

Problems

- 3.1 水蒸気を含む空気の分子量 M_{rw} は含む水蒸気量によって様々な値をとる. これを扱いやすくするために仮温度という量を以下のように定義する.

$$RT^*/M_{ra} = RT/M_{rw} \quad (1)$$

ここで M_{ra} は乾燥空気の分子量である. 仮温度を水蒸気の混合比を用いて表せ. また 100 kPa の飽和空気での $T^* - T$ の値を 273 K, 290 K, 300 K の場合についてそれぞれ求めよ.

[解] 乾燥空気, 水蒸気の状態方程式はそれぞれ

$$p - e = \rho_{ra} \frac{R}{M_{ra}} T \quad (2)$$

$$e = \rho_{rv} \frac{R}{M_{rv}} T \quad (3)$$

で与えられる (p : 水蒸気を含む空気の圧力, e : 水蒸気分圧, ρ_{ra} : 乾燥空気の密度, ρ_{rv} : 水蒸気の密度). さらに水蒸気を含む空気の状態方程式は

$$p = \rho_{rw} \frac{R}{M_{rw}} T \quad (4)$$

で与えられる. (4) から M_{rw} は

$$\begin{aligned} M_{rw} &= \frac{\rho_{rw} RT}{p} \\ &= \frac{\rho_{rw} RT}{(p - e) + e} \end{aligned} \quad (5)$$

と表せる. (5) に (2), (3) を代入すると

$$\begin{aligned} M_{rw} &= \frac{\rho_{ra} + \rho_{rv}}{\rho_{ra} \frac{R}{M_{ra}} T + \rho_{rv} \frac{R}{M_{rv}} T} \\ &= \frac{\rho_{ra} + \rho_{rv}}{\frac{\rho_{ra}}{M_{ra}} + \frac{\rho_{rv}}{M_{rv}}} \\ &= \frac{1 + \frac{\rho_{rv}}{\rho_{ra}}}{1 + \frac{M_{ra} \rho_{rv}}{M_{rv} \rho_{ra}}} M_{ra} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで (6) を混合比 $m = \rho_{rv}/\rho_{ra}$ を用いて表すと

$$M_{rw} = \frac{1 + m}{1 + \frac{M_{ra}}{M_{rv}} m} M_{ra} \quad (7)$$

(1) に (7) を代入すると

$$T^* = \frac{1 + \frac{M_{ra}}{M_{rv}} m}{1 + m} T \quad (8)$$

$m \ll 1$ であるから (8) は

$$\begin{aligned} T^* &\simeq \left(1 + \frac{M_{ra}}{M_{rv}} m\right) (1 - m) T \\ &\simeq \left\{1 + \left(\frac{M_{ra}}{M_{rv}} - 1\right) m\right\} T \end{aligned} \quad (9)$$

(9) に $M_{ra} = 28.97, M_{rv} = 18$ を代入すると

$$T^* = (1 + 0.61m)T \quad (10)$$

を得る.

次に $T^* - T$ を求める. まず (10) より

$$T^* - T = 0.61mT \quad (11)$$

である. また, 混合比は

$$m = \frac{\rho_{rv}}{\rho_{ra}} = \frac{e}{p - e} \frac{R_{rv}}{R_{ra}} \simeq \frac{e}{p} \frac{M_{rv}}{M_{ra}} = 0.62 \frac{e}{p} \quad (12)$$

と表すことができる.

$T = 273 \text{ K}$ の場合.

飽和水蒸気圧は $6.10 \times 10^2 \text{ Pa}$ ¹. (12) から 100 kPa の飽和空気における混合比は

$$m = 0.62 \times \frac{6.10 \times 10^2}{100 \times 10^3} = 3.8 \times 10^{-3} \quad (13)$$

この値を (11) に代入すると

$$T^* - T = 0.64 \text{ K} \quad (14)$$

$T = 290 \text{ K}$ の場合.

飽和水蒸気圧は $19.2 \times 10^2 \text{ Pa}$. (12) から 100 kPa の飽和空気における混合比は

$$m = 0.62 \times \frac{19.2 \times 10^2}{100 \times 10^3} = 1.19 \times 10^{-2} \quad (15)$$

この値を (11) に代入すると

$$T^* - T = 2.11 \text{ K} \quad (16)$$

$T = 300 \text{ K}$ の場合.

飽和水蒸気圧は $35.4 \times 10^2 \text{ Pa}$. (12) から 100 kPa の飽和空気における混合比は

$$m = 0.62 \times \frac{35.4 \times 10^2}{100 \times 10^3} = 2.19 \times 10^{-2} \quad (17)$$

この値を (11) に代入すると

$$T^* - T = 4.01 \text{ K} \quad (18)$$

¹飽和水蒸気圧の値は理科年表および一般気象学 (小倉 2000) より引用.

3.2 (1.7) と $dq = -Ldm$ から飽和断熱減率の式 (3.15) を導け。(ここで T に対する L の変化はの場合小さいのでこれを無視する) このとき (3.12) から dm を置換し Γ_s として (3.15) を得よ。

[解] 解

(3.12) より

$$\frac{dm}{dz} = \frac{\epsilon}{p} \frac{de}{dT} \frac{dT}{dz} - \frac{\epsilon e}{p^2} \frac{dp}{dz}, \quad (1)$$

変形して

$$\frac{\epsilon}{p} \frac{de}{dT} \frac{dT}{dz} = \frac{dm}{dz} + \frac{\epsilon e}{p^2} \frac{dp}{dz},$$

また式 (1.7)

$$c_p dT - V dp = dq$$

において、問題文より与えられる

$$dq = -Ldm$$

を代入すると

$$\begin{aligned} c_p dT - V dp &= -Ldm \\ dm &= \frac{V dp}{L} - \frac{c_p dT}{L}, \end{aligned} \quad (2)$$

(1)、(2) より

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{p} \frac{de}{dT} \frac{dT}{dz} &= \frac{V}{L} \frac{dp}{dz} - \frac{c_p}{L} \frac{dT}{dz} + \frac{\epsilon e}{p^2} \frac{dp}{dz} \\ \left(\frac{\epsilon}{p} \frac{de}{dT} + \frac{c_p}{L} \right) \frac{dT}{dz} &= \left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \frac{dp}{dz}, \end{aligned} \quad (3)$$

これにおいて静水圧の式 (3.7)

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho_a(1 + \xi),$$

クラウジウスクラペイロンの式 (3.13)

$$\frac{de}{dT} = \frac{LeM_{rv}}{RT^2}$$

を (3) に代入すると

$$\left(\frac{\epsilon}{p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} + \frac{c_p}{L} \right) \frac{dT}{dz} = - \left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) g\rho_a(1 + \xi), \quad (4)$$

