

## 2 The Two-body Problem

### 2.1 Introduction

2体問題とは、万有引力の法則で記述される2つの質点の相互作用による運動を考える問題である。2体問題は、太陽系力学の中で最も単純で、かつ解析的にとくことができる。また、太陽系には様々な質量の物体があるが、2体問題に近似して考えることができる場合が多い、という意味で重要である。通常3体目の天体との相互作用は2体の系に対する摂動として扱うからである。

Newton は、著書 Principia(1687) の中で惑星の楕円運動は2種類の力によって生じると述べている。1つは楕円中心に向かう力で、もう1つは焦点に向かう力である。しかし、後者でないとケプラーの法則で示されるような運動は起こらない。この章では惑星運動に関する基本的な方程式をたてて、実際に2体問題を解き、ケプラーの法則がどのようにして成り立つのかを示す。

### 2.2 Equations of Motion

2体問題の例として質量がそれぞれ  $m_1, m_2$  の2つの質点について考える。各点の位置ベクトルは  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  である。また、 $m_1$  を基準として  $m_2$  の相対ベクトルは  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  と書ける (図 2.1)。2つの質点の運動方程式は以下のように書ける。

$$\mathbf{F}_1 = +g \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_2 = -g \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (2.1)$$

$g$  は重力定数。  $g = 6.67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$  これらから、

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0, \quad (2.2)$$

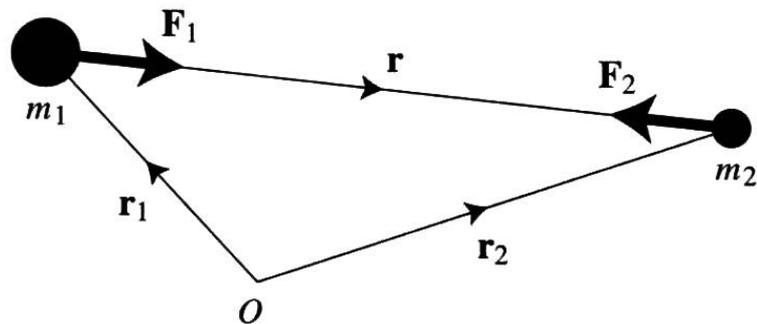


図 2.1: 位置ベクトル  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  2つの質点に働く力のベクトル図

が求まる. 上式を両辺 2 階積分する.

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a} \quad \text{and} \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は定数ベクトル.  $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$  を使って重心の位置ベクトルを表現する.

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2} \quad \text{and} \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

この式から, 2 体が互いの引力のみで運動している場合, その重心の運動は静止しているか, 等速直線運動を行っているかのどちらかということになる. ここで, 惑星の運動に話を持っていくために, 相対ベクトル  $\mathbf{r}$  を使って運動方程式を書き直す.  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$  とすると式 (2.1) は,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (2.5)$$

$\mu = G(m_1 + m_2)$ , となり, 相対運動の方程式となる. この運動方程式を解き  $m_2$  の  $m_1$  に関する相対軌道を得るためには, いくつかの相対運動における定数を求める必要がある. ここではまずそれら運動の定数の一つである角運動量ベクトルについて述べる.

式 (2.5) の両辺と  $\mathbf{r}$  の外積をとると  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ . さらに両辺積分すると

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.6)$$

$\mathbf{h}$  は定数ベクトルであり,  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  に垂直である. つまり,  $m_2$  の相対運動は,  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  に垂直な平面内に限定されるということがわかる. この平面を軌道面という.  $m_2 \ll m_1$  とすれば  $h = |\mathbf{h}|$  は単位質量あたりの  $m_2$  の角運動量として近似できる.

ここで,  $r$  を極座標で表現してみよう. 座標原点は  $m_1$  とし,  $\theta = 0$  となる基準線は任意の位置でとることとする. また  $m_1, m_2$  の重心は慣性系を運動しているが  $\theta = 0$  の基準線の方法は一定とする. 動径方向の単位動径ベクトルを  $\hat{\mathbf{r}}$ , 角度方向の単位ベクトルを  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  とし,  $r$  の位置, 速度, 加速度を表現するとそれぞれ以下ようになる.

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.7)$$

式 (2.6) に上記の  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  を代入すると

$$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} \quad (2.8)$$

となる.  $\hat{\mathbf{z}}$  は軌道平面に垂直な単位ベクトルで, 向きは  $r$  から  $\theta$  へ右ねじを回したときに進む方向. これより

$$h = r^2\dot{\theta}. \quad (2.9)$$

この式からわかることは以下の通りである.

質点  $m_2$  が微小時間  $\delta t$  の間だけ運動したとする.  $t = 0$  のとき  $m_2$  の座標が  $(r, \theta)$  とすれば,  $t = \delta t$  後の座標は  $(r + \delta r, \theta + \delta \theta)$  である. その間に動径ベクトルが横切った領域の面積は

$$\delta A \approx \frac{1}{2} r(r + \delta r) \sin \delta \theta \approx \frac{1}{2} r^2 \delta \theta. \quad (2.10)$$

両辺を  $\delta t$  で割り,  $\delta t \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h. \quad (2.11)$$

式 (2.9) より  $h$  は定数であるので, 動径が一定時間に横切る軌道面の面積は常に一定であることがわかる. つまり式 (2.11) は Kepler の第 2 法則と等価である. しかし, このことは万有引力に対してのみ成り立つわけではなく, 2 物体の間に引力が働いていれば成り立つ.

### 2.3 Orbital Position and Velocity

この節では前節で求めた運動方程式から, 惑星軌道とその速度について解を求め, Kepler の第 1, 3 法則, またそこから派生して導かれる性質について考える.

式 (2.7) の  $\ddot{\mathbf{r}}$  を式 (2.5) に代入することで相対運動の方程式を求めることができる. この方程式に対して  $\hat{r}$  成分の恒等式を考えると, v

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.12)$$

$\theta$  の関数としての  $r$  の解を求めるため,  $u = 1/r$ ,  $h = r^2\dot{\theta}$  とする. これらに従って  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$  を求めると以下ようになる.

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} \quad \text{and} \quad \ddot{r} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (2.13)$$

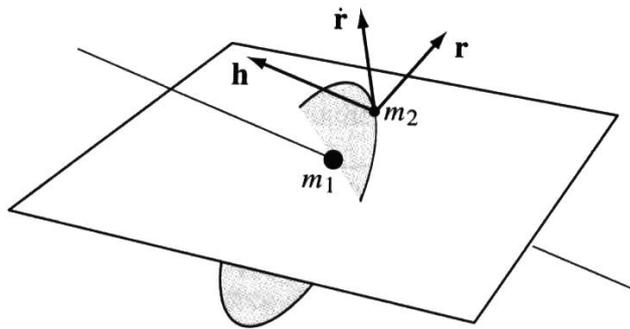


図 2.2:  $m_1$  を基準とする  $m_2$  の相対運動から軌道面を定義することができる. 角運動量ベクトル,  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ , が常に軌道面に対して垂直だからである.

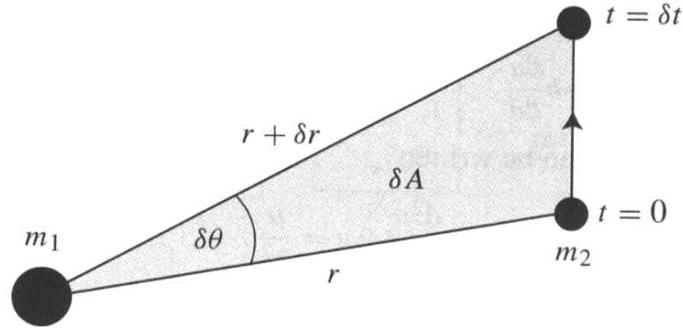


図 2.3:  $\delta A$  は位置ベクトルが時間  $\delta t$  の間に横切った領域の面積である.

これを使って式 (2.12) を書き換えると,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}, \quad (2.14)$$

となる.

この 2 階線形微分方程式の一般解は

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \varpi)], \quad (2.15)$$

$e, \varpi$  は積分定数. よって解  $r$  は

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (2.16)$$

$p = h^2/\mu, p$  は通径(半直弦, 放物軸の法線と焦点を通る線),  $e$  は離心率と呼ばれる. この式からは,  $e$  を変えることで様々な曲線が得られるが, 全て円錐と平面の交線として表すことができる. このことから, 式 (2.16) は円錐曲線(conic section)と呼ばれる.

円錐曲線から得られる曲線は  $e$  によって区別され, 4 種類ある.

円:	$e = 0,$	$p = a;$
楕円:	$0 < e < 1,$	$p = a(1 - e^2);$
放物線:	$e = 1,$	$p = 2q;$
双曲線:	$e > 1,$	$p = a(e^2 - 1).$

$a$  は半長軸. 放物線の場合は,  $p$  を  $q$  を用いて表現することができる. この時  $q$  は放物線の近点距離である. 円錐と平面との交線で表される曲線は形によって名前がついている.(図 2.4) 平面が水平面に並行であり軸に対して対称であれば円, 平面と水平面の角度が円錐を頂点を上にして立てたときの側面と水平面のなす角度より小さいときは楕円,

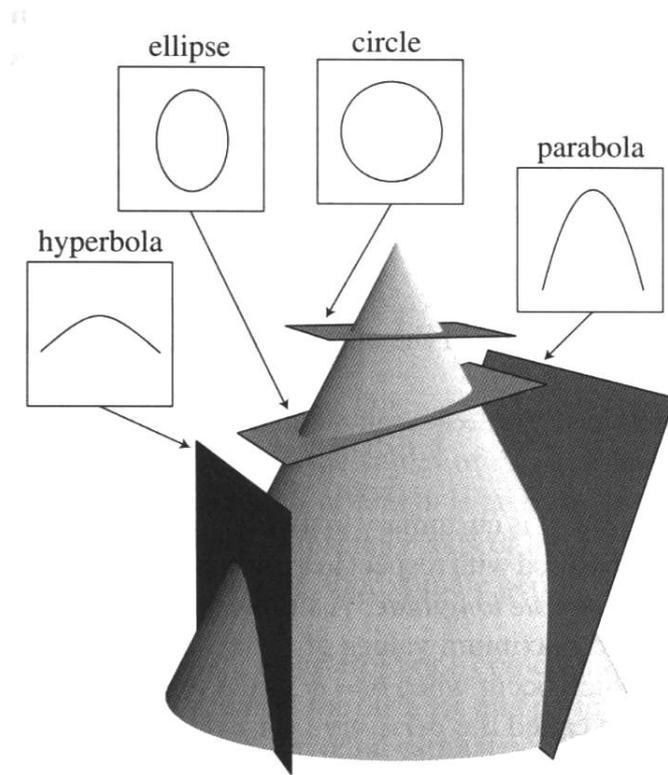


図 2.4: 円錐と平面により作られる曲線に関する図

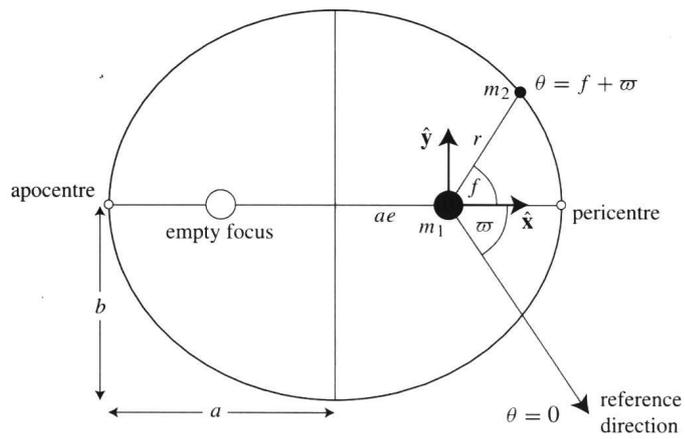


図 2.5: 各パラメータの楕円上での位置.  $a$ : 半長軸,  $b$ : 半短軸,  $e$ : 離心率,  $\varpi$ : 近点引数.

