心に固定され衛星と共に自転する座標系での惑星の行程を考えて、図 4.13b に示した配置を得る．この視点からは、惑星は衛星の赤道面について、半長軸  $2ae$  と半短軸  $ae$  の楕円軌道を周るこれは guiding centre approximation である (2.6 節)．

衛星を中心とした極球座標系を用い (図 4.14)、極球座標  $(C_s, \theta, \phi)$  である衛星表面上のある点  $P$  におけるポテンシャルを計算する．ここで  $\theta$  は衛星の自転軸からとった余緯度であり、 $\phi$  は衛星の中心と惑星軌道の guiding centre  $G$  を結ぶ線  $OX$  からとった経度である． $\alpha$  を  $P$  の位置ベクトルと、衛星と惑星を結ぶ線との間の角度とし、 $\Delta$  を  $P$  と惑星間の距離とする．角度  $\psi$  は  $P$  の位置ベクトルの  $X - Y$  平面への斜影と、衛星と惑星を結ぶ線との間の角度で、 $\psi = \phi - \varphi = \phi - 2e \sin nt$  であり、ここで  $\phi$  は  $P$  の経度である (図 4.14 参照)．角度  $\alpha$ 、 $\theta$  と  $\psi$  は以下のように関係付けられる．

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \psi \approx \sin \theta \cos(\phi - 2e \sin nt) \quad (4.174)$$

したがって、

$$\cos \alpha \approx \sin \theta (\cos \phi + 2e \sin \phi \sin nt) \quad (4.175)$$

となる．

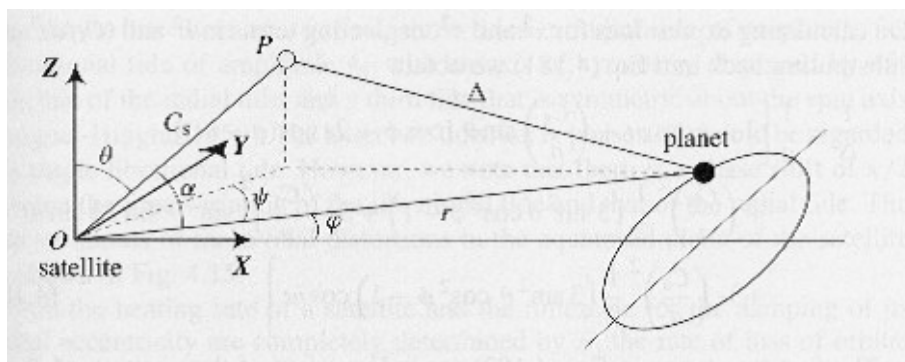


図 4.14: 偏心軌道をとる同期衛星に起こる潮汐の計算に用いられる幾何学．座標系は衛星を中心に固定され，衛星と共に自転しており，惑星の行程は衛星の赤道（軌道）面上の楕円である．

点  $P$  でのポテンシャルの式を得て，衛星に潮汐力を引き起こす項を抜き出すことができる．ポテンシャルは以下のように与えられる．

$$V = -\frac{Gm_p}{\Delta} \quad (4.176)$$

図 4.14 から，余弦定理と式 (4.171) の近似を用いて

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= C_s^2 + r^2 - 2rC_s \cos \alpha \\ &= C_s^2 + a^2(1 - 2e \cos nt) - 2aC_s(1 - e \cos nt) \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.177)$$

また

$$\Delta = a \left[ 1 - 2e \cos nt + \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 - 2 \left( \frac{C_s}{a} \right) (1 - e \cos nt) \cos \alpha \right]^{1/2} \quad (4.178)$$

を得る． $\Delta$  を以下のように書き

$$\Delta = a(1 - x)^{1/2} \quad (4.179)$$

ここで

$$x = 2e \cos nt - \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 + 2 \left( \frac{C_s}{a} \right) (1 - e \cos nt) \cos \alpha \quad (4.180)$$

であり，微量である．このとき

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots \right) \quad (4.181)$$

となる． $x^2$  と  $x^3$  の式を計算するのにおいて， $e^2$  と  $(C_s/a)^3$  を含む項は無視して式 (4.181)

に代入し，以下を得る．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a} & \left[ 1 + e \cos nt + \left( \frac{C_s}{a} \right) \sin \theta [\cos \phi + 2e \cos(\phi - nt)] \right. \\ & + \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) + 3e \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 \sin^2 \theta \sin 2\phi \sin nt \\ & \left. + 3e \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \cos nt \right] \end{aligned} \quad (4.182)$$

式 (4.182) のなかの最初の 2 項は， $P$  の位置からは独立であり，結果的に力に何の寄与ももたらさない．4.2 節での議論と同様に， $C_s/a$  を含む項は楕円の運動に必要な平均の力をもたらし， $(C_s/a)^2$  を含む項は潮汐力をもたらし．以下のように書くと

$$\cos \beta = \sin \theta \cos \phi \quad (4.183)$$

ここで  $\beta$  は  $P$  の位置ベクトルと， $X$  軸つまり衛星の中心と guiding centre を結ぶ線の間の角度である．このときポテンシャルは以下のように書ける．

$$V_s = -\mathcal{G} \frac{m_p}{a} \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 [P_2(\cos \beta) + 3eP_2(\cos \beta) \cos nt + 3e \sin^2 \theta \sin 2\phi \sin nt] \quad (4.184)$$

式 (4.184) の第 1 項は時間に独立であり，円軌道の場合の潮汐ポテンシャルと等しい．この項は，惑星軌道の guiding centre の方向を指す対称軸を持つ固定された潮汐バルジを引き起こす．式 (4.184) の増加分の項は，時間に依存しており，軌道の偏心性の結果である．第 2 項は第 1 項の振幅の時間変化を引き起こす．これは radial tide である．第 3 項は librational tide である．衛星での radial tide は，変化する衛星から惑星への距離が明らかな起源である．しかしながら，同じように重要な librational tide は以下の事実から起こる．衛星が空の焦点に常に同じ面を向けて自転している一方で，衛星の潮汐バルジの軸は常に惑星に向いており，このことにより潮汐バルジは衛星の表面を振動または秤動させるのである．これらの潮汐は両方とも，それぞれの振幅によって決められる割合での衛星におけるエネルギーの散逸に寄与する．

基準線を  $45^\circ$  ずらして新たな経度  $\Phi = \phi - \pi/4$  と， $P$  の位置ベクトルと新たな基準線との間の新たな角度  $\beta'$  を導入すると，ポテンシャルは以下のように書ける．

$$\begin{aligned} V_s = -\mathcal{G} \frac{m_p}{a} \left( \frac{C_s}{a} \right)^2 & [ P_2(\cos \beta) + 3eP_2(\cos \beta) \cos nt \\ & + 4eP_2(\cos \beta') \sin nt - e(3 \sin^2 \theta - 2) \sin nt ] \end{aligned} \quad (4.185)$$

これは実際にみつつの潮汐があることを示している．振幅  $3e$  の radial tide，radial tide の対称軸を  $45^\circ$  ずらした振幅  $4e$  の librational tide，そして三つ目の潮汐は自転軸に対称な潮汐である (Longuest-Higgins 1950)．後ろの 2 つの潮汐は，同じ位相で働き，ひとつの librational tide とみなされる．しかしながら，librational tide と radial tide の時間変化に