変形して

$$\begin{aligned} - \frac{c_p}{L} \left(\frac{\epsilon L}{c_p p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} + 1 \right) \frac{dT}{dz} &= \left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) g\rho_a(1 + \xi) \\ - \frac{dT}{dz} &= \frac{g}{c_p} \left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a(1 + \xi) L \right) \left(\frac{\epsilon L}{c_p p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} + 1 \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\Gamma_s = \Gamma_d \left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a (1 + \xi) L \right) \left(\frac{\epsilon L}{c_p p} \frac{Le M_{rv}}{RT^2} + 1 \right)^{-1}, \quad (5)$$

(5) を (3.15) と比較すると

$$\left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a (1 + \xi) L \right) \quad 1 + \frac{Le M_{rv}}{pRT}$$

となればよいことがわかる。

ここで $\left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a (1 + \xi) L \right)$ について考える。

$\rho_a (1 + \xi) = \rho$ 、 $V = \frac{1}{\rho}$ であることを利用すると

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a (1 + \xi) L \right) &= \left(V + \frac{\epsilon e}{p^2} L \right) \rho \\ &= 1 + \frac{\epsilon e}{p^2} L \rho, \end{aligned}$$

ここで $\xi = m$ 、 $m = \frac{\rho_v}{\rho_a}$ (3.11) を利用すると

$$\rho = \rho_a (1 + \xi) = \rho_a (1 + m) = \rho_a \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_a} \right) = \rho_a + \rho_v$$

であり、また (3.9)、(3.10)

$$p - e = \frac{\rho_a RT}{M_{ra}} \quad e = \frac{\rho_v RT}{M_{rv}}$$

を代入すると $\frac{\epsilon e}{p^2} L \rho$ は

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon e}{p^2} L \rho &= \frac{\epsilon e}{p^2} L (\rho_a + \rho_v) \\ &= \frac{\epsilon Le (p - e) M_{ra}}{p^2 RT} + \frac{\epsilon Le e M_{rv}}{p^2 RT}, \end{aligned}$$

ここで $e \ll p$ とすると $\epsilon = M_{rv}/M_{ra}$ であり

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon e}{p^2} L \rho &= \frac{\epsilon Le (p - e) M_{rv}}{p^2 \epsilon RT} + \frac{\epsilon Le e M_{rv}}{p^2 RT} \\ &= \frac{Le M_{rv}}{pRT}, \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{V}{L} + \frac{\epsilon e}{p^2} \right) \rho_a (1 + \xi) L \right) &= \left(V + \frac{\epsilon e}{p^2} L \right) \rho \\ &= 1 + \frac{\epsilon e}{p^2} L \rho \\ &= 1 + \frac{Le M_{rv}}{pRT} \end{aligned}$$

となり、(5) は

$$\Gamma_s = \Gamma_d \left(1 + \frac{Le M_{rv}}{pRT} \right) \left(1 + \frac{Le M_{rv}}{pRT} \cdot \frac{\epsilon L}{c_p T} \right)^{-1}$$

これは (3.15) である

3.4 (3.14) において分母の第 2 項の典型的な値を求め、すべての大気状態に対してそれが $\ll 1$ であることを示せ。 [$\frac{dL}{dT}$ はおよそ $-2 \text{ Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$]

[解]

$$\frac{g}{c_p} \cdot \frac{\{1 + (LeM_{rv}/pRT)\}\{1 + (e\varepsilon/p)\}}{[1 + (\varepsilon e/p c_p)\{c + (dL/dT)\} + (\varepsilon e L^2 M_{rv}/c_p p R T^2)]} \quad (19)$$

上式 (3.14) の分母第 2 項目は

$$V = \frac{\varepsilon e}{p c_p} \left(c + \frac{dL}{dT} \right) \quad (20)$$

これに以下の値を代入する (教科書 p275 からの Appendices 参照)。

- $\varepsilon = 0.622$
- $e = 610.78 \text{ [Pa]}$
- $\frac{dL}{dT} = -2 \times 10^3 \text{ [Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$
- $c = 4.218 \times 10^3 \text{ [Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$
- $c_p = 1005 \text{ [Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$
- $p = 1.01325 \times 10^5 \text{ [Pa]}$

$$V \simeq 8.277 \times 10^{-3} \ll 1 \quad (21)$$

地球上でもっとも気温が高い場所でも 320K 程度である。教科書 p256 の飽和水蒸気圧の表から 49 (表中最も気温が高い) の飽和水蒸気圧は 11740Pa であり、(20) の値は

$$V \simeq 1.591 \times 10^{-1} \ll 1 \quad (22)$$

となる。

3.5 (3.15) 中の $\epsilon L/c_p T$ の値を求め、それが常に > 1 、すなわち $\Gamma_s < \Gamma_d$ となることを示せ。

[解]

(3.15) を再掲する。

$$\Gamma_s = \Gamma_d \left[1 + \frac{LeM_{rv}}{pRT} \right] \left[1 + \frac{LeM_{rv}}{pRT} \cdot \frac{\epsilon L}{c_p T} \right]^{-1} \quad (3.15)$$

この式の右辺から、 $\epsilon L/c_p T$ が常に > 1 である場合、 $\Gamma_s < \Gamma_d$ となることがわかる。

実際に $\epsilon L/c_p T$ を見積もる。地球大気温度 T の範囲はせいぜい $200\text{K} \sim 350\text{K}$ と考えられる。この温度の範囲では、水の定圧比熱 c_p は一定であると考えてよいと思われる。このとき任意の温度 T_1 における水の蒸発熱 L の値は、任意の温度 T_0 における L の値を基準にして、以下の形で表せる²。

$$L^{T_1} = L^{T_0} - (c_p - c_p^v)(T_1 - T_0), \quad (\text{P3.1})$$

ただし、 L^{T_0}, L^{T_1} はそれぞれの温度における L の値、 c_p^v は水蒸気の定圧比熱である。教科書巻末の表から、 273K において $L = 2.500 \times 10^6 \text{J kg}^{-1}$ である。これらの値を上式の T_0, L_0 に代入して、

$$L = 2.500 \times 10^6 - (c_p - c_p^v)(T - 273), \quad (\text{P3.2})$$

を得る。結果、 $\epsilon L/c_p T$ は

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon L}{c_p T} &= 2.500 \times 10^6 \frac{\epsilon}{c_p T} - (c_p - c_p^v)(T - 273) \frac{\epsilon}{c_p T} \\ &= 3.687 \times 10^2 \frac{1}{T} - 0.350 \left(\frac{T - 273}{T} \right) \\ &= 464.3 \frac{1}{T} - 0.350 \end{aligned} \quad (\text{P3.3})$$

ただし $\epsilon = 0.622$, $c_p = 4.218 \times 10^3 \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, $c_p^v = 1.847 \times 10^3 \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ を用いた。先述のとおり地球大気温度を $200\text{K} \sim 350\text{K}$ と考えれば、(P3.3) から地球大気においては常に $\epsilon L/c_p T > 1$ であり、結局 $\Gamma_s < \Gamma_d$ となることがわかる。