円錐の側面の角度と平行なときは放物線, そして, 地面と平面とのなす角度の大きさが側面の角度より大きく垂直より小さければ双曲線となる.

この2体問題の解から, 太陽系の惑星軌道は楕円の形をしており, 閉じた軌道を動いていると考えられる. ゆえに Kepler の第1法則が導かれ, また, Kepler の第1法則は引力の逆2乗則の結果として捉えることができる.

彗星に関してはその多くが  $e \approx 1$  の値を持つのに対して, 天王星 ( $e = 0.25$ ), 海王星 ( $e = 0.21$ ), Nereid ( $e = 0.75$ ) という例外はあるが, 太陽系内の主な天体はそのほとんどが  $e \ll 1$  である. よってこの教科書で扱う天体は, 楕円運動をする天体に絞るものとする.

楕円運動に限って考えると  $a, e$  には幾何学的に以下のような関係がある.

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.17)$$

$b$  は楕円の半短軸の長さである (図 2.5). また, 前ページより  $p = a(1 - e^2)$  であり, 動径  $r$  は

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (2.18)$$

と表される.  $\theta$  は特に True Longitude (経度, 太陽系ならば黄経) と呼ばれ, 春分点からの角度である (図 2.5). 天体力学では, 慣性系において角度を用いるときは慣習的に黄経を用いる.  $\varpi$  は近点引数 (the longitude of pericentre) と呼ばれ, 近点の黄経である. 近点引数は2体問題においては定数であるが, 3体以上の系では時間と共に変化する. 式 (2.18) を見ると, この式から軌道半径は最大値  $r_a = a(1 + e)$  と最小値は  $r_p = a(1 - e)$  であることがわかる. そのときの  $\theta$  はそれぞれ  $\varpi, \varpi + \pi$  である. これらの値の軌道上での点はそれぞれ遠(心)点 (apocentre), 近(心)点 (pericentre), と呼ばれる.

近点引数の定義から, 真近点離角 (true anomaly) と呼ばれる,  $f = \theta - \varpi$  を決めることができる.  $f, \theta$  は  $2\pi$  の周期を持ち,  $\varpi$  は定数である.  $f$  を使って式 (2.18) を書き直すと

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (2.19)$$

となる.

ここで,  $m_1$  を中心として近点方向に  $x$  軸を持つデカルト座標を考えると, 位置ベクトルのそれぞれの成分は

$$x = r \cos f \quad \text{and} \quad y = r \sin f. \quad (2.20)$$

ある位置ベクトルがある周期  $T$  で楕円上を一周するとき, ベクトルが横切る面積は単純に  $A = \pi ab$  である. 式 (2.11) よりこの値は  $hT/2$  に等しい. ゆえに  $h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2)$  より,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (2.21)$$

これは Kepler の第3法則と等価である. この式から物体の周期  $T$  は離心率  $e$  に依存せず,  $\mu^1$ , 半長軸  $a$  にのみ依存することがわかる.

<sup>1</sup> $\mu = G(m_1 + m_2)$

質量  $m, m'$  の惑星が,  $m_c$  の周りを回っている状態を考える. 周期はそれぞれ  $T, T'$ , 半長軸はそれぞれ  $a, a'$  とする. この場合, 式 (2.21) から

$$\frac{m_c + m}{m_c + m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2, \quad (2.22)$$

が導かれる. 太陽系のように  $m, m' \ll m_c$  とすると,  $\left(\frac{a}{a'}\right)^3 \approx \left(\frac{T'}{T}\right)^2$ . ここで,  $a = 1(AU), T = 1(yr)$  とすると,  $T' \approx a'^{3/2}$  を得る.

Kepler の第 3 法則より, もし太陽系天体 (例えば小惑星, 彗星) が衛星を持っているとすると, 衛星の周期を観測することによって, 対象天体の質量を求めることができる. 式 (2.21) を太陽 - 天体, 天体 - 衛星間に適用する.  $m_c, m, m'$  はそれぞれ太陽, 天体, 衛星の質量とする.  $a, T$  についても同様とすると,

$$\frac{m + m'}{m_c + m} \approx \frac{m}{m_c} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2, \quad (2.23)$$

ここで  $m' \ll m, m \ll m_c$  とした. この式は, 天体の質量はその周りを公転する衛星の軌道パラメータから求めることが可能であるということを意味している.

例として小惑星帯の天体 Ida とその衛星 Dactyl をあげる (図 (2.6)). この小惑星の質量は小さいので, 従来は具体的な値を求めることができなかった. しかし現在では, Galileo により Dactyl が発見されたことで, その周期と軌道半径から Ida の質量が  $2.6 \pm 0.5 \text{gcm}^{-3}$  と計算されている (Belton et al.1995).

ケプラー運動をしている天体では  $\theta$  は 0 から  $2\pi$  まで周期的に変化しており, 平均運動  $n$  を求めることができる.

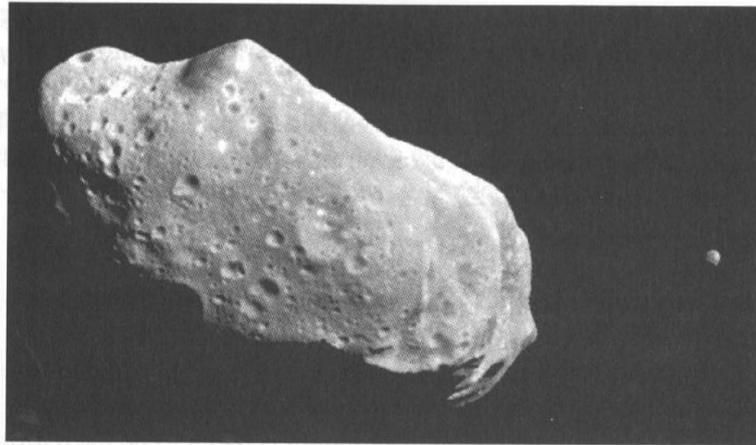


図 2.6: 小惑星 Ida とその衛星 Dactyl (Galileo 探査機にて撮影, NASA, 1993). Ida の大きさはおおよそ,  $56 \times 24 \times 21 \text{km}$ . Dactyl は約  $1.4 \times 1.4 \times 1.4 \text{km}$ .

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (2.24)$$

さらに, 式 (2.21) より

$$\mu = n^2 a^3 \quad \text{and} \quad h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (2.25)$$

が導かれる. 平均運動の値は, 定数ではあるが,  $\dot{f}$  は経度の関数である.

運動に関する積分定数をもう1つ導くため式 (2.5) と  $\dot{r}$  の内積を取り, 式 (2.7) の  $r$ ,  $\dot{r}$  値を適用すると,

$$\dot{r} \cdot \ddot{r} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0. \quad (2.26)$$

これを両辺  $t$  で積分すると,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C, \quad (2.27)$$

を得る.  $v^2 = \dot{r} \cdot \dot{r}$  であり,  $C$  は積分定数である. 式 (2.26), 活力(エネルギー) 積分(vis viva integral) と呼ばれる, は天体の全エネルギーが保存することを示している. これまでの結果より2体問題においては4つの定数が存在することがわかった. エネルギー積分  $C$  と角運動量  $h$  の3成分である. 後で出てくるがこれらは, 軌道要素, または離心ベクトルのような別の量で表現することも可能である. このことを  $C$  に関して  $v^2$  を別の表現に書き換えることを行ってみよう.

今,  $\varpi$  は固定されているので  $\dot{\theta} = d(f + \varpi)/dt = \dot{f}$ , このことと式 (2.7) での  $\dot{r}$  を使うと,

$$v^2 = \dot{r} \cdot \dot{r} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2. \quad (2.28)$$

式 (2.19) を微分すると,

$$\dot{r} = \frac{r \dot{f} e \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (2.29)$$

上式に対して  $r^2 \dot{f} = h = na^2 \sqrt{1 - e^2}$  を使うと,

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f, \quad (2.30)$$

$$r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f). \quad (2.31)$$

この2式から式 (2.27) を書き換えると

$$v^2 = \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} (1 + 2e \cos f + e^2) = \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} \left( \frac{2a(1 - e^2)}{r} - (1 - e^2) \right). \quad (2.32)$$

ゆえに,  $v^2$  は,

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (2.33)$$

となり, 速度と動径の関係を導くことができた. この式からケプラー運動をしている天体の速度の最大値, 最小値を求めることができる. 天体の速度は近点で最大値 ( $f = 0$ ), 遠点 ( $f = \pi$ ) で最小値をとる. それぞれの値は

$$v_p = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{and} \quad v_a = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad (2.34)$$

である.

また, 式 (2.20) をそれぞれ時間微分し, 式 (2.30) 式 (2.31) を使うことで速度ベクトルの  $x, y$  成分を求めることができる.

$$\dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin f, \quad (2.35)$$

$$\dot{y} = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f) \quad (2.36)$$

式 (2.33) と式 (2.26) を比較すると, エネルギー積分  $C$  が以下の形で表されることがわかる.

$$C = -\frac{\mu}{2a}. \quad (2.37)$$

ケプラー運動をする天体の全エネルギーは半長軸の長さにも依存し, 離心率とは無関係であることが示された.

同様にすると放物線, 双曲線についてもエネルギー積分の値を求めることができる.

$$c_{para} = 0 \quad \text{and} \quad C_{hyper} = \frac{\mu}{2a}. \quad (2.38)$$

## 2.4 The Mean and Eccentric Anomalies

前章において半長軸, 離心率がわかっている物体に対しては真近点離角  $f$  が与えられれば, 軌道半径と速度を求めることができることを理解した. しかし, 通常は任意の時間での惑星の位置が求めたいと考えるのが普通であろう. ところが前節での結果からは,  $f$  と時間  $t$  の関係はわからない.

$f$  と  $t$  との関係を導くために,  $2\pi$  周期であり, 時間に関して線形な関数である離心近点離角を導入する. この節では離心近点離角と, 下で定義する平均近点離角  $M$  との関係を使って  $f, t$  を関連付けていく. このことは後に, 天体運動に関する諸量の時間平均を求めるときに有益となる.

平均運動の式 (2.24) を用い,  $\tau$  を近点通過時刻とすると,

$$M = n(t - \tau), \quad (2.39)$$

平均近点離角  $M$  を定義することができる.  $M$  は近点方向の直線を基準とし, 時間と共に  $n$  の割合で増加する.  $M$  の定義と式 (2.19) より,  $t = \tau$  (近点を通る時) や  $t = \tau + T/2$  (遠点を通る時) のとき, それぞれ  $M = f = 0$ ,  $M = f = \pi$  となるのは明らかである.  $t$  が周期の整数倍の時も同様の関係をもつ.

$M$  は幾何学的に意味のある値ではないが, ある角度と関係をもっている. 半径  $a$  の円を, 半長軸  $a$ , 離心率  $e$  の楕円に外接させ (図 2.7(a)), その楕円の主軸に垂直な直線をひき, 外接円に交差させる. この作業により離心近点離角  $E$  という角度を決めることができる. 離心近点離角  $E$  は  $f = 0$  の基準線と, 公転する物体を通り半長軸に垂直な直線と外接円との交点を結ぶ線分のなす角度で定義される (図 2.7(b)).  $E$  は  $f = 0$  と一致し,  $E = \pi$  は  $f = \pi$  と一致する.