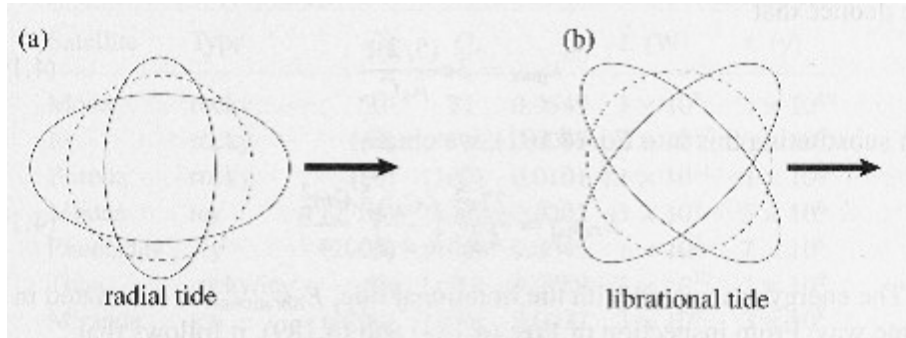


図 4.15: 赤道面 ( $\theta = \pi/2$ ) における等ポテンシャルの方向 . (a) radial tide , (b) librational tide で , それぞれ軌道が偏心していることによって衛星に引き起こされる . いずれの場合も , 矢印は惑星の方向を示している .

$\pi/2$  の位相のずれがあることに注意されたい . 衛星の赤道面におけるこれらの潮汐変化の時間変化は図 4.15 に示されている .

衛星の熱せられる割合も軌道離心率の減衰のタイムスケールも両方 , 衛星における潮汐散逸による軌道のエネルギーの損失の割合  $\dot{E}$  によって完全に決められる . しかしながら , 潮汐散逸のメカニズムについていくつかの仮定をおくことによってのみ , この問題についてさらなる進展を得ることができる . 衛星の潮汐散逸関数  $Q_s$  が振幅と振動数から独立であると仮定すると , これは例えば固体の衛星において散逸の原因が弱い摩擦である場合に当てはまるが , 衛星の潮汐振動子は線形的で , radial tide と librational tide の影響を別々に計算することができ , 単純に足し合わせることができる .

それ故に , 我々の  $\dot{E}$  を推定する最初の方法は問題が線形的であるときにのみ有効であり , radial tide と librational tide において蓄えられるエネルギーを決めることと ,  $Q_s$  の定義から  $\dot{E}$  を計算することを伴う . 散逸のメカニズムの性質がわかっていないときつまり潮汐散逸のメカニズムについての不確かさが  $Q_s$  の中に埋もれている場合に選ぶ方法でもある . 式 (4.138)<sup>39</sup> から , 以下を得る .

$$\dot{E} = \frac{n\Delta E}{2\pi} = \frac{nE_0}{Q_s} \quad (4.186)$$

この場合 , 潮汐振動数は平均運動  $n$  に等しい . 太陽系の固体衛星では , 氷衛星 ( $\mu = 4 \times 10^9 \text{Nm}^{-2}$  , 密度  $\rho \approx 1 \text{g cm}^{-3}$ ) でも岩石衛星 ( $\mu = 5 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2}$  , 密度  $\rho \approx 3 \text{g cm}^{-3}$ ) でも弾性力と重力の比は  $\tilde{\mu}_s \approx (10^4 \text{km}/C_s)^2 \gg 1$  である . それ故に , 潮汐変形において蓄えられるエネルギーは , ほとんどが弾性によるものであり , 重力の要素は無視できる . radial tide に関する変形のみを考えて , 以下のように書くと ,

$$R(\beta) = C_s[1 + \epsilon P_2(\cos \beta)] \quad (4.187)$$

ここで  $\epsilon P_2(\cos \beta)$  は歪みの大きさを , このときこの歪みを保つために必要な衛星の表面の

<sup>39</sup>式 (4.138)  $Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E}$

単位面積に働く力は  $(19/5)\mu\epsilon\mathcal{P}_2(\cos\beta)$  である (式 (4.75) 参照)<sup>40</sup> . 歪みを増加させる弾性力に対してゼロからある最大値  $\epsilon_{\max}$  までなされる仕事は以下のように与えられる .

$$W = \int_0^{\epsilon_{\max}} \frac{19}{5}\mu\epsilon C_s [\mathcal{P}_2(\cos\beta)]^2 d\epsilon = \frac{19}{10}\mu\epsilon_{\max}^2 C_s [\mathcal{P}_2(\cos\beta)]^2 \quad (4.188)$$

したがって , radial tide に関して蓄えられる最大のエネルギーは以下のように与えられる .

$$E_{\text{radial}} = \frac{19}{10}\mu\epsilon_{\max}^2 C_s \int [\mathcal{P}_2(\cos\beta)]^2 dA \quad (4.189)$$

ここで積分は球面にわたってなされる . radial tide は対称軸を持っているので , 面積要素  $dA$  は以下のように書ける .

$$dA = 2\pi C_s^2 \sin\beta d\beta \quad (4.190)$$

したがって ,

$$E_{\text{radial}} = \frac{19}{5}\mu\epsilon_{\max}^2 \pi C_s^3 \int_0^\pi [\mathcal{P}_2(\cos\beta)]^2 \sin\beta d\beta = \frac{57}{50}\mu\epsilon_{\max}^2 \mathcal{V}_s \quad (4.191)$$

となり , ここで  $\mathcal{V}_s = (4/3)\pi C_s^3$  は衛星の体積である . 衛星が固体なのにもかかわらず , 形成の過程または固体天体の流動による緩和によって平均的な radial tide に関する歪みは無いと仮定し , また平均形状のまわりで衛星の形が振動することによって歪みが起こると仮定する . この場合 , 式 (4.13)<sup>41</sup> , 式 (4.77)<sup>42</sup> , 式 (4.89)<sup>43</sup> と式 (4.185) から以下のようになる .

$$\epsilon_{\max} = 3e \frac{(5/2)\zeta}{\tilde{\mu}_s C_s} \quad (4.192)$$

これを式 (4.191) に代入して以下を得る .

$$E_{\text{radial}} = \frac{27e^2}{4\tilde{\mu}_s} \left(\frac{C_s}{a}\right)^5 \frac{\mathcal{G}m_p^2}{a} \quad (4.193)$$

librational tide に関わるエネルギー  $E_{\text{librational}}$  も同様の方法で計算される . 式 (4.184) と式 (4.189) をよく見てみると , 以下のように書ける .

$$E_{\text{librational}} = \frac{19}{10}\mu\epsilon_{\max}^2 C_s \int [\sin^2\theta \sin 2\phi]^2 dA \quad (4.194)$$

この場合 , 面積要素は  $dA = C_s^2 \sin\theta d\theta d\phi$  である . したがって , 以下のようになり ,

$$\begin{aligned} E_{\text{librational}} &= \frac{19}{10}\mu\epsilon_{\max}^2 C_s^3 \int [\sin^2\theta \sin 2\phi]^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{19}{10}\mu\epsilon_{\max}^2 2\pi C_s^3 \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \frac{57}{50} \mu\epsilon_{\max}^2 \mathcal{V}_s \end{aligned} \quad (4.195)$$

<sup>40</sup> 式 (4.75)  $\Delta R(\psi) = \frac{5}{19} \frac{A}{\mu} X \mathcal{P}_2(\cos\psi)$

<sup>41</sup> 式 (4.13)  $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a}\right)^3 R_p$