²温度 T_0 の水と水蒸気の単位質量あたりのエンタルピーをそれぞれ $H_l^{T_0}, H_v^{T_0}$ とし、 T_1 における水と水蒸気のエンタルピーを $H_l^{T_1}, H_v^{T_1}$ とする。ここで相変化を伴わない、温度の変化に伴うエンタルピーの変化 ΔH は

$$\Delta H = \int_{T_0}^{T_1} c_p dT = c_p(T_1 - T_0)$$

と書ける。よって H^{T_0}, H^{T_1} はそれぞれ

$$\begin{aligned} H_l^{T_1} &= H_l^{T_0} + c_p(T_1 - T_0) \\ H_v^{T_1} &= H_v^{T_0} + c_p^v(T_1 - T_0) \end{aligned}$$

と書ける。蒸発熱は気相と液相のエンタルピーの差に等しいので、上の2式から

$$\begin{aligned} H_v^{T_1} - H_l^{T_1} &= H_v^{T_0} - H_l^{T_0} + (c_p^v - c_p)(T_1 - T_0) \\ L^{T_1} &= L^{T_0} - (c_p - c_p^v)(T_1 - T_0) \end{aligned}$$

を得る。

3.6 静水圧平衡の式 (1.2) より, 高度 z における圧力 $p(z)$ と温位 $\theta(z')$ の関係が以下の式により表されることを示せ.

$$\left\{ \frac{p(z)}{p(0)} \right\}^\kappa = \frac{\kappa g M_r}{R} \int_z^\infty \frac{dz'}{\theta(z')} \quad (*)$$

ただし, $\kappa = (\gamma - 1)/\gamma$ である.

[解]

静水圧平衡の式 (1.2) は以下の通り.

$$dp = -g\rho dz \quad (1.2)$$

これに, 温位の式 $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ 及び状態方程式 $p = \rho RT/M_r$ を代入する.

$$\begin{aligned} dp &= -g\rho dz \\ &= -g \frac{pM_r}{RT} dz \\ &= -g \frac{pM_r}{R} \frac{1}{\theta} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa dz \end{aligned} \quad (4)$$

p 及び z で変数分離を行い, 高度 z から大気上端まで (圧力においては P から 0 まで) を積分する.

$$\begin{aligned} \frac{p^{\kappa-1}}{p_0^\kappa} dp &= -\frac{gM_r}{R} \frac{dz}{\theta} \\ \int_p^0 \frac{p'^{\kappa-1}}{p_0^\kappa} dp' &= \int_z^\infty -\frac{gM_r}{R} \frac{dz'}{\theta} \\ -\frac{p^\kappa}{\kappa p_0^\kappa} &= -\frac{gM_r}{R} \int_z^\infty \frac{dz'}{\theta} \\ \left\{ \frac{p(z)}{p(0)} \right\}^\kappa &= \frac{\kappa g M_r}{R} \int_z^\infty \frac{dz'}{\theta(z')} \end{aligned} \quad (5)$$

となり, (*) は導出された.

3.7 6月のある日, 0001 GMT にリバプールから上昇したラジオゾンデによって以下のような観測が行われた.

気圧 (kPa)	気温 (°C)	露点 (霜点) (°C)
100	13	11
94	9.5	8
90	7	5
78	0	-3
70	-5	-11
60	-11	-17
50	-20	-28
40	-32	-42
30	-47	
20	-49	
15	-50	
10	-48	

テフィグラム上に観測結果を図示し次の設問に答えよ.

1. 対流圏界面における圧力はいくらか?
2. 上昇においてどの部分が (a) 乾燥空気, (b) 飽和空気にとって安定か?
3. 100 kPa, 50 kPa において混合比 (水蒸気 : 空気) はいくつか?
4. 夜間、地表面が放射によって冷却するとする. 霧が発生するまでに何度冷却する必要があるか?
5. 翌日地表面の空気が温められ断熱的に上昇するとする. どの高度で凝結が起こるか?
6. 同じ日に発達する積雲の上端の高度はどのくらいか?

[解]

1. 対流圏界面における圧力はいくらか?
 温度の鉛直プロファイルが 300 kPa より上空では -50°C 前後で一定となっている. したがって対流圏界面の圧力は 30 kPa である.
2. 上昇経路においてどの部分が (a) 乾燥空気, (b) 飽和空気にとって安定か?
 (a) 乾燥空気
 乾燥空気において $d\theta/dz > 0$ が成り立つ時, 大気は静力学的に安定である. テフィグラムから気層のどの領域においても $d\theta/dz > 0$ が成り立っているため, 経路全てにおいて安定である.
 (b) 飽和空気
 大気の鉛直温度分布が飽和空気に対して安定であるためには, 任意の高度から飽和空気塊を断熱的に上昇させたとき, この気塊の温度が同高度の気温より低ければよい. $P = 78$ [kPa], $T = 0^{\circ}\text{C}$ の点から上空へ湿潤断熱線

(1) を引くと、大気の温度分布はそれより右側に位置しどの高度においても湿潤断熱線の温度のほうが気温より低い。よって安定である。また 78 [kPa] より上層の各点についても同様の理由により安定になっている。一方 78 [kPa] より下層の各点から引いた湿潤断熱線の温度の方が同高度の気温より高く不安定である。

3. 100 kPa, 50 kPa において混合比 (水蒸気 : 空気) はいくつか?

(3.11) 式より混合比 m [g Kg^{-1}] を求める式は以下で与えられる。

$$m = \frac{e\epsilon}{p - e} \quad (6)$$

e は水蒸気圧 [Pa], p は全圧 [Pa], ϵ は乾燥空気の平均分子量に対する水蒸気の分子量の比で $\epsilon = 18.015/28.961 = 0.622$ である。観測結果から露点を与られているのでテキスト巻末の飽和水蒸気圧の表 (p276, Table A2) を参照して各々の高度での水蒸気圧 e を求める。これを上式に代入すれば混合比 m が得られる。尚, m は無次元量であるが, 定義式 $m = m_w/m_d$ において (m_w ; 気塊に含まれる水の質量, m_d ; 気塊に含まれる乾燥空気の質量), m_d を kg, m_w を g で表すと g kg^{-1} の有次元量になる。

- 100 kPa での混合比

露点 $T = 11^\circ\text{C}$ より水蒸気圧は $e = 1311.9$ [Pa]. よって,

$$m = \frac{0.622}{10^5 - 1311.9} \cdot 1311.9 = 8.26 \times 10^{-3} \quad (7)$$

これより $m = 8.26 \text{ g kg}^{-1}$.