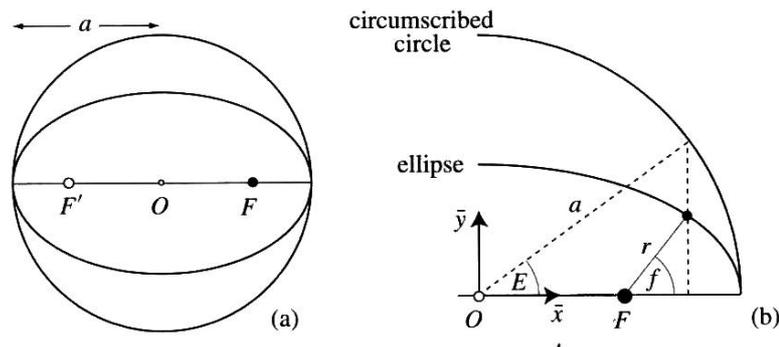


図 2.7: (a) 長さ  $a$  の半長軸を持つ楕円と外接する半径  $a$  の円 (b) 真近点離角  $f$  と離心近点離角  $E$  の関係.

図 2.7 中の  $\bar{x}, \bar{y}$  のような直行座標系で楕円を表すと

$$\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 = 1. \quad (2.40)$$

$a, b$  はそれぞれ半長軸の長さ, 半短軸の長さである.  $\bar{x} = a \cos E$  から  $\bar{y}^2 = b^2 \sin^2 E$  が求まる. さらに  $b$  に関する式 (2.17)<sup>2</sup> を代入して,  $\bar{y} = a\sqrt{1-e^2} \sin E$ . よって  $r$  の水平方向と垂直方向への射影は

$$x = a(\cos E - e) \quad \text{and} \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (2.41)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$  より,

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.42)$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (2.43)$$

が導かれる. これら 2 式により, 離心近点離角  $E$  と軌道半径  $r$ , 真近点離角  $f$  の関係とをそれぞれ求めることができた. さらに離心近点離角と真近点離角との関係は, タンジェントを使ったより簡単な表現に書き直すこともできる. 式 (2.43) を変形する.

$$1 - \cos f = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}, \quad 1 + \cos f = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}, \quad (2.44)$$

さらに三角関数の 2 倍角の公式<sup>3</sup> を使えば,

$$2 \sin^2 \frac{f}{2} = \frac{1+e}{1-e\cos E} 2 \sin^2 \frac{E}{2}, \quad 2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1-e}{1-e\cos E} 2 \cos^2 \frac{E}{2}, \quad (2.45)$$

と書き直され,

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (2.46)$$

と書くことができる. 式 (2.43) または式 (2.46) を使えば  $r, f$  を決定することができる. しかし, 任意の時間  $t$  における天体の位置を知るには,  $M$  と  $E$  との関係を明らかにする必要がある.

$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{f})^2$  と, 式 (2.31), (2.33) を使って,

$$\dot{r}^2 = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{n^2 a^4 (1-e^2)}{r^2}, \quad (2.47)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}. \quad (2.48)$$

この式は, 式 (2.42) を使った以下の置き換えを行うことで積分可能となる.

$$r - a = -ae \cos E \quad (2.49)$$

<sup>2</sup>式 (2.17) :  $b^2 = a^2(1-e^2)$

<sup>3</sup>2 倍角の公式 :  $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$

よって式 (2.48) は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E} \quad (2.50)$$

この式は式 (2.41) をそれぞれ微分し,  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = h (h = na^2\sqrt{1-e^2})$  に代入することでも求めることができる. 式 (2.50) は簡単に積分することができて,

$$n(t - \tau) = E - e \sin E \quad (2.51)$$

$t = \tau$  のとき  $E = 0$ . ゆえに式 (2.39) は

$$M = E - e \sin E \quad (2.52)$$

上式は Kepler 方程式と呼ばれる. Kepler 方程式から任意の時間における軌道上の位置を求めることができる. ある時間が与えられたときの  $r, f$  を求める手順としては, まず (i) 式 (2.39)<sup>4</sup> から  $M$  を決め, 次に (ii)  $E$  について式 (2.52) を解き, さらに (iii) 式 (2.41)<sup>5</sup>, または (2.43)<sup>6</sup> と式 (2.19)<sup>7</sup> を使って  $r$  と  $f$  を求める, となる.

これまで, 角度に関して経度 (the true longitude)  $\theta$ , 真近点離角 (the true anomaly)  $f$ , 平均近点離角 (the mean anomaly)  $M$ , 離心近点離角 (the eccentric anomaly)  $E$ , 近点引数 (the longitude of pericentre)  $\varpi$  が登場した. 角度に関するパラメータとして最後に平均経度 (the mean longitude),  $\lambda$  を紹介しておく.

$$\lambda = M + \varpi, \quad (2.53)$$

$\lambda$  は時間に関して線形の関数であり, また,  $M$  が含まれており円軌道の場合を除いては図に表せるものではない.

Kepler 方程式は  $E$  に関する超越方程式<sup>8</sup> であり, 単純に  $E = j\pi (M = j\pi, j$  は整数) の場合の解を除いて,  $E$  の  $M$  に関する解を求めることはできない. Kepler 方程式を解く簡単な方法として, 級数を用いる解法と, 数値解を求める方法がある. どちらの場合も  $E, M$  はラジアンで表現できると仮定する.

級数解を求めるには, まず以下の様な形の反復法を使う.

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

この漸化式の初項  $E_0$  としてまず  $E_0 = M$  と近似する.  $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$  の公式と  $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ ,  $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$  ( $x \ll 1$ ) を使

<sup>4</sup>式 (2.39) :  $M = n(t - \tau)$

<sup>5</sup>式 (2.41) :  $x = a(\cos E - e), y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$ .

<sup>6</sup>式 (2.43) :  $\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$

<sup>7</sup>式 (2.19) :  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$

<sup>8</sup> $f(x)$  が  $x$  の多項式でない関数のとき,  $f(x) = 0$  を超越方程式という.

うと最初の3つのステップの結果は,

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin M, \\ E_2 &= M + e \sin(M + e \sin M) \approx M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M, \\ E_3 &= M + e \sin(M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M) \\ &\approx M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right) \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M, \end{aligned} \quad (2.55)$$

のようになる. 各ステップにおける式の変化は離心率  $e$  に関する項が1つずつ加わるだけである. このことから,  $i$  を無限大にとばすことにより,

$$E - M = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e) \sin sM, \quad (2.56)$$

が導かれる. 式 (2.56) の形から  $E - M$  は  $M$  に関する Fourier 正弦級数で展開できることがわかる. Fourier 係数  $b_s(e)$  の具体的な形や, その他の楕円運動の展開式に関しては 2.5 章で詳しく扱う.

注意すべきこととして, Kepler 方程式の級数解は  $e > 0.6627434$  のとき発散してしまうことが知られている (Hagihara 1970). 数値解法ではこのような制限は存在しない.

次に数値解を求める方法の例を挙げる. Dandy(1988) は Kepler 方程式に関する様々な種類の数値解法を与えている.

$$f(E) = E - e \sin E - M = 0, \quad (2.57)$$

Kepler 方程式をこの形に書き換えることで, 非線形の方程式  $f(E) = 0$  の解法の一つ, Newton-Raphson 法を使うことができる. Newton-Raphson 法は以下のように表される.

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

ここで,  $f'(E_i) = df(E_i)/dE_i = 1 - e \cos E_i$  である. この Newton-Raphson 法は 2 次収束であるが, Danby(1988) は Newton-Raphson 法を変形することで 4 次収束の性質を持たせることができることを示した. Danby の表記と Taylor 展開を使うと,  $f(E) = 0$  は

$$0 = f(E_i + \epsilon_i) = f(E_i) + \epsilon_i f'(E_i) + \frac{1}{2}\epsilon_i^2 f''(E_i) + \frac{1}{6}\epsilon_i^3 f'''(E_i) + O(\epsilon_i^4). \quad (2.59)$$

と書ける. ここで  $E_i$  は数値解,  $\epsilon_i$  は数値解  $E_i$  と真の解  $E$  との差を表す.  $\epsilon_i$  に関して高次の項を無視すると,

$$0 = f_i + \delta_i f'_i + \frac{1}{2}\delta_i^2 f''_i + \frac{1}{6}\delta_i^3 f'''_i. \quad (2.60)$$

$\delta_i$  は式 (2.60) の解である. また  $f_i = f(E_i), f'_i = f'(E_i)$  とした. ここから,

$$\delta_i = -\frac{f_i}{f'_i + \frac{1}{2}\delta_i f''_i + \frac{1}{6}\delta_i^2 f'''_i}, \quad (2.61)$$

と書き換える. 式 (2.61) を解くため以下のように定義する.

$$\delta_{i1} = -\frac{f_i}{f'_i}, \quad \delta_{i2} = -\frac{f_i}{f'_i + \frac{1}{2}\delta_{i1} f''_i}, \quad \delta_{i3} = -\frac{f_i}{f'_i + \frac{1}{2}\delta_{i2} f''_i + \frac{1}{6}\delta_{i2}^2 f'''_i}. \quad (2.62)$$

この定義を使って

$$E_{i+1} = E_i + \delta_{i3}, \quad (2.63)$$

と書く. この解法は単純な Newton-Raphson 法よりも 1 回の反復にかかる計算量は多いが, 計算済の量を使うように作られていること, 収束が早いこと (4 次収束), の 2 点から Newton-Raphson 法よりも効率的である

これら 2 つの計算法ではどちらも, まず  $E_0$  を仮定している.  $e \ll 1$  のとき  $E \approx M$  であり  $E_0 = M$  とするのは一見間違っていないように見える. しかしこの仮定が正しいのは  $e = 0$  もしくは  $M$  が  $\pi$  の整数倍の時だけである. Danby(1988) は  $M$  が  $0 \leq M \leq 2\pi$  の範囲で減少することから,  $E_0$  は

$$E_0 = M + \text{sign}(\sin M)ke, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (2.64)$$

とした方がより正しい解を得られると考えた.  $k$  の値は 0.85 が推奨されている.

Kepler 方程式の解  $E$  を使うことで任意の時間  $t$  での位置ベクトルと時間ベクトルを計算することができる. 物体の  $t = t_0$  のときの焦点からの位置ベクトルと速度ベクトルの初期値がそれぞれ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$  とわかっているとすると, ある 2 つの関数とその微分形を用いることで, 物体の位置と速度を計算する作業を簡単化することができる. 初期値  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  が平行でないとする,  $\mathbf{r}(t)$  は

$$\mathbf{r}(t) = f(t, t_0)\mathbf{r}_0 + g(t, t_0)\mathbf{v}_0, \quad (2.65)$$

と書ける.

ここで焦点を中心とし, 近点方向を  $x$  軸とする直交座標,  $x, y$  の各成分は

$$x = f(t, t_0)x_0 + g(t, t_0)\dot{x}_0 \quad \text{and} \quad y = f(t, t_0)y_0 + g(t, t_0)\dot{y}_0 \quad (2.66)$$

ここで,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0), \dot{\mathbf{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$  とした. 上の 2 式は  $f, g$  に関する連立方程式であり, これを解くと

$$f(t, t_0) = \frac{x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0} \quad \text{and} \quad g(t, t_0) = \frac{yx_0 - xy_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0} \quad (2.67)$$

ここで  $\cos f = x/r, \sin f = y/r$  であることから, 式 (2.35), (2.36)<sup>9</sup> は離心近点離角  $E$  を使った形で表すことができる.

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \sin E \quad \text{and} \quad \dot{y} = -\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \quad (2.68)$$

式 (2.41)<sup>10</sup> と式 (2.68) から,  $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$  を式 (2.67) のそれぞれに代入すると

$$\begin{aligned} f(t, t_0) &= \frac{a}{r_0} \{\cos(E - E_0) - 1\} + 1, \\ g(t, t_0) &= (t - t_0) + \frac{1}{n} \{\sin(E - E_0) - (E - E_0)\}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

となる.