<sup>42</sup> 式 (4.77)  $\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g_c A}$

<sup>43</sup> 式 (4.89)  $AS_2 = \frac{(5/2)\zeta}{1+\tilde{\mu}}$

Satellite	Type	$\tilde{\mu}_s$	$Q_s$	$e$	$\dot{E}$ (W)	$\tau_e$ (y)
Moon	rocky	50	27	0.0549	$3 \times 10^8$	$2 \times 10^{10}$
Io	rocky	(40)	(100)	0.0043	$3 \times 10^{12}$	$6 \times 10^6$
Europa	rocky	(80)	(100)	0.0101	$1 \times 10^{11}$	$3 \times 10^8$
Mimas	icy	(2700)	(100)	0.0202	$3 \times 10^8$	$3 \times 10^8$
Enceladus	icy	(2000)	(100)	0.0045	$1 \times 10^7$	$7 \times 10^8$
Titan	rocky/icy	(9)	(100)	0.0289	$4 \times 10^{10}$	$2 \times 10^9$
Miranda	icy	(1700)	(100)	0.0027	$3 \times 10^6$	$3 \times 10^8$
Ariel	icy	(1500)	(100)	0.0034	$2 \times 10^7$	$6 \times 10^7$
Triton	icy	(20)	(100)	0.0000	0	$9 \times 10^7$

図 4.2: いくつかの衛星における潮汐散逸の割合と離心率の減衰するタイムスケール。かつこの中の  $\tilde{\mu}_s$  と  $Q_s$  の値は表 4.1 で与えられた値を用いて計算した推定値である。月における値は Yoder(1995) による。

また式 (4.192) から,

$$E_{\text{librational}} = \frac{4}{3} \left[ \frac{27e^2}{4\tilde{\mu}_s} \left( \frac{C_s}{a} \right)^5 \frac{\mathcal{G}m_p^2}{a} \right] \quad (4.196)$$

となる。

潮汐散逸のメカニズムが線形過程だとすると、潮汐変形において蓄えられるエネルギーの最大値の合計  $E_0$  は単純に radial と librational の成分の和となる。それ故に,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{63e^2n}{4\tilde{\mu}_sQ_s} \left( \frac{C_s}{a} \right)^5 \frac{\mathcal{G}m_p^2}{a} \quad (4.197)$$

となる。これを式 (4.170)<sup>44</sup> に代入し、離心率の減衰するタイムスケールは以下のようになる (Yoder & Peale 1981)。

$$\tau_e = -\frac{e}{\dot{e}} = \frac{4}{63} \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{a}{C_s} \right)^5 \frac{\tilde{\mu}_s Q_s}{n} \quad (4.198)$$

いくつかの太陽系の衛星におけるエネルギーの散逸する割合と離心率の減衰するタイムスケールの推定値が表 4.2 に示されている。

半長軸の変化に加えて、衛星によって惑星に起こる潮汐もまた、衛星の軌道の離心率を増すように働く。しかしながら、Jeffreys(1961) によると、この増加の大きさは無視できるほどである。

<sup>44</sup>式 (4.170)

$$\dot{e} = -\frac{\dot{E}}{2eE} (1 - e^2) \approx -\frac{\dot{E}}{2eE}$$

#### 4.11 Tidal Heating of Io

表 4.2 に載っている潮汐散逸関数  $Q_s$  の値は、月を除いて全て単なる推定値であるが、以下のことは言えるだろう：いくつかの離心率減衰タイムスケールは太陽系の年齢よりもかなり小さいが、それにもかかわらず観測される軌道離心率はゼロから遠い。この矛盾は、木星、土星、天王星そして海王星の衛星系の力学的進化における近年の多くの研究の動機付けとなった。木星のガリレオ衛星 Io は特に興味深い。Peale et al.(1979) によって初めて以上の計算の完全な結果が得られた。彼等は、 $Q_s \approx 100$  だと、Io の潮汐加熱の割合は  $\sim 3 \times 10^{12} \text{W}$  で、月の放射性加熱の割合より約 3 倍大きいということを指摘した。さらに、加熱は衛星の内部にわたって均一ではなく、中心では平均の 3 倍である。地震学によって月の内部の深くは融点に近いということが示されており (Nakamura et al. 1976), Peale et al.(1979) は潮汐加熱は Io の内部を溶かしており、これにより加熱の割合がさらに増加し、衛星内部のほとんどで runaway melting が生じていると論じた。

この過程についてのいくつかの考察は式 (4.191) から得られる。蓄えられる弾性エネルギーは剛性  $\mu$  とその歪みの面積ともに増加する。しかしながら、歪みは  $\mu$  が減少するに従い増加する。したがって、 $\tilde{\mu}_s \gg 1$  であり、蓄えられたエネルギーがほとんど弾性的であれば、蓄えられるエネルギーも必ず  $\mu$  が減少するに従い増加する。それ故に、もろい衛星ほど、熱せられる割合が大きくなる。Peale et al(1979) は内部が融けていると衛星はもろくなることを示した。 $\mu$  と  $Q_s$  が定数だとしても、内部が融けていると残った固体マントルの中で歪みは増加し、この過程で全体の熱せられる割合は増加し、それ故にさらなる融解が生じる。固体マントルでの熱伝導が、マントル内とマントル以下で生じた熱を取り除くのに十分であるとき、平衡に達する。Peale et al(1979) は固体マントルの平均の厚さを  $\sim$

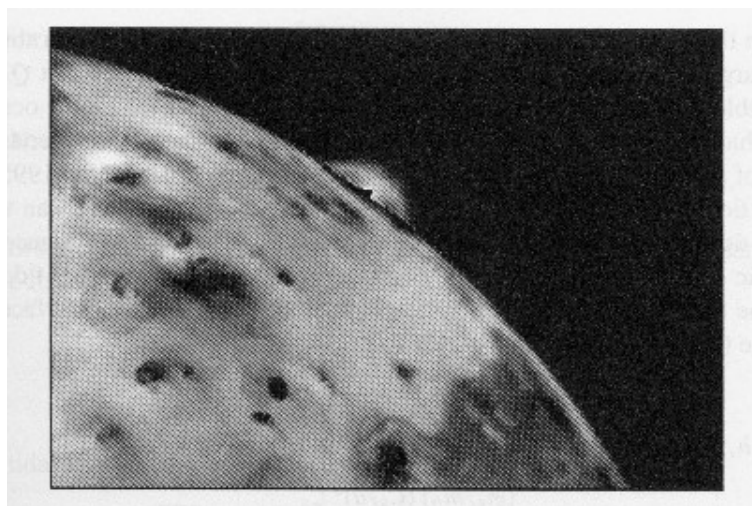


図 4.16: Voyager による Io の画像。詳しい表面のようすと、リムにある噴火する Prometheus 火山の噴煙を見ることができる。噴煙は 50 km の高さに達し、半径 150 km の範囲に広がる (画像は NASA/JPL)。