- 50 kPa での混合比

露点 $T = -28^\circ\text{C}$ より液体の水の水蒸気圧は $e = 61.34$ [Pa]. よって,

$$m = \frac{0.622}{5.0 \times 10^4 - 61.34} \cdot 61.34 = 0.76 \times 10^{-3} \quad (8)$$

これより $m = 0.76 \text{ g kg}^{-1}$. ちなみに, 氷の水蒸気圧を用いれば $e = 46.69$ [Pa] なので,

$$m = \frac{0.622}{5.0 \times 10^4 - 46.69} \cdot 46.69 = 5.81 \times 10^{-4} \quad (9)$$

これより $m = 0.58 \text{ g kg}^{-1}$.

4. 夜間、地表面が放射によって冷却するとする。霧が発生するまでに何度冷却する必要があるか?

露点で水蒸気は飽和し凝結を始める。地表面温度と露点の差の分を放射によって冷却してやればよい。よって $13 - 11 = 2^\circ\text{C}$.

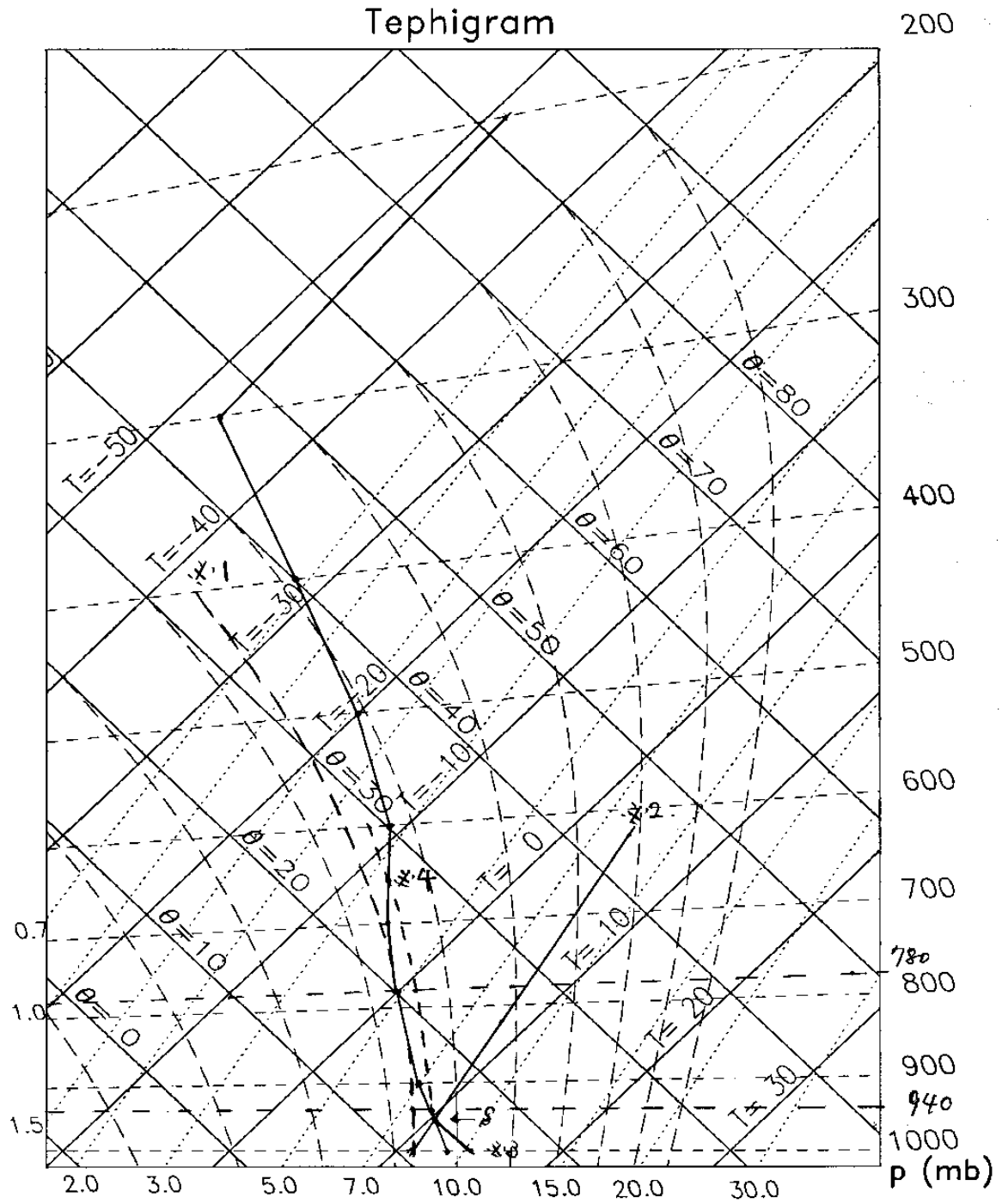
5. 翌日地表面の空気が温められ断熱的に上昇するとする. どの高度で凝結が起こるか?

太陽光によって地表面温度は上昇する. 地表面の空気が断熱的に上昇するとその気塊の温度は地表面温度を端点値とする乾燥断熱線上 (3) を変化する. 設問 3 から地表面の空気の飽和混合比が 8.26 g kg^{-1} と得られた. したがって凝結は乾燥断熱線と 8.26 g kg^{-1} の飽和混合比線 (2) の交点 S で始まる. この時の圧力は 95 kPa である.

6. 同じ日に発達する積雲の上端の高度はどのくらいか?

S 点から気塊は湿潤断熱線 (4) に沿って上昇を続ける. 観測された温度分布が湿潤断熱線よりも左側にある場合は気塊の温度のほうが高く上昇し続ける. 湿潤線が再び観測による温度分布との交点で上昇は止まる. ゆえに積雲の到達高度は約 65 kPa である.

Tephigram



q_s (g/kg)

--- isobars (pressure) sat. specific humidity
 - - - saturated adiabats ——— dry adiabats (θ)

*1, $P = 78 \text{ kPa}$, $T = 0^\circ\text{C}$ を通る湿潤断熱線 (設問2)

*2, $m = 8.26 \text{ g kg}^{-1}$ の飽和混合比線 (設問5)

*3, 層間 地表面が太陽光で加熱され 大気下方が加熱された時の温度分布 (設問5)