時間  $t$  での速度  $\boldsymbol{v}(t)$  は  $\boldsymbol{r}(t)$  と同様に

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{f}\boldsymbol{r}_0 + \dot{g}\boldsymbol{v}_0, \quad (2.70)$$

と書ける.  $f, g$  の時間での偏微分である,  $\dot{f}, \dot{g}$  は式 (2.50)<sup>11</sup> の  $\dot{E}$  を式 (2.67) に適用することで得られる.

$$\begin{aligned} \dot{f}(t, t_0) &= -\frac{a^2}{rr_0} n \sin(E - E_0), \\ \dot{g}(t, t_0) &= \frac{a}{r} \{\cos(E - E_0) - 1\} + 1, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$f, g$  の関数を使うことが意味するのは Kepler 方程式から  $E$  が求まりさえすれば,  $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$  を求めることができるということである. 我々は運動が軌道面内のみであるとして,  $f, g, \dot{f}, \dot{g}$  を定式化してきたが, これらは別の基準面を持つ系においても同様に適用することができる.  $f, g$  を使うと, 座標系の変換はベクトル部分の変換を行うだけでできることになる (2.8 節参照). このことは数値計算における計算機資源の大幅な節約となる.

<sup>9</sup>式 (2.35) :  $\dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin f$

式 (2.36) :  $\dot{y} = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f)$

<sup>10</sup>式 (2.41) :  $x = a(\cos E - e), y = a\sqrt{1-e^2} \sin E$

<sup>11</sup>式 (2.50) :  $\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1-e \cos E}$

## 2.5 Elliptic Expansions

太陽系力学に関する問題の内、解析的に解けるものはほとんどないので、近似解を使って実際の問題に適用する場合が多い。太陽系力学の多くの分野で使われている微量として離心率(the eccentricity)と軌道傾斜角(the inclination)(基準面と軌道面のなす角度)がある。例えば2.4節では Kepler 方程式を離心率  $e$  で級数展開し微量として扱うことで解いた。一般的に展開を行う際は、必要な解を得るため一定以上の高次の項を無視してから問題に適用する。この節では、今後必要となる多くの基礎的な展開法について述べる。

前節で  $E$  の  $M$  を使った級数解をどのようにして求めるかについて触れた。式(2.52)<sup>12</sup>が  $E - M = e \sin E$  とかけるとすると、 $E - M$  は周期を持つ奇関数であるので、Fourier 正弦級数を使って展開することができる。

$$e \sin E = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e) \sin sM. \quad (2.72)$$

係数  $b_s(e)$  は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} b_s(e) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \sin E \sin sM dM \\ &= \left[ -\frac{2}{s\pi} e \sin E \cos sM \right]_0^{\pi} + \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos sM d(e \sin E). \end{aligned} \quad (2.73)$$

右辺第1項は0であり、Kepler 方程式を使って  $d(e \sin E) = d(E - M)$  と書けるので、

$$b_s(e) = -\frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos sM dM + \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos sM dE. \quad (2.74)$$

ここでも右辺第1項は0となり、 $M$  に Kepler 方程式を代入すると

$$b_s(e) = -\frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos(sE - se \sin E) dE. \quad (2.75)$$

この積分は第一種 Bessel 関数  $J_s$  で書き直すことができる。

$$b_s(e) = \frac{2}{s} J_s(se), \quad (2.76)$$

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(sE - se \sin E) dE. \quad (2.77)$$

Bessel 関数  $J_s$  では  $s$  が正の値をとる場合、以下の形に書き直すことができる。

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{2\beta}}{\beta!(s+1)(s+2)\dots(s+\beta)} \quad (2.78)$$

<sup>12</sup>式(2.52)  $M = E - e \sin E$

この級数は全ての  $x$  において収束する.  $s = 1, 2, 3, 4, 5$  における  $J_s(x)$  を示す.

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 + O(x^7) \\
 J_2(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + O(x^6), \\
 J_3(x) &= \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{768}x^5 + O(x^7), \\
 J_4(x) &= \frac{1}{384}x^4 + O(x^6), \\
 J_5(x) &= \frac{1}{3840}x^5 + O(x^7).
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

結局, Kepler 方程式の解は

$$\begin{aligned}
 E &= M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin_s M \\
 &= M + e \sin M + e^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2M \right) + e^3 \left( \frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) \\
 &+ e^4 \left( \frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M \right) + O(e^5).
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

この式は前節 2.4 での結果とも一致する. また前節でも述べたことだがこの級数は  $e$  が微量のときは急速に収束するが,  $e > 0.6627434$  のときは発散してしまう. このことはこの章に出てくる級数は全て, 十分大きな  $e$  の下では発散してしまうことを示唆している.

Kepler 方程式の級数解に加えて, 今後多くの種類の級数展開を扱う必要があるが, 全て Bessel 関数を使って表現することができる. この本では特に,  $r/a, \cos E, (a/r)^3, \sin f, \cos f, f - M$  に関する級数展開が必要となる.

$r/a$  に関する級数展開は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{a} &= 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \frac{d}{de} J_s(se) \cos sM \\
 &= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + 3e^3(\cos M - \cos 3M) \\
 &+ \frac{e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + O(e^5).
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

この級数は 2.6 節の *The Guiding Center Approximation* や, 6.3 節の摂動関数において使われる. この級数において  $\cos E = (1 - r/a)$  とすると  $\cos E$  についての展開式が得ら

れる.

$$\begin{aligned}
\cos E &= -\frac{1}{2}e + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \frac{d}{de} J_s se \cos sM \\
&= \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) \\
&\quad + e^3 \left( \frac{1}{3} \cos 4M - \frac{1}{3} \cos 2M \right) \\
&\quad + e^4 \left( \frac{5}{192} \cos M - \frac{45}{128} \cos 3M + \frac{125}{384} \cos 5M \right) + O(e^5). \tag{2.82}
\end{aligned}$$

$r/a$  の級数展開式から  $(r/a)^3$  での級数展開を得ることができる.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^3 &= 1 + 3e \cos M + e^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos 2M \right) \\
&\quad + e^3 \left( \frac{27}{8} \cos M + \frac{53}{8} \cos 3M \right) \\
&\quad + e^4 \left( \frac{15}{8} + \frac{7}{2} \cos 2M + \frac{77}{8} \cos 4M \right) + O(e^5). \tag{2.83}
\end{aligned}$$

$\sin f, \cos f$  に関する展開は以下の形で与えられる.

$$\begin{aligned}
\sin f &= 2\sqrt{1-e^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{de} J_s (se \sin sM) \\
&= \sin M + e \sin 2M + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin 3M + \frac{7}{8} \sin M \right) \\
&\quad + e^3 \left( \frac{4}{3} \sin 4M - \frac{7}{6} \sin 2M \right) \\
&\quad + e^4 \left( \frac{17}{192} \sin M - \frac{207}{128} \sin 3M + \frac{625}{384} \sin 5M \right) + O(e^5). \tag{2.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos f &= -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{s=1}^{\infty} J_s (se \cos sM) \\
&= \cos M + e(\cos 2M - 1) \frac{9e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) \\
&\quad + \frac{4e^3}{3} (\cos 4M - \cos 2M) \\
&\quad + e^4 \left( \frac{25}{192} \cos M - \frac{225}{128} \cos 3M + \frac{625}{384} \cos 5M \right) + O(e^5). \tag{2.85}
\end{aligned}$$

これらの級数は5.4節の spin-orbit 共鳴, 6.5節の摂動関数 (the planetary disturbing function) の展開において使われる.

最後に  $f - M$  での級数展開を示す。 $f - M$  は中心差(the equation of the centre) と呼ばれる量である。式 (2.19)<sup>13</sup>, (2.31)<sup>14</sup> より,

$$r^2 \dot{f} = na^2(1 - e^2)^{1/2} \quad (2.86)$$

$dM = ndt, r = a(1 - e \cos E)$  と Kepler 方程式を使うと,

$$df = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E)^2} dM = \sqrt{1 - e^2} \left( \frac{dE}{dM} \right)^2 dM. \quad (2.87)$$

上式は Kepler 方程式の級数解<sup>15</sup>を使って, 各項毎に積分できて,

$$\begin{aligned} f - M &= 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + e^3 \left( \frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) \\ &+ e^4 \left( \frac{103}{96} \sin 4M - \frac{11}{24} \sin 2M \right) + O(e^5). \end{aligned} \quad (2.88)$$

この級数は次節 2.6 節の the guiding center approximation の解析と 5.2 節で潮汐力による自転減衰を扱う際に使われる。

$f - M$  を Bessel 関数で表現するため, 陰関数の定理を使う。陰関数の定理とは以下のとおりである。もし変数  $z$  が関数  $\zeta$  で以下のように表現できるとすると,

$$\zeta = z + e\phi(\zeta) \quad (e < 1), \quad (2.89)$$

$\zeta$  もまた以下の形で表される。

$$\zeta = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j. \quad (2.90)$$

式 (2.88) で与えられる  $M$  の項で  $f$  を表現するためには, Kepler の第 2 法則である, 式 (2.8)<sup>16</sup>, 式 (2.25)<sup>17</sup>を使う。

$$h = r^2 \dot{f} = na^2(1 - e^2)^{1/2}. \quad (2.91)$$

上式を両辺積分し式 (2.19) を  $r$  に代入すれば,

$$M = (1 - e^2)^{3/2} \int_0^f \frac{df}{(1 + e \cos f)^2} \quad (2.92)$$

<sup>13</sup>式 (2.19) :  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$

<sup>14</sup>式 (2.31) :  $r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f)$ .

<sup>15</sup>式 (2.80) :  $E = M + e \sin M + e^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2M \right) + e^3 \left( \frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) + e^4 \left( \frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M \right) + O(e^5)$ .

<sup>16</sup>式 (2.8) :  $\mathbf{h} = r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}$

<sup>17</sup>式 (2.25) :  $\mu = n^2 a^3$  and  $h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$

を得る. Taylor 展開して各項毎に積分を行うと,

$$M = f - 2e \sin f + \frac{3}{4}e^2 \sin 2f + O(e^3). \quad (2.93)$$

これを  $f$  について書き直すと,

$$f = M + e \left( 2 \sin f - \frac{3}{4}e \sin 2f + \dots \right). \quad (2.94)$$

陰関数の定理を使うと

$$f = M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dM^{j-1}} \left[ 2 \sin M - \frac{3}{4}e \sin 2M + \dots \right]^j, \quad (2.95)$$

この式は展開すると式 (2.88) と等価となる. この方法は 3.6 節の円制限 3 体問題において, 平衡点を決定する際に使われる.

## 2.6 The Guideing Center Approximation

太陽系力学で使われる離心率は, たいていの場合微量として扱うことができるので,  $e$  を使った近似は扱いやすく, 様々な場面で使われている. 回転座標系を仮定するのがよい系について考える場合には特に有益である.

The Guiding Center Approximation(図 2.8) では, 焦点  $F$  についてケプラー運動している物体  $P$  の運動を,  $P$  の軌道長半径  $a$  を半径とする円上を運動する点  $G$  を中心と

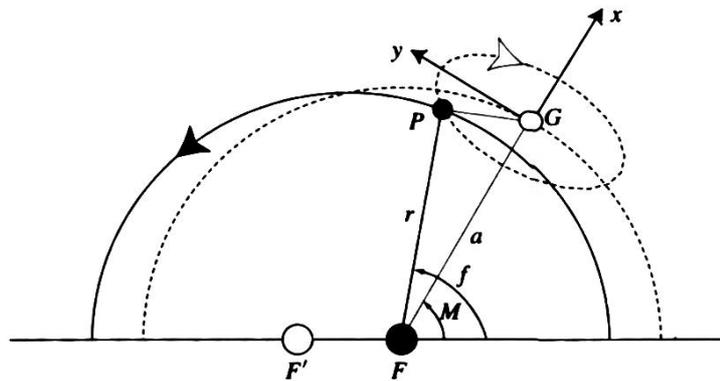


図 2.8: 真近点離角  $f$  と平均近点離角  $E$  の, The Guideing Center Approximation における関係.  $G$  は The Guideing Center の中心,  $P$  はケプラー運動する物体,  $F$  は焦点,  $F'$  は空の焦点を示す.  $G$  は  $F$  を中心とした, 半径  $a$  の円上を動く.