18 km と推定し、それをもとに「Io は現在太陽系の地球型天体で最も激しく加熱されている」そして「広範囲にわたって周期的に表面の火山活動が起こっているだろう」と予測した。1979年3月2日に Science に載った彼らの極めて先見的な論文は数週間後に Voyager 1 の光学航行チームのメンバーの1人である Linda Morabito によって壮観にもはっきりと確認された。1979年3月8日に航行的な目的で Voyager1 によって撮られた、Io と2つの背景の星の画像を彼女が確認したとき、彼女は衛星の表面に2つの目立った火山の噴煙に気付いた (Morabito et al 1979)。最初の接近の間、Voyager1 は合計で9回の火山の噴火、速度  $1 \text{ km s}^{-1}$  で高度 250 km に達するいくつかの噴出物を観測した (Smith et al 1979)。図 4.16 は Voyager による Io の表面にある Prometheus 火山の噴火の画像である。火山活動による resurfacing の割合の推定値は  $1 \sim 10 \text{ cm y}^{-1}$  である。このことを観点に置いて、この割合が太陽系の年齢に渡って保たれてきたとすると、衛星の体積の  $10^2$  から  $10^3$  倍と同等の量の噴出物噴出物が火山の噴出口を通じて再利用されてきたということである！

地上からの Io の赤外波長での観測によると、衛星の固有の真光度は  $2.5 \text{ Wm}^{-2}$  であり、合計の仕事率  $10^{14} \text{ W}$  を与えている (Veeder et al 1994)。これに太陽系の年齢を掛けることにより (これはもちろんいくつかの補正を必要とするが)、総エネルギー損失  $1.4 \times 10^{31} \text{ J}$  を計算することができる。これは現在の軌道のエネルギー  $Gm_p m_s / 2a = 1.34 \times 10^{31} \text{ J}$  と同程度である。

## 4.12 Tides on Titan

4.11 節では,  $Q_s$  の推定値を用いて  $\dot{E}$  を計算した. しかしながら, 潮汐散逸のメカニズムがわかっているならば, 第一原理から  $\dot{E}$  を直接見積もることができることがある. これは例えば, 海の潮流による散逸の場合であり, Titan に適用できる. 分光器を用いて, この土星の衛星の大気中にメタンが発見された (Kuiper 1944). Voyager 1 の観測によって表面の総気圧 1.6 bar で表面温度は  $\sim 95$  K であり, メタンの融点 (90.6 K) と沸点 (118 K) の間であることが明らかになっている (Hanel et al 1981). それ故に, メタンと高価の炭化水素が液体の状態ですべて衛星表面に存在しているかもしれず, このことによって推定上の海の中の潮汐の動きについていくつかの論点が浮かんでくる (Lunine 1993 参照). Titan の軌道離心率が大きいという事実は問題であり, なぜならこれにより  $Q_s > 200$  となり (表 4.2 参照), 他に唯一わかっているほぼ全球を覆う海を持つ天体である地球は  $Q_p \approx 12$  である (表 4.1 参照). しかしながら, 散逸の割合は全球を覆う海の深さに依存している (Sagan & Dermott 1982, Dermott & Sagan 1995).

潮汐散逸の割合は, 海底の全ての点での潮流の平均速度を計算することによって決めることができる. 潮汐の高さに周期的な変化があることにより, 潮流が起こる. radial tide のみを考えるとすると, 衛星表面のある点  $P$  での潮汐の時間変化 (図 4.17 参照) は以下のように与えられ

$$\zeta = 3ehP(\cos \beta) \cos nt \quad (4.199)$$

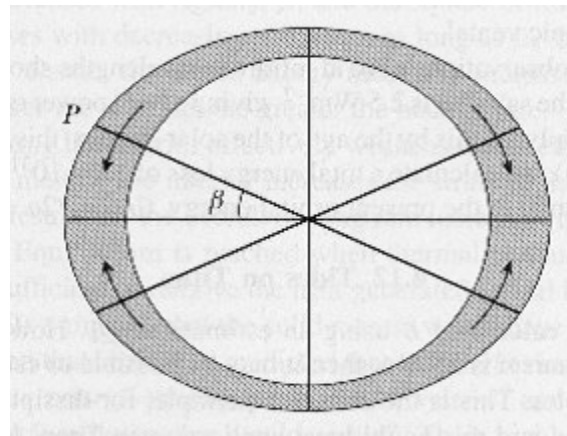


図 4.16: radial tide による潮汐の流れ. 衛星が遠点から近点に動き, 潮汐変化の振幅が増加するのに伴い, 矢印は radial tide のみによる潮汐の流れの方向を示している. 潮汐の流れは衛星の中心と惑星軌道の guiding centre を結ぶ線について対称である.  $P$  は半角  $\beta$  の円錐の表面を示す. 中心線と垂直な軸を通る平面を横切る流れと衛星の赤道面を横切る流れは常にゼロである.

であり, ここで  $h$  は海の潮汐の平均振幅で以下のように与えられ

$$h = \frac{(m_s/m_p)(C_s/a)^3 C_s}{[1 - (3\sigma/5\rho)] + [1 - \sigma/\rho]/\tilde{\mu}_s} \approx 120\text{m} \quad (4.200)$$

であり, またここで海は主に密度  $\sigma = 0.65 \text{ g cm}^{-3}$  のエタンから成っていると仮定する (式 (4.86) 参照<sup>45</sup>). 離心率によって引き起こされる衛星の平均形状についての形の振動にのみ注目しているので, 上の  $h$  についての式は固体衛星において静水圧平衡が成り立っているときにも有効である.

衛星が遠点から近点に動くときの潮汐の高さの変化について考えよう (図 4.17).  $P$  点での時間  $dt$  間における潮汐の高さの増加は

$$d\zeta = -3eh\mathcal{P}(\cos\beta)n \sin ntdt \quad (4.201)$$

となる. 面積の増分を以下のように与える

$$dA = 2\pi C_s^2 \sin\beta d\beta \quad (4.202)$$

半角  $\beta$  の円錐の中で表面のそれらの部分を覆っている海の体積の増加は, 以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta V &= -3ehn \sin ntdt 2\pi C_s^2 \int_0^\beta \mathcal{P}(\cos\beta) \sin\beta d\beta \\ &= 3eh\pi C_s^2 n \sin nt \cos\beta \sin^2\beta dt \end{aligned} \quad (4.203)$$

潮汐の流れが深さ  $D$  の海で起こったとすると, そのとき

$$\Delta V = 2\pi C_s \sin\beta Dvdt \quad (4.204)$$

となり, ここで  $v$  は  $P$  点での潮汐の流れの速度である. したがって, 式 (4.203) と式 (4.204) から以下を得る.

$$v = \frac{1}{4}nC_s \left( \frac{3eh}{D} \right) \sin 2\beta \sin nt \quad (4.205)$$

境界層の乱流による単位面積あたりのエネルギー散逸の割合は

$$\dot{E} = f\sigma v^3 \quad (4.206)$$

であり, ここで無次元の定数  $f \approx 0.003$  (Sears 1995) は表面の摩擦係数 (skin friction) である (Goldreich & Soter 1966).  $\dot{E}$  の平均値を得るために,  $v$  の表現式 (4.205) は時間と面積によって重みをつけた) 空間で平均されるべきである. 以下のように与え<sup>46</sup>

$$\langle \sin^3 nt \rangle = 4/3\pi \quad (4.207)$$

<sup>45</sup>式 (4.86)

$$A(T_2 - S_2) = \frac{\zeta\tilde{\mu}}{1 - \sigma/\rho + \tilde{\mu}(1 - 3\sigma/5\rho)}$$

<sup>46</sup>本文  $\langle \sin^3 nt \rangle = 4\pi/3$  は誤植.