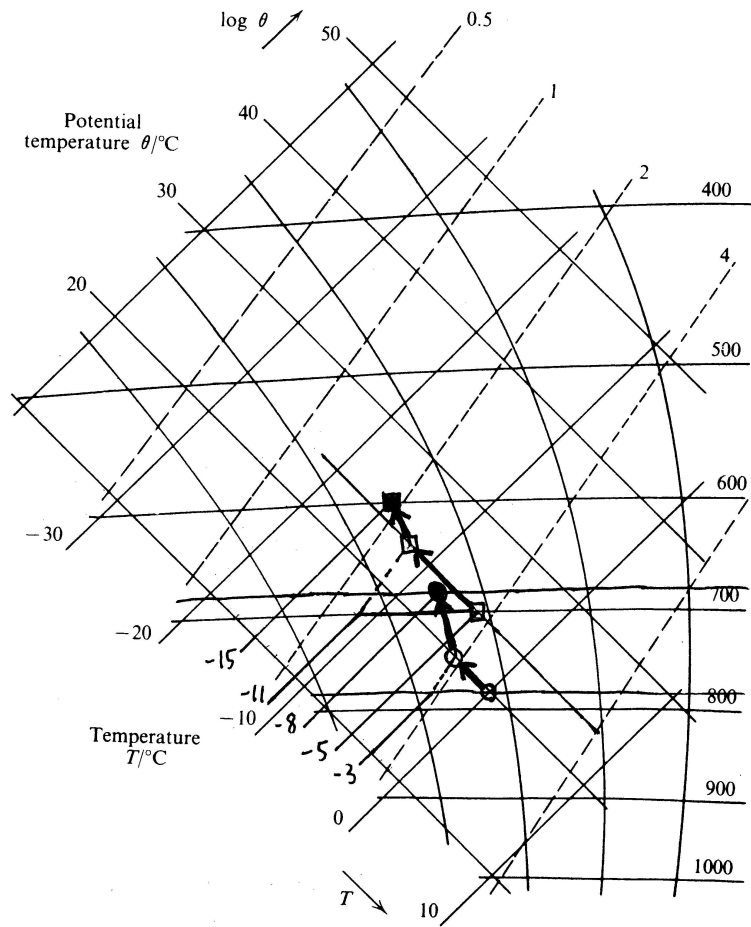
*4, 露点の引いた湿潤断熱線 (設問6)

- 3.8 問題 3.7 で与えられた大気を, 山脈や寒冷前線の寒気の前面で強制的に押し上げてみる. 初期状態として, 78 ~ 70 kPa の大気の層 (乾燥, および湿潤な断熱上昇に関して安定) を考える. そして, この大気が 8 kPa の気圧差を保ったまま, 10 kPa 分押し上げられると仮定する. 大気の底を, 飽和するまでは乾燥断熱で上昇させ, そこからは湿潤断熱で上昇させて得られる新しい温度を, テフィグラムを用いて求めよ. 大気の上端においても, 同様に上昇させた結果得られる温度を求めよ. その結果, その大気の層が湿潤上昇に関して不安定になっていることを示せ. そのような状態をポテンシャル不安定 (*potential instability*) と呼ぶ. この不安定の大きさは, 対流がどの程度発達するのかを決定する.

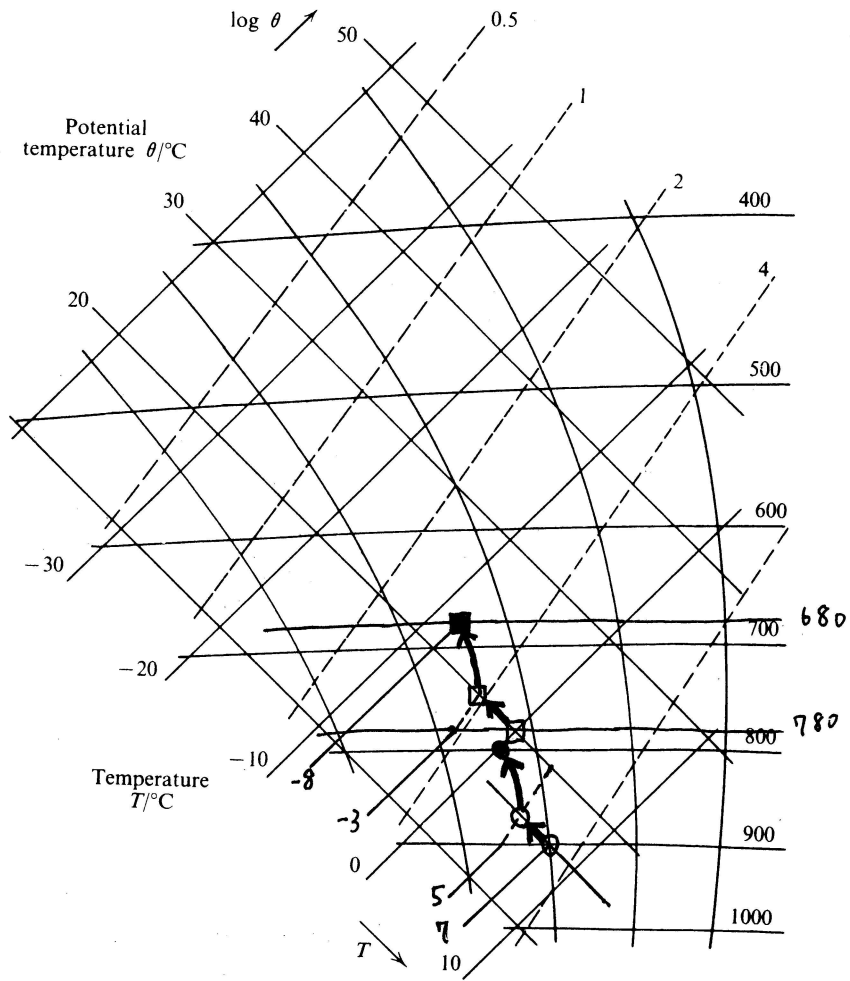
同様な問題を, 90 kPa ~ 78 kPa の大気の層についても行ってみよ.

[解]

以下に, テフィグラムを用いて 78 ~ 70 kPa の大気の層を 10 kPa 分上昇させた様子をプロットした. 丸マーク () は大気の底を, 四角マーク () は大気の上端を表している. 最終的な状態は黒く塗りつぶしてある. この図から, 大気の底の温度は 0°C から -8°C に, 大気上端の温度は -5°C から -15°C になることが分かる. また, 大気の底と上端の最終状態から湿潤断熱線を辿ると, 大気の底の方が「暖かい」ことが分かる. このことは, この大気の層が湿潤上昇に関して不安定になってしまったことを示す.