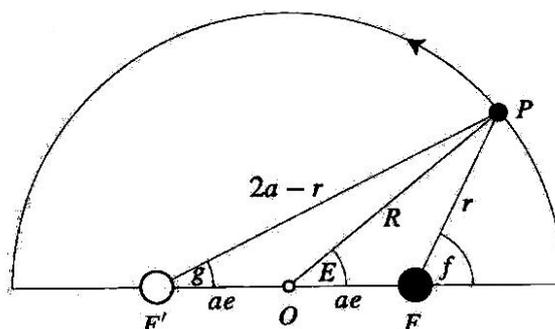


図 2.9: the guiding center approximation における真近点角, 平均近点離角, 離心近点角の関係. この図は  $F, F', O$  の違いを強調して描いている. 実際に the guiding center approximation を考える際は離心率が小さく,  $F, F'$  はもっと  $O$  に近い.

した直交座標系を用いて表現する. 円の中心は焦点  $F$  である. また  $G$  の角速度は物体  $P$  の平均運動  $n$  と等しいものとする.  $P$  の極座標  $(r, f)$  を,  $G$  を中心とする直交座標  $(x, y)$  に書き換えると各座標間の関係式は以下ようになる.

$$x = r \cos(f - M) - a \quad \text{and} \quad y = r \sin f - M. \quad (2.96)$$

式 (2.88) の展開式より,

$$f - M \approx 2e \sin M \quad (2.97)$$

これを式 (2.96) に適用すると

$$x \approx -ae \cos M \quad \text{and} \quad y \approx 2ae \sin M, \quad (2.98)$$

$$\frac{x^2}{(ae)^2} + \frac{y^2}{(2ae)^2} \approx 1, \quad (2.99)$$

を得る. これらの式から,  $G$  が焦点  $F$  を中心とし半径  $a$ , 速度  $n$ , 周期  $2\pi/n$  で運動しているとき,  $P$  は  $G$  について楕円運動をしているということがわかる. その半長軸, 半短軸の長さはそれぞれ  $2ae, ae$  となり,  $2:1$  であることがわかる.

このオーダーの近似の場合, 運動には, 2 つの特徴がある.  $P$  の楕円中心からの距離  $R$  (図 2.9) は以下の式より得られる.

$$R^2 = r^2 + (ae)^2 + 2aer \cos f. \quad (2.100)$$

さらに

$$R \approx a \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 f \right) \approx a \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 f \right) \quad (2.101)$$

と表される. ここで式 (2.97) より  $f = M + O(e)$  を使った. この式から,  $e$  の 1 乗のオーダーでは  $P$  の軌道は  $O$  を中心とする円軌道と一致することがわかる. 故に軌道は, 軌道に外接する円と一致し, 離心近点離角  $E$  は  $\angle P\hat{O}F$  である. 実際にこの近似の下では,  $F'$  が空の焦点であるとき,  $\angle P\hat{F}'F$  が平均近点離角  $M$  であることを示す.

真の  $P$  の軌道を考えて,  $F\hat{F}'P$  を  $g$  で表す. 余弦定理を三角形  $FF'P$  に適用すると,

$$r^2 = (2a - r)^2 + 4(ae)^2 - 4ae(2a - r) \cos g, \quad (2.102)$$

$$\cos g = \frac{(1 - r/a) + e^2}{e(1 - r/a) + e}, \quad (2.103)$$

を得る. ここでは楕円の定義である  $FP + F'P = 2a$  を使った. 式 (2.81) の  $r/a$  に関する展開式を変形して,

$$1 - r/a \approx e \cos M - \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2M) - \frac{3}{8}e^3(\cos M - \cos 3M) \quad (2.104)$$

故に

$$\cos g \approx \cos M - \frac{1}{8}e^2(\cos M - \cos 3M) + O(e^3) \quad (2.105)$$

$O(e)$  の項を無視すれば  $g = M$  となり, 空の焦点に対して運動している質量は等速円運動していることがわかる.

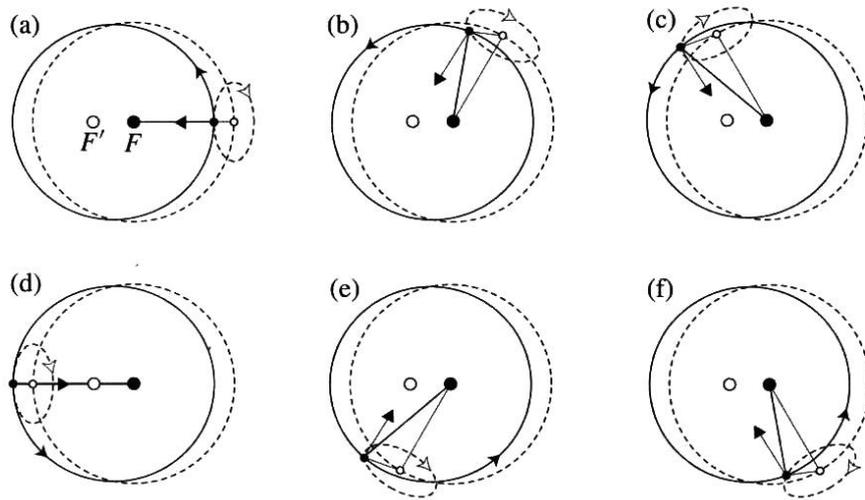


図 2.10: the guiding center approximation における離心率  $e = 0.2$  の時の図. 物体 (小さな黒丸) が中心質量 (大きな黒丸) の周りを回っている状態を同じ平均近点離角間隔  $M = \pi/3$  で並べたものである ((a) $M = 0$  から始まり (f) $M = 5\pi/3$  まで). 実線がケプラー運動している物体の軌道, 破線が guiding center の軌道である.

この結果は、自転周期と公転周期が一致しているような衛星 (a synchronously rotating satellite) に適用すると興味深い内容を含む。そのような衛星から空の焦点に対して描いた直線は平均運動と等しい  $n$  の速さで回転するので、衛星は空の焦点に対して常に同じ面を向けることになる。このことは Io や月のような a synchronously rotating satellite の librational tide (秤動<sup>18</sup>潮汐) の原因を説明する際に使われる。また guiding center から中心質量にひいた直線と、ケプラー運動する質量から空の焦点に対して引く直線は常に平行になる (図 2.10)。

---

<sup>18</sup>ある平均的位置の周囲を周期的に移動する現象。例：月面の地球から見える範囲の変化、惑星の軌道要素変化など。

## 2.7 Barycentric Orbits

以前, 適当な状態から出発したとき, 質点  $m_1$  に対する質点  $m_2$  の運動は円錐曲線と呼ばれる軌道を描くことを示した. この節では重心  $O'$  を中心とする重心座標から見た場合の2体問題を考える (図 2.11).

2.2 節で重心  $O'$  の位置ベクトルを表す  $\mathbf{R}$  は空間に固定されていると述べた.  $\mathbf{R}$  は以下の方程式で定義される.

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 - (m_1 + m_2) \mathbf{R} = 0. \quad (2.106)$$

式中の係数の合計は 0 となるので, 3 つの位置ベクトルは, 一つの直線上に並ぶ. ここで,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} \quad (2.107)$$

と書くと,  $\mathbf{R}$  の定義から

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0. \quad (2.108)$$

この式からわかることは (i)  $\mathbf{R}_1$  は常に  $\mathbf{R}_2$  と逆の向きを持つ. このことから (ii) 重心は常に  $m_1$  と  $m_2$  を結ぶ直線上にあり,  $R_1 + R_2 = r$  と書くことができる. また, (iii) 各質点の重心からの距離は  $m_1 R_1 = m_2 R_2$  の関係より決まる, ということである. よって

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{and} \quad R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (2.109)$$

が導かれる. この式から各質点は, 重心を基準とした系においては, 相対運動で示された楕円軌道を  $m_1/(m_1 + m_2)$  もしくは  $m_2/(m_1 + m_2)$  で縮小された同じ円錐曲線上を運動することがわかる (図 2.12).

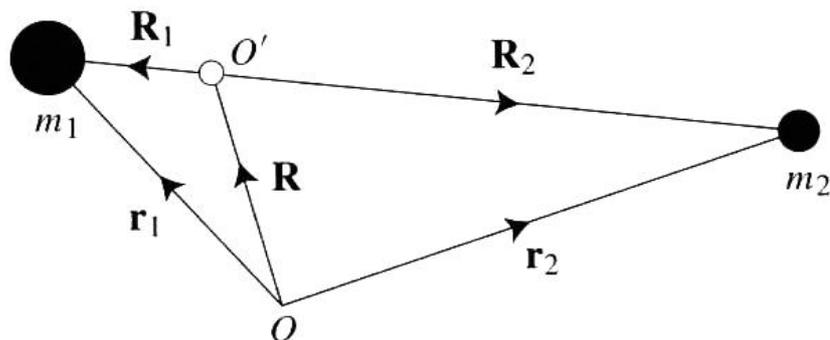


図 2.11: 原点  $O$  と  $O'$  に対する質点の位置ベクトル

重心を基準とする座標系を重心座標系 (barycentric system) という. 2.2 節で  $m_1$  に対する  $m_2$  の相対運動について述べた際,  $h = r^2\dot{\theta}$  を導いた.  $R_1, R_2$  はともに  $r$  に比例するので

$$\begin{aligned} R_1^2\dot{\theta} &= \text{constant} = h_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h, \\ R_2^2\dot{\theta} &= \text{constant} = h_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h. \end{aligned} \quad (2.110)$$

この系の全角運動量は

$$L^* = m_1 h_1 + m_2 h_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h, \quad (2.111)$$

で与えられ,

$$h = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) L^* \quad (2.112)$$

と書ける. 故に  $m_2 < m_1$  のとき,  $h \approx h_2$  と  $h$  は近似的に  $m_2$  の単位質量あたりの運動量と等しいと考えることができる.

これらのことと図 2.12 から重心の周りを楕円運動する各質点の周期は,  $m_2$  が  $m_1$  に対して相対運動するときの周期  $T$  と等しいことがわかる. 故に半長軸の違いはあるが, 平均運動の値も等しくなる. 各質点の半長軸の関係は式 (2.109) からわかる.

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \text{and} \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a \quad (2.113)$$

その結果  $h = na^2\sqrt{1-e^2}$  から,

$$h_1 = na_1^2\sqrt{1-e^2} \quad \text{and} \quad h_2 = na_2^2\sqrt{1-e^2}. \quad (2.114)$$

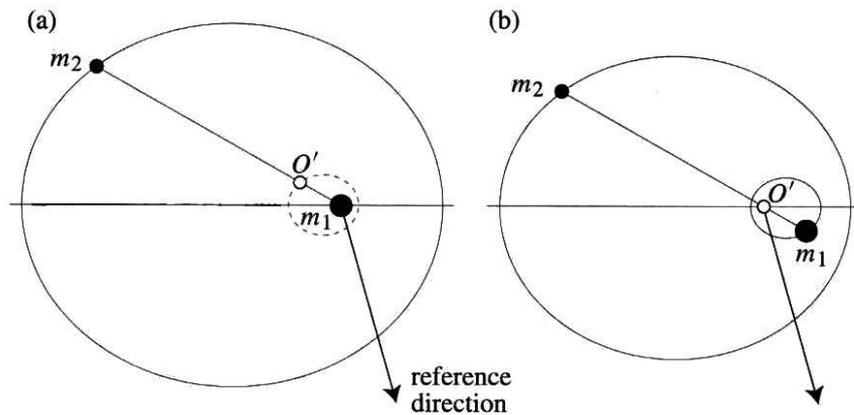


図 2.12: (a) 2 体問題における  $m_1$  に対する  $m_2$  の運動. 破線は重心  $O'$  の軌道を表す. (b)  $O'$  に対する  $m_1, m_2$  の運動. ともに  $m_2/m_1 = 0.2$ , 離心率  $e = 0.5$  としてある.