また<sup>47</sup>

$$\langle \sin^3 2\beta \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\beta \sin \beta d\beta = 32/35\pi \quad (4.208)$$

であり，計算して

$$\langle v^3 \rangle = \frac{2}{105\pi} \left[ nC_s \left( \frac{3eh}{D} \right) \right]^3 \quad (4.209)$$

であり，また，radial tide のみによるエネルギー散逸の割合は以下のように与えられる．

$$\dot{E}_{\text{radial}} = 4\pi C_s^2 f \sigma \langle v^3 \rangle \quad (4.210)$$

合計のエネルギー散逸の割合を得る；これは以下のように書ける

$$\dot{E}_{\text{total}} = x \dot{E}_{\text{radial}} \quad (4.211)$$

ここで  $x$  は定数で決めることができる．潮汐散逸のメカニズムが線形過程であると，そのとき以下のように書けて

$$\dot{E}_{\text{total}} = \dot{E}_{\text{radial}} + \dot{E}_{\text{librational}} \quad (4.212)$$

この場合，式 (4.191)<sup>48</sup> と式 (4.195)<sup>49</sup> から  $x = 7/3$  を得る．しかしながら，潮汐散逸のメカニズムが境界層の乱流によるもので， $v^3$  に比例すると，潮汐散逸のメカニズムは確かに非線形になり，式 (4.212) は明らかに適用できない．numerical hydrodynamical code を用いて，Sears(1995) は  $x \approx 6$  を決め，また Detmott & Sagan(1995) はこの推定値を用いて現在の Titan の高い軌道離心率 ( $e = 0.029$ ) は深い全球を覆う深さ 0.6 km 以上の炭化水素の海があること，または海が全球を覆ってないとすると，液体炭化水素は数々のつながっていない海やクレーター湖に限られて存在することによってのみ説明できることを示した．

<sup>47</sup>本文 右辺 =  $32\pi/35$  は誤植．

<sup>48</sup>式 (4.191)

$$E_{\text{radial}} = \frac{19}{5} \mu \epsilon_{\text{max}}^2 \pi C_s^3 \int_0^\pi [\mathcal{P}_2(\cos \beta)]^2 \sin \beta d\beta = \frac{57}{50} \mu \epsilon_{\text{max}}^2 \mathcal{V}_s$$

<sup>49</sup>式 (4.195)

$$\begin{aligned} E_{\text{librational}} &= \frac{19}{10} \mu \epsilon_{\text{max}}^2 C_s^3 \int [\sin^2 \theta \sin 2\phi]^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{19}{10} \mu \epsilon_{\text{max}}^2 2\pi C_s^3 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \frac{57}{50} \mu \epsilon_{\text{max}}^2 \mathcal{V}_s \end{aligned}$$

## 4.13 Tidal Evolution

惑星に起こる潮汐による衛星の軌道進化を考えよう． $a_i$  と  $a_0$  が最初と現在の半長軸の値を表すとして，また  $\Delta t$  は対応する時間の間隔だとすると，式 (4.160)<sup>49</sup> を積分して，以下を得る．

$$\frac{2}{13} a_0^{13/2} \left[ 1 - (a_i/a_0)^{13/2} \right] = \frac{3k_{2p}}{Q_p} \left( \frac{\mathcal{G}}{m_p} \right)^{1/2} C_p^5 m_s \Delta t \quad (4.213)$$

ここで潮汐散逸のメカニズムが線形的であり，それ故に潮汐散逸関数  $Q_s$  が振幅と振動数から独立であると仮定する．すると，衛星がいくつも存在する系においては，それらのどの衛星においても軌道進化は他の衛星によって惑星に起こる潮汐を無視して扱うことができる．潮汐散逸のメカニズムが線形的であると，そのとき衛星は自らの潮汐についてほぼ定位相の関係にあり（この位相の中での小さい周期的な変化は軌道が離心的であるか，赤道面から傾いているときに起こる），これにより惑星の自転と，潮汐を起こしている衛星の軌道との間の，エネルギーと角運動量の秩序だった交換が生じる．しかしながら，他の衛星によって惑星に起こる潮汐に関する衛星の位相は周期的に符号を変える．結果的に，これらの間接的な潮汐相互作用は比較的短いタイムスケールで平均するとゼロになる．後者に関しては，衛星の組の平均運動の間に共鳴関係がある場合いくつかの修正が必要になり，もちろんこれはよくあることなのだが，この効果は小さく，ここでは無視する．

現在の半長軸が最初の値と大きく違っていて  $(a_i/a_0)^{13/2} \ll 1$  であると，式 (4.213) の左辺第 2 項は無視できて以下のように

$$\frac{2}{13} a_0^{13/2} = \frac{3k_{2p}}{Q_p} \left( \frac{\mathcal{G}}{m_p} \right)^{1/2} C_p^5 m_s \Delta t \quad (4.214)$$

と書けて，また

$$\log a_0 = \frac{2}{13} \log m_s + \text{constant} \quad (4.215)$$

である．それ故に，衛星系が潮汐進化して  $Q_p$  が振幅と振動数から独立だと， $\log a_0$  と  $\log m_s$  の間に傾き  $2/13$  の線形関係があると言えるだろう (Allan 1969; Dermott 1972)．土星と天王星の内側の衛星系についての表を図 4.18 に示す． $a_i = a_{\text{sync}}$  とし，ここで  $a_{\text{sync}}$  は同期軌道の軌道半径で，省略の無い式 (4.213) によって定義される曲線もプロットした． $Q_p$  はわかっていないので，それぞれの系で  $m_s/a^{13/2}$  が最大である Mimas と Ariel に関する点を通る曲線を選んだ．Mimas と Ariel の軌道が潮汐進化すると，同期軌道より上にある衛星は曲線の上か近くに存在することはできるが，曲線の下にあることはない．衛星が同期軌道より下にあると，これは Voyager 2 によって発見された 9 つの小さな天王星の衛星にあてはまり，曲線は  $\Delta t$  の間隔で惑星に向かって落ちていく衛星の  $a_i$  の値を示す．潮汐散逸関数が時間変化するとすると，以上の議論は適用できるが，式 (4.214) の中の  $Q_p$  は

<sup>49</sup>式 (4.160)

$$\dot{a} = \text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{C_p}{a} \right)^5 na$$

平均値  $\langle Q_p \rangle$  に置き換える必要があり，以下のように定義される．

$$\Delta t = \langle Q_p \rangle \int_0^t \frac{dt}{Q_p(t)} \quad (4.216)$$

図 4.18 で示された土星と天王星の衛星の分布は少なくともこれらの惑星の内側の衛星の軌道は潮汐進化していることを示しているだろう．ただひとつの例外的な衛星は天王星の衛星 Puck である．しかしながら，この衛星は同期軌道に非常に近く，もし  $Q_p$  が潮汐振動数  $2(\Omega - n)$  の関数であると，これらの効果は  $\Omega \approx n$  の衛星にとってより重要になるだろう．衛星系のその他の様々な特徴によって潮汐の仮説を裏付ける特徴がある．これらの特徴には，安定な orbit-orbit resonances の存在，例外的に高い軌道離心率と軌道傾斜角，明らかに後生的な火山活動と表面融解を起こしている衛星がある．

潮汐力は明らかに衛星の組の平均運動の比を変化させ得る．平均運動の組の比を  $\mathcal{N} = n'/n$  と書くと，以下ようになる．

$$\frac{\dot{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}} = \frac{\dot{n}'}{n'} - \frac{\dot{n}}{n} \quad (4.217)$$