以下に、テフィグラムを用いて 90 ~ 78 kPa の大気の層もプロットした。この図から、大気の底の温度は 7 °C から 0 °C に、大気上端の温度は 0 °C から -8 °C になった。この図でも先の図と同様に、湿潤上昇に関して不安定になっていることがわかる。(上昇する前から不安定だけど)。



3.9 再び問題 3.7 の状態を考え、空気を地表面から凝結高度までは乾燥断熱線に沿って、その後まわりの温度に達するまでは湿潤断熱線に沿って上昇させる。図のふさわしい面積を測ることによって、1 kg の空気をこの地点まで持ち上げるために必要な仕事を計算せよ。

さて、その空気塊を再びまわりの温度に達するまで湿潤断熱線に沿って上昇させ続ける。この二回目の上昇で解放されるエネルギーを計算せよ。

一連の上昇に対して、正味のエネルギー解放は正であることを示せ。このような状況は「潜在不安定」(latent instability) として知られている。一旦、鉛直運動を起こすほど地表面が十分に加熱されるとエネルギーが解放されることがあり、活発な対流運動と、ときには雷雨が発生する可能性がある(図 3.6 参照)。

[解]

1. 仕事の計算について

今考える空気塊(質量を m とする)が任意の高さにあるとき、この空気塊に働く力は、鉛直下向きの重力 mg と、上向きの浮力 $\bar{m}g$ である。ここで \bar{m} は空気塊が排除した分のまわりの空気の質量である(以下でも $\bar{\cdot}$ がついた物理量はまわりの空気のものを表わし、 \cdot がない物理量は空気塊のもの表わす)。よって、空気塊の運動方程式は、鉛直上向きを正として、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = (\bar{m} - m)g$$

と書ける。この式の両辺を m で割ると、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\bar{m} - m}{m}g$$

であるが、空気塊は $m = 1 \text{ kg}$ であるから、右辺は依然として空気塊に加わる力を表わしている。さらに、右辺を密度 ρ で表わすため、分母分子を空気塊の体積で割ると、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho}g$$

を得る。

パーセル法では空気塊の圧力は常にまわりの空気の圧力と等しいとするから、上式の右辺は状態方程式 $p = \rho RT$ より、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}}g$$

と変形できる。地表面 z_0 から最初にまわりの空気の温度に達する高さ z_1 までは $T > \bar{T}$ であるから、空気塊には鉛直下向きの力が働く。よって、下向きの力に打ち勝って z_0 から z_1 まで空気を持ち上げるのに必要な仕事 W は、

$$W = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\bar{T} - T}{\bar{T}} g dz$$

となる（符号に注意）。

以下、 W とテフィグラム上の面積との対応づけを考える。まず静力学平衡の式 $dp = -\rho g dz$ と状態方程式より、

$$\begin{aligned} W &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{\bar{T} - T}{\bar{T}} g dz = - \int_{p_0}^{p_1} \frac{\bar{T} - T}{\rho \bar{T}} dp = - \int_{p_0}^{p_1} R \frac{\bar{T} - T}{p} dp \\ &= -R \int_{p_0}^{p_1} (\bar{T} - T) d(\ln p) \end{aligned}$$

となる。また温位の式 $\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa$ を対数微分して、

$$d(\ln \theta) = d(\ln T) - \kappa d(\ln p)$$

が成り立つから、 $T = \text{一定}$ のときは、

$$d(\ln p) = -\frac{1}{\kappa} d(\ln \theta) = -\frac{c_p}{R} d(\ln \theta)$$

となる。よって、

$$W = -R \int_{p_0}^{p_1} (\bar{T} - T) d(\ln p) = c_p \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\bar{T} - T) d(\ln \theta)$$

を得る。テフィグラム上では A の領域の面積に c_p をかけたものになる。実際に A の面積を計算してみる。ここで $c_p = 1005 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ を用いる。A はほぼ三角形になっており、底辺はおよそ 2 K に、高さは $\log \theta$ で 0.007 となるので、

$$W = 1005 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 0.007 = 7.07 = 7 \text{ J}$$

となる。

2. 解放されるエネルギーの計算について

z_1 より上では $T > \bar{T}$ であるから、空気塊は鉛直上向きの力を受ける。よって、空気塊には外から仕事を加えなくても、再び $T = \bar{T}$ となる高さ z_2 まで空気塊は上向きの仕事を受け上昇する。その分が運動エネルギーになる。したがって、得られる運動エネルギー KE は、

$$KE = \int_{z_1}^{z_2} \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} g dz = c_p \int_{\theta_1}^{\theta_2} (T - \bar{T}) d(\ln \theta)$$

となる（符号に注意）。これはテフィグラム上の B の領域の面積に c_p をかけたものに等しい。実際に B の面積を計算してみると、A の面積のおよそ 9 倍になっている。具体的な B の面積の計算法としては、領域をテフィグラムの線で区切られたいくつかの部分に分け、各部分を三角形または台形で近似して面積を求め、それらの面積を加えあわせた。よって、

$$KE = 9 \times 7 \text{ J} = 63 \text{ J}$$

となる (ちなみに解答では 65 J となっている)。

3. 正味のエネルギー解放が正であることについて

以上の考察により、空気塊を持ち上げるのに必要な仕事より、解放エネルギーされるエネルギーの方が絶対値が大きい。よって、正味のエネルギー解放としては正となる。

4. コメント

z_1 の高さのことを自由対流高度といい、 z_2 の高さのことを平衡高度という。1. で求めた W を対流抑制 (CIN, convective inhibition) といい、2. で求めた KE を対流有効位置エネルギー (CAPE, conventional available potential energy) という。

図. テフィグラム

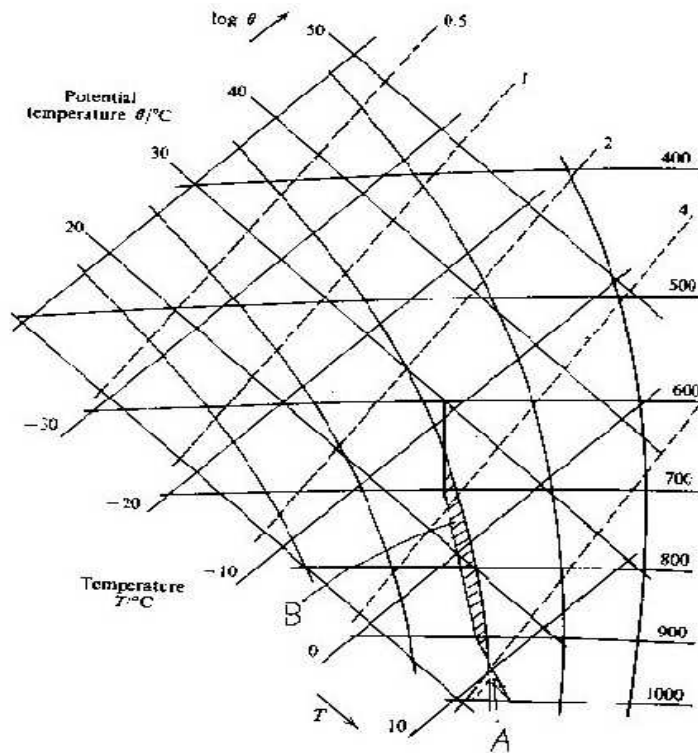
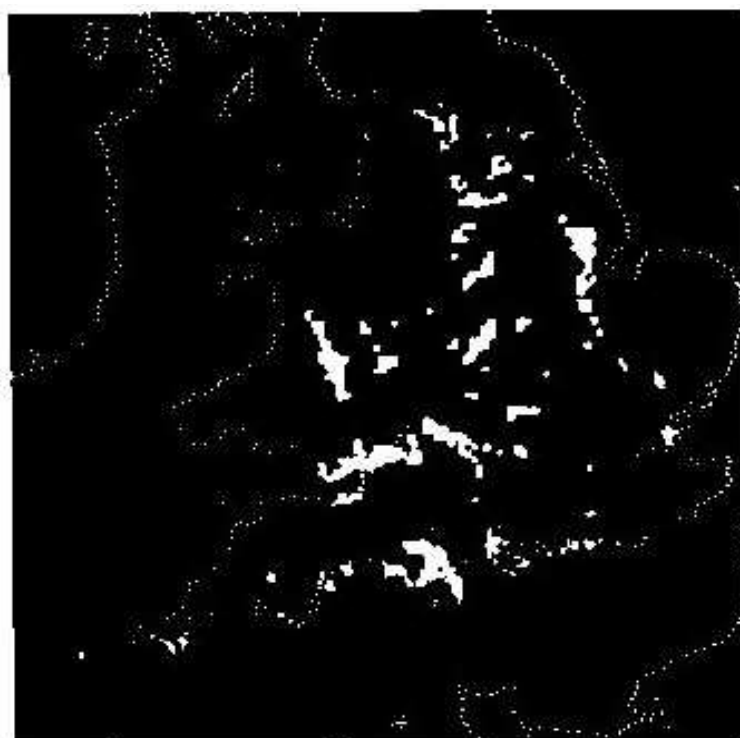