このことから  $m_1 a_1 = m_2 a_2$  ではあるが, ここで出てきた楕円の離心率はすべて同じであり, 故に楕円の形は全て同じとなる. 各質点は共通重心の周りをそれぞれ楕円運動しているが, 近心点は角度  $\pi$  だけ異なる.

ここで, 系の全エネルギー  $E^*$  について考えると, 全エネルギーは, 式 (2.27)<sup>19</sup> を使って, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - g \frac{m_1 m_2}{r}, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[ \dot{R}_1^2 + (R_1 \dot{f}^2) \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[ \dot{R}_2^2 + (R_2 \dot{f}^2) \right] - g \frac{m_1 m_2}{r}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

この式は式 (2.33), <sup>20</sup>(2.109) を使って以下のように簡単化される.

$$E^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} C = -g \frac{m_1 m_2}{2a}, \quad (2.116)$$

$C$  は式 (2.37)<sup>21</sup> のエネルギー一定数である. 結局, 系の全エネルギーは  $m_2$  の  $m_1$  に対する半長軸  $a$  で表される. また

$$C = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) E^* \quad (2.117)$$

であり, ここから  $m_2 \ll m_1$  のとき  $C \approx E^*/m_2$  となり, 質点  $m_2$  の単位質量あたりのエネルギーであることがわかる.

<sup>19</sup>式 (2.27) :  $v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2$

<sup>20</sup>式 (2.33) :  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$

<sup>21</sup>式 (2.37) :  $C = -\frac{\mu}{2a}$

## 2.8 The Orbit in Space

2.2節では, ケプラー運動する物体の, 中心質量に対する相対位置ベクトルと速度ベクトルが, 常に角運動量ベクトルに垂直な平面内に存在していることを示した. ケプラー運動する物体  $m_2$  の相対位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y)$  と速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$  は半長軸  $a$ , 離心率  $e$ , 近点引数  $\varpi$  の3つの定数と変数  $f$  によって固有な値を持つ. これまでは軌道面に対する運動の理解を進めてきたが, 実際には太陽系内の物体の運動は特定の基準面のみで起こるわけではない. ここからは軌道の3次元表現について考察していく (図 2.13).

ある物体が, 任意の位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  で表現されるような直交座標系内をケプラー運動しているとすると,  $x$  軸は楕円軌道の近点方向にとるものとし,  $y$  軸は軌道面内で  $x$  軸に垂直な方向,  $z$  軸は  $x, y$  軸両方に垂直で, 方向はベクトル  $\hat{x} \times \hat{y}$  と一致するようにとる. 結果としてこの  $x, y, z$  軸は, 右手の親指, 人差し指, 中指を直角に広げた場合の形と一致する.

さらにこの座標系とは別の3次元直交座標系を考える. この座標系を基準としてケプラー運動を記述していく.  $X$  軸をこの基準座標系の基準線とする. 上と同様に,  $X, Y, Z$  軸が右手の形を成すように  $Y, Z$  軸をとる. このような座標系の例として日心座標系 (the heliocentric coordinate system) がある. この座標系は, 太陽を中心とし, 基準面を地球軌道面 (ecliptic, 黄道), 基準線を春分 (vernal equinox) における地球の赤道面と黄道面の交線方向にとっている. この座標系は例えば太陽の周りを公転する惑星の運動を記述する場合に慣習的に使われる. 注意しておかなければならないことは, この基準面も, 他の天体による摂動を受けているということである.

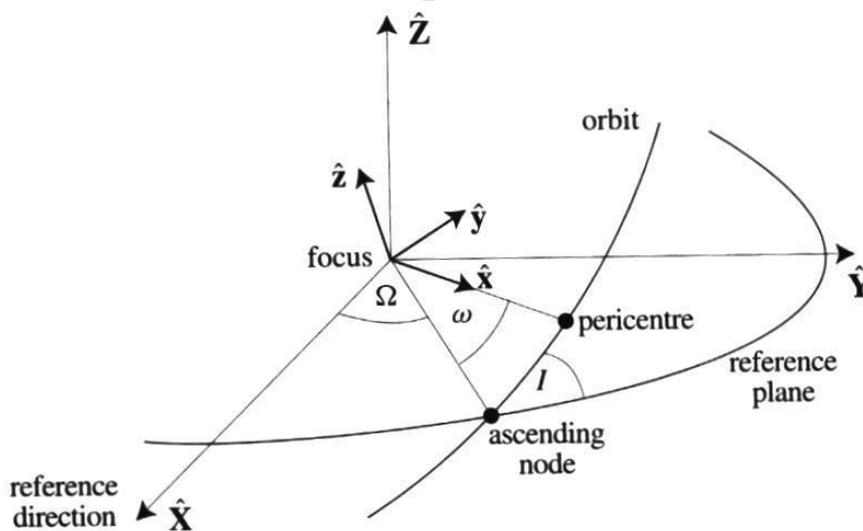


図 2.13: 3次元における, 基準面に対するケプラー運動の図.

一般的に軌道面は基準面に対して傾いている. この軌道面と基準面のなす角  $I$  を軌道傾斜角(inclination)と呼ぶ. 軌道面と基準面の成す直線を *the line of nodes*(交点線?)と呼ぶ. ケプラー運動している物体が基準面を下から上に横切る際の基準面との交点を昇交点(ascending node), その際の物体の動径ベクトルと基準線のなす角  $\Omega$  は昇交点経度(longitude of ascending node)と呼ばれる. またこの昇交点の半径ベクトルと楕円軌道の近点方向とのなす角  $\omega$  を近点引数(argument of pericenter)と呼ぶ.

軌道傾斜角は常に  $0 \leq I \leq 180^\circ$  となる.  $I < 90^\circ$  の時は順行<sup>22</sup>(prograde) 反対に  $I \geq 90^\circ$  のときは逆行(retrograde)と呼ぶ.  $I \rightarrow 0$  のとき軌道面と基準面は一致し,

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (2.118)$$

となる. しかし, 式 (2.118) の  $\varpi$  の定義は軌道面が傾いている際にも使われる. 故に, 一般的には  $\varpi$  は”dogleg angle”とも呼ばれる.

図 2.14 は軌道面を基準にした座標系と基準座標系の関係を示すものである. 1つの座標系は他の座標系を軸に沿って回転させることで表現することができるがわかる.

軌道面での座標系で表現した座標  $(x, y, z)$  を基準面での座標  $(X, Y, Z)$  に変換するためには (i)  $x$  軸が *the line of nodes* と交わるよう  $z$  軸を角度  $\omega$  だけ回転させる. (ii) 次に 2つの軌道面が一致するよう  $x$  軸を  $I$  回転させる. (iii) 最後に  $z$  軸を  $\Omega$  回転させる (図 2.13, 2.14).

3次元座標系の回転は 3行3列の行列で表現することができる.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_3^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

$\mathbf{P}^{-1}$  は  $\mathbf{P}$  の逆行列. 回転行列は全て直交行列であるため逆行列は元の行列の転置行列をとればよい.

<sup>22</sup>中心天体の自転方向と同じ向きに公転すること

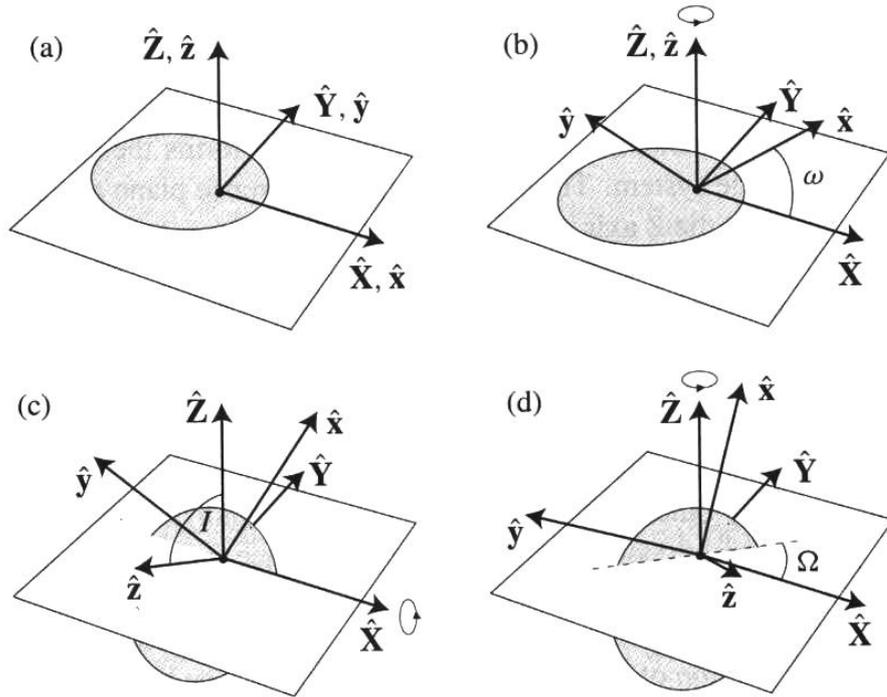


図 2.14: 単位ベクトル  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  と角度  $\omega, I, \Omega$  の関係. (a) 一致した座標を元に戻す変換も軸を 3 回回転させることで可能となる. (b) まず  $\hat{Z}$  に沿って座標系を  $\omega$  回転させる. (c) 次に  $\hat{X}$  について座標系を  $I$  回転させる. 最後に (d)  $\hat{Z}$  に沿って  $\Omega$  回転させる.

もし軌道面を基準面とした座標系であれば,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin(\omega + f) \sin I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.122)$$

半長軸  $a$  と離心率  $e$  はこの変換では変化しない.

これらの公式の使用例として 1993 年 9 月 25 日 17:32 (イギリス夏時間) での惑星の位置を求めてみる. Appendix A では任意の時間での惑星の軌道要素を求めるための平均黄道, 2000 年 1 月 1 日正午での分点を基準とする場合の公式を与えている. この基準を J2000 元期 (J2000 epoch) という. 公式は求めたい日付での軌道要素の値と J2000 元期との補正を  $t$  の関数として与えている.  $t$  は J2000 元期と与えられた時間との差を一ユリウス世紀を単位とする時間で表現した値である. 通常の暦には不連続な部分があるため, このような計算では J2000 元期, 与えられる時間共, 連続性を保った, ユリウス日 (julian

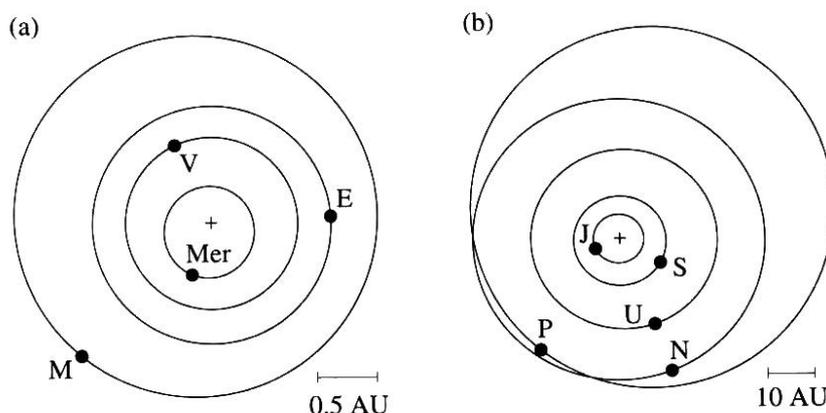


図 2.15: 1993 年 9 月 25 日 17:32 での惑星の軌道とその位置を J2000 元期における基準面に投影した図.(a) は太陽系の内側,(b) は外側の惑星の図である. 中央の十字は太陽の位置を表す.

date) で表現する. ユリウス日とは紀元前 4713 年の 1 月 1 日正午からの日数である. ユリウス世紀(Julian century) は 36525 日で定義される. J2000 epoch におけるユリウス日は 2451545.0 日, 与えられた時間, 1993 年 9 月 25 日 17:32 での, ユリウス日は 2449256.189 日なので (求め方は Appendix A.3 参照) この場合の  $T$  は  $T = -0.06266423$  である.