潮汐進化する  $(a_i/a_0)^{13/2} \ll 1$  の衛星について，

$$\frac{\dot{n}'}{n'} \approx \frac{\dot{n}}{n} \approx -\frac{3}{13\Delta t} \quad (4.218)$$

であり，そして従って  $\dot{\mathcal{N}} \approx 0$  である．このことは現在実際に Miranda と Ariel で起こっているだろう (図 4.18b)．しかしながら，軌道進化の初期の段階では  $\mathcal{N}$  が大きく変化した可

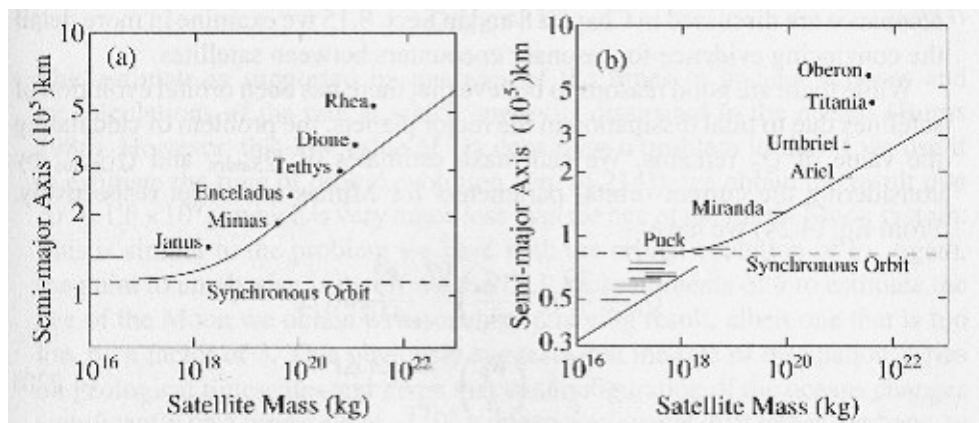


図 4.18: (a) 土星の (b) 天王星の衛星系の内側の領域の質量分布．潮汐進化が十分大きいと，実線は衛星の分布の境界上にくる．小さい衛星の質量は，土星系では密度  $1.1 \text{ g cm}^{-3}$ ，天王星系では密度  $1.6 \text{ g cm}^{-3}$  として，それらの半径から推定した．実線の直線部分の傾きは  $2/13$  である．

能性があり，また衛星の組は平均運動の比が2つの小さな整数  $p$  と  $q$  の比と等しいような共鳴関係になったかもしれず，それは

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{p}{p+q} \quad (4.219)$$

と書け，ここで整数  $q$  は共鳴の次数である．orbit-orbit resonance の力学は第8章と8.15節で議論されており，より詳細に衛星間の共鳴が起こる確かな証拠を議論している．

主要な惑星で潮汐散逸による衛星の軌道進化があると信じるに十分な理由がある一方で， $Q_p$  値を計算する問題が残っている．Mimas と Ariel の現在の軌道要素をそれぞれ考えることで  $Q_{\text{Saturn}}$  と  $Q_{\text{Uranus}}$  の推定値を得ることができる．式(4.214)より<sup>50</sup>，以下を得る．

$$\begin{aligned} Q_p &\geq \frac{39}{2} k_2 \left( \frac{G}{m_p} \right)^{1/2} \frac{R_p^5}{a^{13/2}} m_s \Delta t \\ &= \frac{39}{2} k_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^5 \frac{m_s}{m_p} \frac{2\pi \Delta t}{T} \end{aligned} \quad (4.220)$$

ここで  $T$  は衛星の軌道周期である．

Mimas について  $a/R_p = 3.075$ ， $m_s/m_p = 6.6 \times 10^{-8}$ ， $T = 0.942\text{d}$ ， $k_2 = 0.35$  で，そして時間間隔を太陽系の年齢  $\Delta t = 4.5 \times 10^9\text{y}$  とする．これにより以下を得る．

$$Q_{\text{Saturn}} \geq 1.8 \times 10^4 \quad (4.221)$$

Ariel について  $a/R_p = 7.30$ ， $m_s/m_p = 1.7 \times 10^{-5}$ ， $T = 2.520\text{d}$ ， $k_2 = 0.32$  で，そして再び時間間隔を太陽系の年齢  $\Delta t = 4.5 \times 10^9\text{y}$  とする．これにより以下を得る．

$$Q_{\text{Uranus}} \geq 2.0 \times 10^4 \quad (4.222)$$

天王星の衛星が経たであろう様々な共鳴の行程についての研究 Tittlemore & Wisdom(1990) によって，下限と上限の両方が示された．彼らは以下を示した．

$$11,000 < Q_{\text{Uranus}} < 39,000 \quad (4.223)$$

木星の場合，みっつのガリレオ衛星 Io, Europa, Ganymede の間の Laplace relation の存在によって複雑になっている(1.6.2節，8.17節参照)．しかしながら，この系の力学は木星と Io 両方の潮汐散逸についての重要な情報を与えてくれる．この系については8.17節でより詳しく議論されている．

太陽系で  $Q_p$  値を推定する全ての問題は Goldreich & Soter(1966) によって初めて議論された．地球の場合，潮汐散逸は潮汐で引き起こされた流れと海底の間の摩擦によって起こり，またほとんどが浅い海で起こる．Lunar laser ranging(LLR) による月のレーザー測距によると平均経度  $\lambda$  は以下の割合で減速している．

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \dot{n} = -25.3 \pm 1.2 \text{ arcsec century}^{-1} \quad (4.224)$$

<sup>50</sup>本文の式(4.214)より は誤植．

これは  $\dot{a} = -(2a/3n)\dot{n} = 3.74 \text{ cm y}^{-1}$  と同等であり，式 (4.160)<sup>51</sup> に代入して計算して

$$Q_{\text{Earth}} \approx 12 \quad (4.225)$$

となる．この推定値は古代の食の時間の分析と海でエネルギーが散逸する割合の計算によっても支持される (Burns 1986)．しかしながら，この低い  $Q_p$  値は軌道進化 (式 (4.214)) の時間を推定するのに用いると問題が起こり， $\Delta t \approx 1.6 \times 10^9 \text{ y}$  という地球-月系の年齢よりはるかに短い結果を得る．これは  $I_0$  の軌道進化での問題と同様である．繰り返すと，強調すべき点は，時間は  $1/3$  と短すぎるのにもかかわらず， $\dot{a}$  の LLR 測距を月の年齢の推定に用いると十分に満足のいく結果を得るということである．このことは明らかに散逸の割合は地質学的タイムスケールで変化することを示しており，海の形状は大陸移動によって  $\sim 10^8 \text{ y}$  のタイムスケールで十分に変化すると考えられる．Webb(1982) の計算によると地球の海の潮汐振動は現在共鳴に近く (near-resonant) これにより現在の高い散逸の割合も説明がつく．過去に地球の自転周期が短かったときは，海は共鳴から遠く散逸の割合も同様に小さかったであろう．