図 3.6 (a) 雲の画像 (ダンディー大学の電子研究所が受信した AVHRR 可視チャンネル) が 1980 年 6 月 26 日の 1428 GMT に TIROS N 衛星から取られた。中央および南イギリスと大陸近くにわたって見られる雲は、ある夏の午後の極空気塊で観察されるものの典型である。太陽によって温められた陸地をわたって流れる冷たい空気が不安定化し、上昇流と雲を生成する。まわりの冷たい海上では対流はあまり見られない。

多くの雲は輝いていて、したがって、鋭い輪郭を持っていて厚い (§6.4 参照)。中には、北東側に影を投げかけるものがあった。雲系の中には数十キロメートルにわたって広がっているものもある一方、とても小さいものがあった。なぜなら、発達している最中か、より大きな系の活発な上昇流のまわりの空気の埋め合わせるような下降流によって発達が抑えられているからである。



図 3.6 (つづき) (b) レーダーネットワーク画像 (気象庁からの無償提供) がある時刻に衛星画像にしたがって得られた (降水の測定に対するレーダー技術は §12.4 に記述されている)。衛星画像に見られる多くの特徴をレーダーによって探知可能な降雨からエコーに関連して見ることができる。特にウオッシュの西側、南ウェールズ、セバーン川河口周辺、西海岸の雲系に関連した雨に注目せよ。雨の中には、レーダー画像で白い領域で描かれているように激しいものがあり、雷雨が報告された。成長の初期段階には、雲は空気が上昇するにつれて凍る過冷却された水滴からなる。氷の粒子は、終端速度が雲の中の上昇流速度を越えるようなある大きさに成長すると地面に向けて落下し、雲下部の過冷却水滴をかき集める。より小さな氷粒子は上昇流で運ばれ続け、対流圏上部に達し、風下に吹かれる。これは、にわか雨の日の「かなとこ雲」の特徴をもっており、衛星画像でいくつかの明るいエコーの南東にうっすらとした雲として検出できる。



3.13 図 3.2 に含まれる情報から式 (3.22) の数値積分を行い、北半球での有効位置エネルギーを計算しなさい。図 3.2 は帯状平均の情報を含んでいるので、得られた答えは帯状平均の有効エネルギーを見ていることに注意しなさい。得られた答えと図 3.3 を比べなさい。

[解] 図 3.2 から数値を読み取り以下の値を計算する。

$$E_A = (1 + \kappa)^{-1} c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \int_0^{\infty} (\overline{p^{1+\kappa}} - \bar{p}^{1+\kappa}) d\theta \quad (3.22)$$

θ	$\overline{p^{1+\kappa}}$	$\bar{p}^{1+\kappa}$	$\overline{p^{1+\kappa}} - \bar{p}^{1+\kappa}$
260	2.568×10^6	2.567×10^6	1.076×10^3
280	2.165×10^6	2.157×10^6	7.571×10^3
300	1.945×10^6	1.912×10^6	3.279×10^4
320	9.643×10^6	9.474×10^6	1.689×10^4
340	4.746×10^6	4.725×10^6	2.104×10^3
360	2.734×10^6	2.728×10^6	5.425×10^2
380	1.985×10^6	1.968×10^6	1.729×10^3
400	1.408×10^6	1.399×10^6	9.490×10^2

上記の値より $E_A = 3.68 \times 10^6$ (J/m²).

図 3.3 では帯状風による有効位置エネルギーは 3.4×10^6 J/m² である。この値は図 3.2 で計算した値とほぼ一致する。つまり図 3.2 は帯状平均した値であることから、ここで計算した値には渦による有効位置エネルギーは含まれていないと考えることができる。

3.14 (3.23) 式から (3.24) 式を次のようにして導け :

- (1) 等圧面上で $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ ($\bar{\theta}$ は等圧面上の平均値) であれば、 $p = \bar{p} + p'$ としたとき周囲の等温位面上では

$$p' = \theta' dp/d\theta$$

であることを示せ。

- (2) (3.4) 式から

$$\frac{d\theta}{dp} = -\kappa\theta p^{-1} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)$$

を示せ。ここで $\Gamma = -dT/dz$ は気温減率、 $\Gamma_d = g/c_p$ は乾燥断熱減率とする。

- (3) (1) の結果で p を平均値で置き換えて $p' = -\theta' d\bar{p}/d\theta$ が使えるとし、(3.24) を導くために (3.23) 式に (1)、(2) の結果を代入する。

[解]

- (1) この問題は p の変化量と θ の変化量をうまく結びつけることができなかつたため解けませんでした。

- (2) (3.4) 式で両辺の対数をとると

$$\log \theta = \log T + \kappa \log \frac{p_0}{p} \quad (10)$$

微分して

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\kappa \frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} \quad (11)$$

この式の右辺を $-\kappa dp/p$ でくくると

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\kappa \frac{dp}{p} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dT}{T} \cdot \frac{p}{dp}\right) \quad (12)$$

となる。(12) 式の右辺第二項について静水圧平衡の式 $dp = -\rho g dz$ 、状態方程式 $p = \rho RT$ 、 $\Gamma = -dT/dz$ 、 $\Gamma_d = g/C_p$ 、 $\kappa = (C_p - C_v)/C_p$ の関係を使うと