仮に木星の軌道要素を考える際には Appendix A の公式によれば,  $a_j = 5.20332AU$ ,  $e_j = 0.0484007$ ,  $I_j = 1.30537$ ,  $\Omega_j = 100.535$ ,  $\varpi_j = 14.7392$ ,  $\lambda_j = 204.234$  となる. 故に  $M_j = \lambda_j - \varpi_j = 189.495$  となる. Kepler 方程式の数値解は  $E_j = 189.059$  で, この値を式 (2.41)<sup>23</sup> に代入して,

$$x_j = -5.39027AU \quad \text{and} \quad y_j = -0.818277AU. \quad (2.123)$$

$I_j, \Omega_j, \varpi_j$  の値を式 (2.119), (2.120) を使って,

$$P_j = P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} 0.966839 & -0.254401 & 0.0223971 \\ 0.254373 & 0.967097 & 0.00416519 \\ -0.0227198 & 0.00167014 & 0.99974 \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

変換行列より, 木星の J2000 元期の基準面に対する座標は

$$X_j = -5.00336, \quad Y_j = -2.16249, \quad Z_j = 0.121099. \quad (2.125)$$

この手順は他の惑星の位置を求める際にも適用できる. 結果を図 2.15 に示した.

<sup>23</sup>式 (2.41) :  $x = a(\cos E - e)$ ,  $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$

これで時間  $t$  での 6 つの軌道要素  $a, e, I, \Omega, \omega, f, \tau$  における基準面に対してケプラー運動する物体の位置を変換することができるようになった。ここで、中心星質量とその周りをケプラー運動する物体の質量をそれぞれ  $m_1, m_2$  とし、

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (2.126)$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \quad (2.127)$$

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \quad (2.128)$$

$$\mathbf{h} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, Z\dot{X} - X\dot{Z}, X\dot{Y} - Y\dot{X}) \quad (2.129)$$

$$\dot{R} = \pm \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} \quad (2.130)$$

$R = r$  であり、半径ベクトルの長さを示し、 $\dot{R}$  はその変化の割合を示している。 $R$  は常に正の値をとるので、 $\dot{R}$  の符号は  $\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}$  の符号に等しい。 $\mathbf{h} = (h_X, h_Y, h_Z)$  のそれぞれの成分は

$$h \cos I = h_Z \quad (2.131)$$

$$h \sin I \sin \Omega = \pm h_X \quad (2.132)$$

$$h \sin I \cos \Omega = \mp h_Y \quad (2.133)$$

式 (2.132), (2.133) は、 $h_Z > 0$  のとき上、 $h_Z < 0$  のとき下、の符号をとる。軌道要素を求める過程を以下に示す。

1. 式 (2.33)<sup>24</sup>, (2.126), (2.127) より  $a$  を計算。

$$a = \left( \frac{2}{R} - \frac{V^2}{g(m_1 + m_2)} \right)^{-1} \quad (2.134)$$

2. 式 (2.25)<sup>25</sup>, (2.134) から  $e$  を計算する。

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{g(m_1 + m_2)a}} \quad (2.135)$$

3. 式 (2.131) から  $I$  を計算する。

$$I = \cos^{-1} \left( \frac{h_Z}{h} \right). \quad (2.136)$$

4.  $\Omega$  を式 (2.132), (2.133) を使って  $\sin \Omega, \cos \Omega$  の形で求める。

$$\sin \Omega = \frac{\pm h_X}{h \sin I} \quad \text{and} \quad \cos \Omega = \mp \frac{h_Y}{h \sin I} \quad (2.137)$$

符号は  $h_Z$  によって決まる。

<sup>24</sup>式 (2.33) :  $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$

<sup>25</sup>式 (2.25) :  $\mu = n^2 a^3, h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$

5. 式 (2.122) の  $Z/R, X/R$  より  $\omega + f$  を計算する.

$$\begin{aligned}\sin(\omega + f) &= \frac{Z}{R \sin I}, \\ \cos(\omega + f) &= \sec \Omega \left( \frac{X}{R} + \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \right).\end{aligned}\quad (2.138)$$

6.  $f$  を計算し, ここから, 式 (2.19)<sup>26</sup>, 式 (2.30)<sup>27</sup> より,  $\omega$  の  $\sin f, \cos f$  を使った表現ができる.

$$\sin f = \frac{a(1-e^2)}{he} \dot{R} \quad \text{and} \quad \cos f = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1-e^2)}{R} - 1 \right).\quad (2.139)$$

7. 式 (2.42)<sup>28</sup>, を  $\tau$  について解き, 式 (2.25)<sup>29</sup>, 式 (2.51)<sup>30</sup> を適用することで  $\tau$  を計算する.

$$\tau = t - \frac{E - e \sin E}{\sqrt{g(m_1 + m_2)a^{-3}}}\quad (2.140)$$

実用においては  $t$  を  $\sqrt{\mu} = \sqrt{g(m_1 + m_2)}$  でスケーリングし, 新しい時間の変数  $\bar{t}$  を使う.

$$\sqrt{\mu} dt = d\bar{t}\quad (2.141)$$

式 (2.5)<sup>31</sup> からこれは  $\mu = 1$  としたときと同じである. 加えて, もし単位長さを  $a$  とすると, 2体問題は, 平均運動  $n = 1$  と, 周期  $T = 2\pi$  のケプラー運動として扱うことができる. これは制限 3体問題を扱う際も同様の形で適用できる.

---

<sup>26</sup>式 (2.19) :  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$

<sup>27</sup>式 (2.30) :  $\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} e \sin f$

<sup>28</sup>式 (2.42) :  $r = a(1 - e \cos E)$

<sup>29</sup>式 (2.25) :  $\mu = n^2 a^3, h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$

<sup>30</sup>式 (2.51) :  $n(t - \tau) = E - e \sin E$

<sup>31</sup>式 (2.5) :  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$

## 2.9 Perturbed Orbits

この節では, 中心質量の周りをケプラー運動する物体に, 摂動力が働いている場合の軌道要素の時間変化を求める. またその表記から, 軌道要素の時間変化の様子について簡単に触れる.

2.8 節において, 2 体問題では軌道要素  $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$  はケプラー運動している物体の位置と速度から一意的に決まることを示した. しかし, 考える系に対して摂動力が働いていると仮定しても, ある瞬間の位置ベクトルと速度ベクトルからは, 常にこの瞬間の 6 つの軌道要素を定義することができる. このような場合の軌道要素を接触軌道要素(osculating elements)と呼ぶ. 摂動についてはもっと後の章で扱われるべきものであるが, ここでは摂動が軌道に与える基本的な影響についての考察を行う.

Burns(1976) は  $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$  の時間変化について調べるため, 各軌道要素の時間  $t$  に関する微分方程式がどのように示されるかを明らかにした.

彼の方法に沿って  $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$  に関する微分方程式を導く. ケプラー運動する物体に対して小さな摂動力  $d\mathbf{F}$  が働くとして

$$d\mathbf{F} = \bar{R}\hat{\mathbf{r}} + \bar{T}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \bar{N}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.142)$$

と書く.  $\bar{R}, \bar{T}, \bar{N}$  はそれぞれ動径, 接線, 動径と接線に垂直な方向の力の成分であり,  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}}$  それぞれの方向単位ベクトルを示す. ここで  $\dot{a}, \dot{e}, \dot{I}, \dot{\omega}, \dot{\Omega}, \dot{\tau}$  をこれら成分の関数として表現し, 摂動力による軌道要素の時間変化を定式化する.

まず半長軸  $a$  の時間変化について求める. 単位質量, 単位時間あたりのエネルギー一定数  $C$  の時間変化は, 動径ベクトルの時間変化と摂動力ベクトルの内積で表すことができ,

$$\dot{C} = \dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{F} = \dot{r}\bar{R} + r\dot{\theta}\bar{T} \quad (2.143)$$

ここでは式 (2.7)<sup>32</sup> を使った. また, 式 (2.37)<sup>33</sup> より,

$$\dot{C} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a}. \quad (2.144)$$

ゆえに, 式 (2.30)<sup>34</sup>, (2.31)<sup>35</sup> の  $\dot{r}, r\dot{\theta}(= r\dot{f})$  より

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} [\bar{R}e \sin f + \bar{T}(1 + e \cos f)]. \quad (2.145)$$

このことから半長軸を変化させる力というのは, 軌道面内に平行な力の成分のみだということがわかる.

<sup>32</sup>式 (2.7) :  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

<sup>33</sup>式 (2.37) :  $C = -\frac{\mu}{2a}$

<sup>34</sup>式 (2.30) :  $\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}e \sin f$

<sup>35</sup>式 (2.31) :  $r\dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e \cos f)$ .

次に離心率  $e$  の時間変化を求める. 式 (2.135)<sup>36</sup> (2.36) を使って,

$$e = \sqrt{1 + 2h^2 C \mu^{-2}}. \quad (2.146)$$

ここから

$$\frac{de}{dt} = \frac{e^2 - 1}{2e} (2\dot{h}/h + \dot{C}/C). \quad (2.147)$$

ここで  $h$  の時間変化について求める. 角運動量の時間変化は力のモーメントと等しいことから,

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = r\bar{T}\hat{\mathbf{z}} - r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.148)$$

が得られる. ここから,

$$\frac{dh}{dt} = r\bar{T}, \quad (2.149)$$

を得る. なぜなら  $-r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}}$  成分は  $h$  の方向を変化させるがその大きさには寄与しないからである.

$\dot{h}$  を使えば,  $\dot{e}$  を摂動力の成分で表現した式が得られる. 式 (2.42)<sup>37</sup> と, 式 (2.37)<sup>38</sup>, (2.25)<sup>39</sup>, (2.144), (2.145), (2.149) から,

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{a\mu^{-1}(1 - e^2)} [\bar{R} \sin f + \bar{T}(\cos f + \cos E)]. \quad (2.150)$$

この式から離心率も軌道面に平行な力によってのみ変化されうということがわかる.

軌道傾斜角  $I$  の時間変化は, 式 (2.131) を微分することで,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\dot{h}/h - \dot{h}_Z/h_Z}{\sqrt{(h/h_Z)^2 - 1}}, \quad (2.151)$$

を得る. また,  $\dot{h}$  の  $X, Y, Z$  成分は, 以下の式を使うことで求めることができる.

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_X \\ \dot{h}_Y \\ \dot{h}_Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega + f) & -\sin(\omega + f) & 0 \\ \sin(\omega + f) & \cos(\omega + f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r\bar{N} \\ r\bar{T} \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

$\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  は式 (2.119)<sup>40</sup>, (2.120)<sup>41</sup> で与えられている. これより,

$$\begin{aligned} \dot{h}_X = & r(\bar{T} \sin I \sin \Omega + \bar{N} \sin(\omega + f) \cos \Omega \\ & + \bar{N} \cos(\omega + f) \cos I \sin \Omega), \end{aligned} \quad (2.153)$$

<sup>36</sup>式 (2.135) :  $e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{g(m_1+m_2)a}}$

<sup>37</sup>式 (2.42) :  $r = a(1 - e \cos E)$

<sup>38</sup>式 (2.37) :  $C = -\frac{\mu}{2a}$

<sup>39</sup>式 (2.25) :  $\mu = n^2 a^3, h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$

<sup>40</sup>式 (2.119) :  $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix}$

<sup>41</sup>式 (2.120) :  $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\dot{h}_Y = r(-\bar{T} \sin I \cos \Omega + \bar{N} \sin(\omega + f) \sin \Omega - \bar{N} \cos(\omega + f) \cos I \cos \Omega), \quad (2.154)$$

$$\dot{h}_Z = r(\bar{T} \cos I - \bar{N} \cos(\omega + f) \sin I). \quad (2.155)$$

式 (2.151) に式 (2.25), (2.131)<sup>42</sup>, (2.149), (2.155) を適用すると,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)}\bar{N} \cos(\omega + f)}{1 + e \cos f}, \quad (2.156)$$

と書ける. これは以下のように書き直すことができる.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r\bar{N} \cos(\omega + f)}{h}. \quad (2.157)$$

$dI/dt$  は  $\bar{N}$  にのみ依存するので, 軌道面に垂直な力のみが軌道傾斜角を変化させることができる.  $r\bar{N} \cos(\omega + f)$  は角運動量ベクトルを交点線 (the line of nodes) に沿って回転させる際の, モーメントの成分である.