主要な惑星では，いくつかの内側の衛星の軌道が潮汐によって進化すると仮定するか，木星では  $I_0$  から放出される熱の測定によって  $Q_p$  の推定値を得ることはできるが，これらの天体の散逸の原因についてはわかっていない．惑星の流体外層の中の乱流粘性は何桁も不適當である (Goldreich & Nicholson 1977a)．Dermott(1979a) は，岩石核の固体摩擦が散逸の原因である可能性を示した．下にある海による潮汐の重力場は核の潮汐を係数  $\sim 2$  だけ高めて，式 (4.80)<sup>52</sup> の  $F$  はおよそ 2 であり，固体核に蓄えられる弾性エネルギーは  $F^2$  に比例して増えるので，海が無い場合に比べて 4 倍のエネルギーが核に蓄えられる． $Q_{\text{core}} \sim 40$  であると，岩石は融点に近くなっている可能性があり，そのとき木星と天王星の核は地球の核の 2 倍の体積になり，土星の場合は体積は地球の核の約 8 倍になるだろう．木星，土星，天王星の体積はそれぞれ 1,316, 763, 63 地球体積である．これらの巨大惑星の中心に小さい固体の岩石核が存在しているかどうかはわかっていない．Stevenson(1983) は水素-ヘリウム相転移に関する履歴現象 (hysteresis) が木星の散逸の原因となっている可能性を示した．

この章での我々の結びの見解は衛星系のスケール (scales) と太陽系内の小天体の潮汐進化に関するものである．衛星が安定した軌道をとる天体の中心からの (または secondary) 限界の距離は内側のラグランジュ点  $L_1$  と  $L_2$  の位置によって決められる．以下のように

$$a_L = \left( \frac{m_{\text{sec}}}{3m_{\text{prim}}} \right)^{1/3} a_{\text{sec}} \quad (4.226)$$

<sup>51</sup>式 (4.160)

$$\dot{a} = \text{sign}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{C_p}{a} \right)^5 na$$

<sup>52</sup>式 (4.80)

$$F = \frac{(1 + \tilde{\mu})(1 - \sigma/\rho)(1 + 3/2\alpha)}{1 + \tilde{\mu} - \sigma/\rho + (3\sigma/2\rho)(1 - \sigma/\rho) - (9/4\alpha)(A/B)^5(1 - \sigma/\rho)^2}$$



と書ける (式 (3.75) <sup>53</sup> 参照) . secondaries が惑星か小惑星であると, そのとき

$$a_L = \left( \frac{4\pi\rho_{\text{sec}}}{9M_0} \right)^{1/3} a_{\text{sec}} C_{\text{sec}} \quad (4.227)$$

となり, ここで  $\rho_{\text{sec}}$  はセカンダリの密度で,  $M_0$  は太陽質量である. それ故に,  $a_L$  は太陽からの距離とセカンダリの半径でスケールされる. 例えば, 密度  $\rho_{\text{sec}} = 3 \text{ g cm}^{-3}$  の小惑星では以下のように計算できて

$$a_L \approx 200 a_{\text{sec}} C_{\text{sec}} \quad (4.228)$$

となり, ここで  $a_{\text{sec}}$  の単位は AU である. それ故に,  $a_L/C_{\text{sec}} \gg 1$  であり, 小惑星の大きさに下限は無く, 安定した軌道の衛星を持つことができる. 実際に, 小惑星 (243) Ida は平均半径 15 km であり, Dactyl という平均半径 0.7 km の衛星をもっている (図 2.6 参照) .

式 (4.226) を惑星の衛星に適応すると, 以下のように書ける .

$$a_L = \left( \frac{\rho_s}{3\rho_p} \right)^{1/3} \frac{a_s}{C_p} C_s \quad (4.229)$$

それ故に,  $a_L$  は衛星半径と, 惑星からの衛星の距離でスケールされる. ロッシュ限界 (4.8 節参照) のちょうど外側にある衛星では,  $a_L/C_s$  は 1 に近くなる. より遠くにある衛星, 例えば Io と Titan では,  $a_L/C_s$  はそれぞれ 5.7 と 19.7 に増加する. それ故に, 小さな見えないような衛星がこれらの天体の近くに存在できるかもしれない. しかしながら, 潮汐力の働きはものすごく小さな衛星をのぞいたどんな衛星も無いことを確かめるのに十分であり, 後者はおそらく彗星の衝突によって破壊されたであろう (Smith et al 1982) .

潮汐力は通常は大きな天体に関わるものであるが, これらの力はいくつかの驚くほど小さな衛星と小惑星の spin-orbit evolution においても効くことがある. 軌道進化の符号は衛星の同期軌道に対する距離によって決められる. 惑星や小惑星の同期軌道について, 以下のように書いて,

$$a_{\text{sync}} = \left( \frac{4\pi\mathcal{G}\rho_{\text{sec}}}{3\Omega_{\text{sec}}^2} \right)^{1/3} C_{\text{sec}} \quad (4.230)$$

ここで  $\Omega_{\text{sec}}$  はセカンダリの自転振動数であり, この場合セカンダリは惑星か小惑星である. 大きさに関係なく, 全ての小惑星の自転周期が約 8 h (Alfvén 1964), 密度を  $\rho_{\text{sec}} = 3 \text{ g cm}^{-3}$  と仮定すると, そのとき  $a_{\text{sync}}$  は天体の半径でスケールされて,  $a_{\text{sync}}/C_{\text{sec}} \approx 2.6$  となる. 潮汐によって自転が遅くなった (tidally de spun planets) 長自転周期惑星では,  $a_{\text{sync}}/C_p$  は 2.6 よりはるかに大きくなる. 太陽系の惑星の中でこれらだけ衛星を持たない水星と金星は, 太陽潮汐によってほとんど完全に自転が遅くなっていることに注意されたい. 水星では,  $a_{\text{sync}}/C_{\text{sec}} \approx 130$  であり, 一方金星では  $a_{\text{sync}}/C_{\text{sec}} \approx 253$  である. Burns(1973) と

<sup>53</sup>式 (3.75)

$$\alpha = \left( \frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3}$$

Ward & Reid(1973) では太陽潮汐によるこれらの惑星の自転の遅延により同期軌道の拡大が生じ, 続いて起こる潮汐による全ての亜同期衛星 (subsynchronous) における軌道の衰退によってこれらの衛星は失われてしまうだろうと議論されている.

この仕組みは衛星のまわりをまわる天体, つまり衛星の衛星が失われることにも効いてくる (Reid 1973). 潮汐自転減速を受けた同期自転する衛星では, 衛星の同期軌道半径は以下のように与えられる.

$$a_{\text{sync}} = \left( \frac{4\pi\mathcal{G}\rho_s}{3n^2} \right)^{1/3} C_{\text{sec}} \quad (4.231)$$

従って, 式 (4.227) と式 (4.231) から

$$a_{\text{sync}}/a_L = 3^{1/3} \quad (4.232)$$

となる. それ故に, 潮汐自転減速を受けた衛星の衛星のとり得る安定した軌道は全て subsynchronous である.

## 4.14 The Double Synchronous State

月の軌道と地球の自転が、特に月によって地球に起こる半日周潮の働きで太陽系の年齢を通じてかなり変化することは大いに考えられる (Burns 1986) . 現在この系の角運動量のほとんどが月の軌道に存在するが、月形成時にはおそらく逆の状況になっており、角運動量のほとんどが地球の自転に存在していたであろう . 地球が持つことができる最大自転振動数  $\Omega_{\max}$  を推定することができ、以下のように与えられて

$$\alpha m_p C_p^2 \Omega_{\max} \approx m_s a^2 n + \alpha m_p C_p^2 \Omega \quad (4.233)$$

ここで  $\Omega$  は現在の地球の自転振動数であり、また対応する (corresponding) 地球の最小自転周期は  $\sim 4$  h になるだろう . しかしながら、系の最初の位置はわかっておらず、現代の測定からは決めることができない .