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{T} \frac{p}{dp} &= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\rho RT}{-\rho g dz} \cdot \frac{dT}{T} \\ &= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{C_p - C_v}{C_p} \cdot \frac{dT}{dz} \\ &= \frac{\Gamma}{\Gamma_d} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。以上より

$$\frac{d\theta}{dp} = -\kappa\theta p^{-1} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right) \quad (14)$$

が示された。

(3) (14) 式で $p = \bar{p}$ のとき

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = -\frac{\bar{p}}{\kappa\theta\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)} \quad (15)$$

となる。これを $p' = -\theta' d\bar{p}/d\theta$ に代入すると

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\theta'}{\kappa\theta\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)} \quad (16)$$

これと (3.4) 式を (3.23) 式に代入する。

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2} \frac{\kappa C_p}{g} \int_0^\infty \bar{p} \left(\frac{\bar{p}}{p_0}\right)^\kappa \overline{\left(\frac{p'}{\bar{p}}\right)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\kappa C_p}{g} \int_0^\infty \bar{T} \left(\frac{\bar{p}}{\theta}\right) \overline{\left(\frac{\theta'}{\kappa\theta}\right)^2} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-2} d\theta \end{aligned} \quad (17)$$

ここで (15) 式を使って θ についての積分を p についての積分に変換すると

$$E_A = \frac{1}{2} \frac{\kappa C_p}{g} \int_\infty^0 \bar{T} \left(\frac{\bar{p}}{\theta}\right) \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-2} \overline{\left(-\frac{\theta'}{\kappa\theta}\right)^2} \left(\frac{\kappa\theta}{\bar{p}} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right) d\bar{p}\right) \quad (18)$$

$\theta' \propto T', \theta \propto \bar{T}$ より

$$E_A = \frac{1}{2} \frac{C_p}{g} \int_0^\infty \bar{T} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-2} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp \quad (19)$$

となり (19) は (3.24) 式に等しい。以上より (3.24) 式を導くことができた。

3.15 半球上の太陽放射の平均入射量と図 3.3 における以下の量を比較せよ。

1. 帯状有効位置エネルギーの生成率
2. 運動エネルギーの生成率

[解]

1. 太陽放射の平均入射量は $F = 1370 \text{Wm}^{-2}$ であり、図 3.3 より帯状有効位置エネルギーの生成率は $G_A = 1.5 \text{Wm}^{-2}$ 。その比は $G_A/F = 1.09 \times 10^{-3}$ であり、太陽放射の入射量に対して帯状有効位置エネルギーの生成率は非常に小さいことがわかる。
2. 同じく図 3.3 運動エネルギーの生成率は $G_K = 2.2 \text{Wm}^{-2}$ であるから太陽放射との比は $G_K/F = 1.60 \times 10^{-3}$ となりこれも太陽放射の入射量に対する帯状有効位置エネルギーの生成率は非常に小さいことがわかる。

3.16 図 3.2 から有効位置エネルギーの発生に対する効率因子の分布を書け.

[解] 効率因子 : $1 - \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^\kappa$ の分布を図 3.2 より求める.³

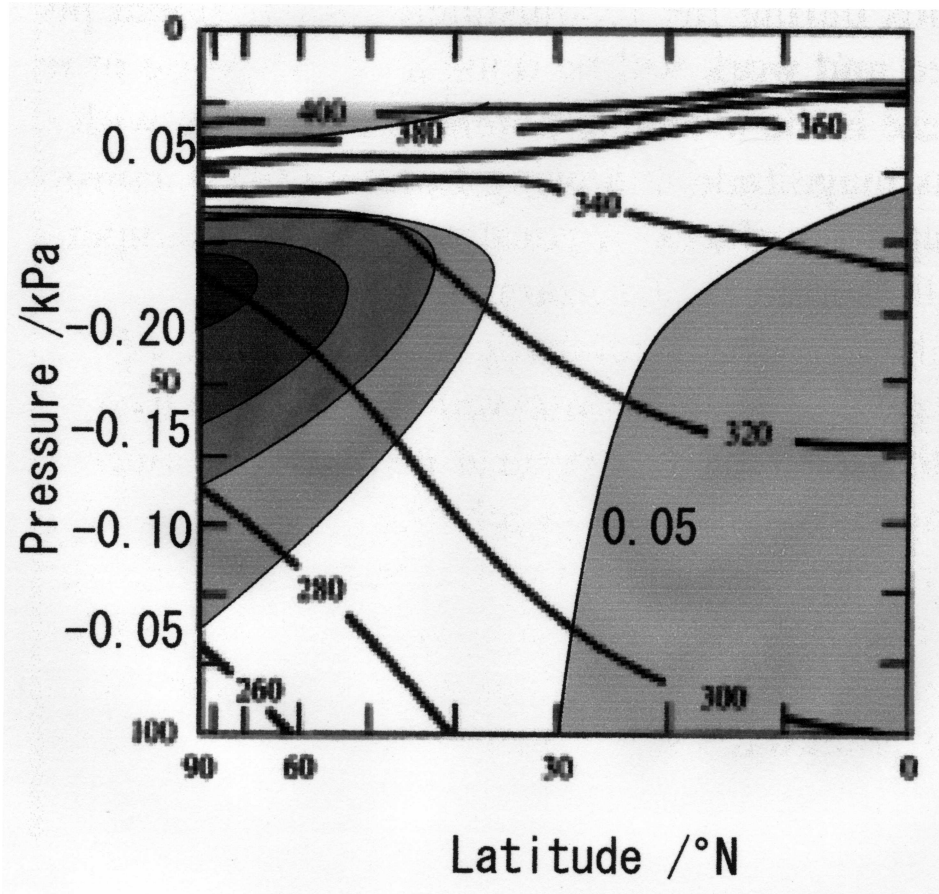


図 P3.1: 効率因子分布

$\{\int 1 - (\bar{P}/P)^\kappa\} \dot{q} dm$ が有効位置エネルギーの発生割合である.

図 3.2 (b) 及び (c) を見比べてみる. まず低緯度低高度については, 加熱することにより (c) の状態から遠くなる, すなわち有効位置エネルギーが増加するため, 効率因子は正である. 次に, 高緯度の高高度では, 冷却されることにより有効位置エネルギーが増加するため, 効率因子は負となる. よって解答のような効率因子の分布が得られる.⁴ また, 現段階で有効位置エネルギーが大きい領域程, 効率因子の値は大きくなっている.

³具体的には, まず図 3.2 (b)(c) を重ねてみて, 等温位面が交わった点を取り, 効率因子 0 の面とした. 次に効率因子に, $-0.25 - 0.10$ を代入し, 各等温位面ごとに対応する P の値を算出し, 図化した. また, \bar{P} の値は, 図 3.2 (c) から与えた.

⁴これは, 効率因子の絶対値に関する説明である. 値の大きさについてはよくわからない... 要は効率因子の理解が足りない為なのだが.