式 (2.132)<sup>43</sup> を (2.132)<sup>44</sup> で割ると,

$$\tan \Omega = -h_X/h_Y \quad (2.158)$$

この式は時間  $t$  で微分することができて,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{h_X \dot{h}_Y - h_Y \dot{h}_X}{h^2 - h_Z^2} \quad (2.159)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sin \Omega \dot{h}_Y + \cos \Omega \dot{h}_X}{h \sin I} \quad (2.160)$$

式 (2.160) に式 (2.25)<sup>45</sup>, (2.19)<sup>46</sup>, (2.153), (2.154) を適用すると

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)} \frac{\bar{N} \sin(\omega + f)}{\sin I(1 + e \cos f)}, \quad (2.161)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\bar{N} \sin(\omega + f)}{h \sin I}, \quad (2.162)$$

この方程式において,  $r\bar{N} \sin(\omega + f)$  は軌道面を歳差運動させるモーメントであり,  $h \sin I$  は角運動量ベクトルの  $X - Y$  平面に垂直な方向の成分である.

<sup>42</sup>式 (2.131) :  $h \cos I = h_Z$

<sup>43</sup>式 (2.132) :  $h \sin I \sin \Omega = \pm h_X$

<sup>44</sup>式 (2.133) :  $h \sin I \cos \Omega = \mp h_Y$

<sup>45</sup>式 (2.25) :  $\mu = n^2 a^3, h = na^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$

<sup>46</sup>式 (2.19) :  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$

$\dot{\omega}$  を得るために式 (2.19) と, 式 (2.146), (2.25) における  $e, h$  を利用する. これより,

$$h^2 = \mu r \left[ 1 + \sqrt{1 + 2Ch^2\mu^{-2} \cos(\theta - \omega)} \right]. \quad (2.163)$$

$\theta = \omega + f, \theta$  は交点線からの角度である. ここで, 摂動力  $dF$  によって,  $C, h, \omega$  は変化を受けるが,  $r$  は変化しないままであるとすると, 式 (2.163) を微分して変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= 2h\dot{h} \frac{r^{-1} + C(e\mu)^{-1} \cos(\theta - \omega)}{e\mu \sin(\theta - \omega)} \\ &+ \dot{\theta} - \frac{h^2}{e^2\mu^2} \dot{C} \cot(\theta - \omega) \end{aligned} \quad (2.164)$$

式 (2.19), (2.25), (2.144), (2.149) を式 (2.164) に代入すると

$$\frac{d\omega}{dt} = e^{-1} \sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)} \left[ -\bar{R} \cos f + \bar{T} \sin f \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} \right] - \dot{\Omega} \cos I. \quad (2.165)$$

最後の項は式 (2.164) の  $\dot{\theta}$  の項から出てくる. ケプラー運動する物体の経度  $\theta$  の変化は昇降点経度  $\Omega$  の変化によって起こる.  $\theta$  は交点線を基準としているからである. (Burns 1976)

$\dot{\tau}$  に関する方程式は Kepler 方程式, 式 (2.51)<sup>47</sup> を微分することで得られる.  $\chi = n\tau$  とし,

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\dot{C}}{C} \left( -\frac{3}{2}nt + \frac{(1-e^2)^{3/2}(2e - \cos f - e \cos^2 f)}{2e^2 \sin f(1+e \cos f)} \right) \\ &- \frac{\dot{h}}{h} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e^2} \cot f. \end{aligned} \quad (2.166)$$

$\dot{\chi} = -n\dot{\tau} - \dot{n}\tau$  と書くと

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \left[ 3(\tau - t) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} e \sin f \right. \\ &\quad \left. + a^2\mu^{-1}(1-e^2) \left( \frac{-\cos f}{e} + \frac{2}{1+e \cos f} \right) \right] \bar{R} \\ &+ \left[ 3(\tau - t) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} (1+e \cos f) \right. \\ &\quad \left. + a^2\mu^{-1}(1-e^2) \left( \frac{\sin f(2+e \sin f)}{e(1+e \cos f)} \right) \right] \bar{T} \end{aligned} \quad (2.167)$$

ここでも, 近点通過時刻を変化させられるのは, 軌道面に平行な力の成分だけだということになる.

式 (2.166), (2.167) の右辺には  $t$  が変数として含まれている. このことはこれらの微分の実用上の妨げとなる.

<sup>47</sup>式 (2.51) :  $n(t - \tau) = E - e \sin E$

## 2.10 Hamiltonian Formulation

前節までで行った2体問題の運動方程式の定式化や摂動の定式化の方法は唯一の方法ではなく、その他の方法を使ったほうが便利な場合もある。その他の方法の1つとしてここではHamiltonianを使った運動方程式の定式化を行う。

2.2節では2体問題における運動方程式の定式化を行い、 $m_2$ の $m_1$ に対する相対運動の運動方程式を得た。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (2.168)$$

2.2節では $\mathbf{r}$ は2次元のベクトルであったがこれは3次元のベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , ( $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ )にも適用できる。以下では変数 $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ を使う。 $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ はそれぞれ

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} \quad \text{and} \quad \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.169)$$

$\mathbf{r}$ は相対位置ベクトル、 $\mathbf{p} = [m_1 m_2 / (m_1 + m_2)] \dot{\mathbf{r}}$ は系の運動量を示す。

ここでベクトル方程式として以下のように書ける。

$$\dot{\mathbf{r}} = +\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_{Kepler} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{H}_{Kepler} \quad (2.170)$$

$\nabla_{\mathbf{r}}, \nabla_{\mathbf{p}}$ はベクトル微分演算子であり、以下で与えられる。

$$\nabla_{\mathbf{p}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial p_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial p_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial p_z} \quad \text{and} \quad \nabla_{\mathbf{r}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial r_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial r_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r_z}. \quad (2.171)$$

また、

$$\mathcal{H}_{Kepler} = \frac{p^2}{2\mu^*} - \frac{\mu\mu^*}{r}, \quad (2.172)$$

$\mu = g(m_1 + m_2)$ , である。

$$\mu^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.173)$$

は系の換算質量(reduced mass)と呼ばれる。 $\mathcal{H}_{Kepler}$ はこの系でのHamiltonianである。Hamiltonianによって式(2.168)で表される3つの2階微分方程式が、以下の6つの1階微分方程式で置き換えられた。

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu^*} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\mu\mu^*}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.174)$$

式(2.172)と(2.27)<sup>48</sup>から、 $\mathcal{H}_{Kepler} = \mu^* C$ となる。このことから $\mathcal{H}_{Kepler}$ は系のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和であり、定数となる。

一般的にどのような系の運動方程式も以下の形で書けることが知られている。

$$\frac{dq_i}{dt} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.175)$$

<sup>48</sup>式(2.27) :  $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C$

$\mathcal{H}$  は系の Hamiltonian であり,  $q_i, p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  はそれぞれ, 一般化座標と運動量の各座標軸成分であり, 互いに独立である. また,  $p_i$  は  $q_i$  に対しての共役運動量 (conjugate momentum) という.

この式は, 運動方程式としてはややこしい形に見える. しかしこの表記の運動方程式は, 座標変換が容易であり, 共鳴現象の評価に役立つ. またこの表記により, 問題を簡単化できたり, 解を導くことができるようになる場合もある.

共役な変数の組として,  $r, p$  をあげた. ケプラー運動する物体の位置と速度がわかれば, 軌道要素も決めることができるので, 軌道要素  $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$  と  $f$  の7つの数に共役の関係を適用して, 正準方程式を表現することができそうであるが, それは成り立たない. しかし, 軌道要素の関数からは共役の関係を導くことができる. 以下では正準方程式を満たし, 解を得ることのできる共役な変数の組の例として Dlaunay 変数 (Dlaunay's variables) と Poincare 変数 (Poincare's variables) をあげる.

Dlaunay の変数は以下で定義される.

$$l = M, \quad g = \omega, \quad h = \Omega$$

$$L = \mu^* \sqrt{\mu a}, \quad G = \mu^* \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad H = \mu^* \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos I, \quad (2.176)$$

$l, g, h$  は新たな座標であり,  $L, G, H$  は座標に共役な運動量と等価である. Dlaunay の変数で2体問題の Hamiltonian を表すと,

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2 \mu^{*3}}{2L^2}, \quad (2.177)$$

となる.  $\mathcal{H}$  は  $L$  のみの関数であるので, 2.8 節でも述べたが, 正準方程式に当てはめると  $g, h$  は定数であり, また,  $L = L(a), G$  は角運動量,  $H$  は角運動量の垂直成分であることからわかるが, 同様に  $L, G, H$  もまた定数である.

また  $l$  の変化は以下で与えられる.

$$\frac{dl}{dt} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} = \frac{\mu^2 \mu^{*3}}{L^3} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (2.178)$$

これは  $dl/dt = dn(t - \tau)/dt = n$  であるからである.

Poincare の変数は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \lambda &= M + m + \Omega, & \Lambda &= \mu^* \sqrt{\mu a}, \\ \gamma &= -\omega - \Omega, & \Gamma &= \mu^* \sqrt{\mu a(1 - \sqrt{1 - e^2})}, \\ z &= -\Omega, & Z &= \mu^* \sqrt{\mu a(1 - e^2)}(1 - \cos I), \end{aligned} \quad (2.179)$$

$\lambda, \gamma, z$  は新たな座標であり,  $\Lambda, \Gamma, Z$  は座標に共役な運動量である. 角度  $\lambda = M + \varpi$  は平均経度であった. Poincare の変数は以下の変換を使って Dlaunay の変数から決められる.

$$\begin{aligned} \Lambda &= L, & \Gamma &= L - G, & Z &= G - H, \\ \lambda &= l + g + h, & \gamma &= -g - h, & z &= -h. \end{aligned} \quad (2.180)$$

また, Poincare の変数と Dalaunay の変数の間には以下のような関係がある.

$$\Lambda\lambda + \Gamma\gamma + Zz = Ll + Gg + Hh, \quad (2.181)$$

この式は (contact transformation) と呼ばれるものの例である. このような変換の場合 Hamiltonian を変えることなく, 常に正準な性質を保つ. Poincare の変数を使った 2 体問題における *Hamiltonian* は

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2\mu^{*3}}{2\Lambda^2}. \quad (2.182)$$

変数の組は新たに考えなくてはならない場合だけでなく, 既に座標や運動量として使われている量から作ることも可能である.

$$\xi = \sqrt{2\Gamma} \cos \gamma, \quad \eta = \sqrt{2\Gamma} \sin \gamma, \quad p = \sqrt{2Z} \cos z, \quad q = \sqrt{2Z} \sin z, \quad (2.183)$$

これは contact transformation のもう一つの例である. この場合,  $\xi, \eta$  は eccentric variables と呼ばれ, これに対し  $p, q$  は (oblique variables) と呼ばれる. これらの変数は 7 章における, 摂動の議論の際に使われる.