発見的目的のため、月の軌道を赤道に並行とし、太陽潮汐の影響を無視すると、そのとき系の総角運動量  $L_{\text{tot}}$  は軌道角運動量  $L_{\text{orb}}$  と地球の自転角運動量  $L_{\text{spin}}$  との和となる、 $L_{\text{tot}}$  は保存されるとすると、 $L_{\text{orb}}$  と  $L_{\text{spin}}$  の和の式を  $L_{\text{tot}}$  で割ることが出来て、

$$1 = 0.832 \left( \frac{a}{60.4} \right)^{1/2} + 0.168 \left( \frac{24}{T} \right) \quad (4.234)$$

を得る . ここで  $a$  は地球半径を単位とした月の軌道の半長軸であり、 $T$  は時間を単位とした地球の自転周期である . 平均した地球の潮汐散逸関数を  $Q_{\text{Earth}} \approx 34$  と仮定すると、そ

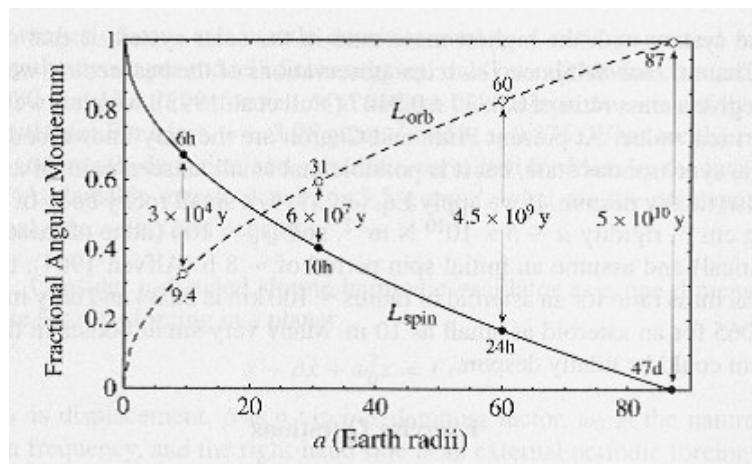


図 4.19: 月の軌道  $L_{\text{orb}}$  (破線) と地球の自転  $L_{\text{spin}}$  (実線) の間の角運動量の変化 . 白丸と  $L_{\text{orb}}$  の曲線上の数字は月の地球からの距離を地球半径で示している . 黒丸と  $L_{\text{spin}}$  の曲線上の数字は地球の自転周期を表している . それぞれの数字の組み合わせに対して年で書かれた時間は、現在の配置が  $4.5 \times 10^9$  年の進化の結果であると仮定して計算された軌道進化の時間である . いくつかの仮定の下、あと  $5 \times 10^{10}$  年経つと地球-月系が二重同期状態になり、そのとき地球の自転周期と月の公転周期は 47 日になり、月の半長軸は  $\approx 87$  地球半径になるであろう .

のとき月の半長軸と対応する地球の自転周期を系の進化の中の様々な時間についてプロットするために式 (4.234) を用いることができる (図 4.19) . ここで, 月が現在の軌道になるまで  $4.5 \times 10^9$  y かけて進化してきたと仮定する. 潮汐散逸関数が  $Q_{\text{Earth}} \sim 34$  に保たれるとすると, そのとき  $\sim 5 \times 10^{10}$  y の進化の後には地球の自転から月の軌道への角運動量の輸送はほぼ完了し系は地球と月の自転周期が両方向同じで月の軌道周期と等しい二重同期 (double synchronous) 状態になるであろう. これは月の半長軸が  $\sim 87$  地球半径で地球の自転周期が  $\sim 47$  d であるときに達成される. この段階での太陽潮汐は地球の自転を抑制するように働き, 無視できない. どんな spin-orbit couplings (5 章参照) の秤動も振幅が成長しすべての共鳴固定は解除されてしまうだろう (Peale 1986). 地球の同期軌道は月の軌道を越えて広がっていき, そしてそのとき月によって地球に起こる半日周潮が月の半長軸を小さくするように働くであろう.  $5 \times 10^{10}$  y よりさらに進化した後, 月は地球に近づき, 潮汐応力により破壊され, 大きなリング系を形成するであろう (Jeffreys 1970) .

系が太陽系の年齢より短い時間で二重共鳴状態に進化する条件は以下のように仮定することによって決めることができ, 最初に  $L_{\text{tot}} = L_{\text{spin}}$  で最終的に  $L_{\text{tot}} = L_{\text{orb}}$  となるとすると最終的な半長軸  $a_f$  は最初の自転振動数  $\Omega_i (= 2\pi/T_i)$  と以下によって関連付けられる.

$$m_s (\mathcal{G} m_p)^{1/2} a_f^{1/2} = \alpha m_p C_p^2 \Omega_i \quad (4.235)$$

従って,

$$\left( \frac{a_f}{C_p} \right)^{1/2} = \alpha \frac{m_p}{m_s} \left( \frac{3\Omega_i^2}{4\pi\mathcal{G}\rho_p} \right)^{1/2} \quad (4.236)$$

となる. 式 (4.214) <sup>54</sup> に代入して, 到達する二重同期状態について衛星と惑星の質量の比は以下の臨界値<sup>55</sup>

$$\left( \frac{m_s}{m_p} \right)_{\text{crit}} = \left( \frac{2Q_p}{39\alpha k_{2p}\Omega_i\Delta t} \right)^{1/4} \left( \frac{3\alpha^2}{4\pi\mathcal{G}\rho_p} \right)^{1/2} \frac{2\pi}{T_i} \quad (4.237)$$

を超さなくてはならないと推定できる. これは主に最初の自転周期によって決められ, 惑星つまり中心天体の大きさを含む系のその他の係数への依存は非常に小さい. 地球-月系について  $T_i \sim 4$  h と仮定すると, そのとき  $(m_s/m_p) \approx 0.0147$  であり, 観測された比 0.0123 よりわずかに大きい.

太陽系内で最も高い質量比を持つ系は冥王星と Charon の系である. ハッブル宇宙望遠鏡による冥王星の重心まわりのゆらぎの観測によると, 質量比は  $0.0837 \pm 0.0147$  であり (Null et al 1993), これは臨界値をかなり上回っている. 現在では冥王星と Charon は二重同期状態にあることが唯一わかっている天体で, 見ることの出来ない小惑星の組も潮汐自転遅延を受けているだろう. 密度  $3 \text{ g cm}^{-3}$  で剛性率  $\mu \sim 5 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$  で  $Q_p \sim 100$  (全て適した値) の小さな岩石天体に式 (4.237) を適用し, 最初の自転周期を  $\sim 8$  h と仮

<sup>54</sup>式 (4.214)

$$\frac{2}{13} a_0^{13/2} = \frac{3k_{2p}}{Q_p} \left( \frac{\mathcal{G}}{m_p} \right)^{1/2} C_p^5 m_s \Delta t$$

<sup>55</sup>テキスト左辺  $\left( \frac{m_p}{m_s} \right)_{\text{crit}}$  は誤植.

定すると (Alfvén 1964), そのとき半径  $\sim 100$  km の小惑星の臨界質量比は 0.034 で 10 m の小さな小惑星でも 0.065 までしか増加しない. 太陽系内の多くの非常に小さな天体が潮汐自転遅延を受けているだろう.