# Problems

2.1 **大気の上端に入射する太陽エネルギーの 1/3 が大気に吸収される時、その大気での平均の温度上昇率がおよそ 1[K per day] であることを示せ (損失は考えない)。放射過程により変化する温度の割合は K per day で表されることが多い。たとえば対流圏での長波放射によるエネルギーの消散の平均の割合は 1[K per day] である。**

[解] 時間 dt で大気によって吸収されるエネルギー (dE) は太陽エネルギーの 1/3 なので

$$dE = \frac{1}{3}F\pi a^2 dt \tag{P2.1}$$

となる。ただし、太陽定数 $F$:1367[Wm$^{-2}$]、地球の平均半径 $a$:$6.37 \times 10^6$[m]。

このエネルギーがすべて地球の大気が吸収すると考えると、定圧比熱をつかって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}F\pi a^2 dt &= mC_p dT \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\pi a^2 F}{3mC_p} \quad [\mathrm{Ks}^{-1}] \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\pi a^2 F}{3mC_p} \times 60 \times 60 \times 24 \quad [\mathrm{Kday}^{-1}]
\end{aligned} \tag{P2.2}$$

ここで乾燥空気の定圧比熱 $C_p$ : 1004[JK$^{-1}$kg$^{-1}$]、大気の質量 $m$ : $5.3 \times 10^{18}$[kg] より

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 \times 1367}{3 \times (5.3 \times 10^{18}) \times 1004} \\
&= 0.9431 \quad [\mathrm{Kday}^{-1}] \\
&\sim 1
\end{aligned}$$

よって大気での平均の温度上昇率がおよそ 1[K per day] であることが示された。この結果より地球の温度は 1[K per day] ずつ上昇することになるが、問題文から消散される量も 1[K per day] なので、気温は上昇し続けることはない。

2.2 **一定の吸収係数を持ち高さ方向に対し一様にかき混ぜられた吸収体でできている大気を仮定する．地表面 (気圧 $100$ kPa [1] ) での温度は $280$ K, 対流圏界面 (気圧 $25$ kPa ) での温度は $220$ K である．放射平衡状態を仮定したとき $\phi$ を求めよ．また, (2.12) 式の $\chi^*$ を圧力の関数として求めよ．このような仮定のもとでは, 地表面での温度の不連続性はどうなるか.**

[解]

光学的深さを圧力の関数として求める．光学的深さ $\chi^*$ は

$$\chi^* = -\int \frac{5}{3} k\rho dz$$

で与えられる ($k$: 吸収係数)．この式に静水圧平衡の式

$$dp = -\rho g dz$$

を代入して

$$\begin{aligned} \chi^* &= \int \frac{5k}{3g} dp \\ &= \frac{5k}{3g} p. \end{aligned}$$

地表面における温度を $T_g$, 光学的深さを $\chi_0^*$, また, ステファンボルツマン定数を $\sigma$ とおく．$B = \pi^{-1}\sigma T^4$ より教科書 (2.15) は

$$\pi^{-1}\sigma T_g^4 = \frac{\phi}{2\pi}(\chi_0^* + 2)$$

と表される．光学的深さは圧力に比例するので対流圏界面での光学的深さは $\chi{*}_0$ を用いると

$$\frac{25\ [\mathrm{kPa}]}{100\ [\mathrm{kPa}]}\chi_0^* = \frac{1}{4}\chi_0^*$$

と表される．対流圏界面で (2.12) を適用すると

$$\pi^{-1}\sigma T_{trop}^4 = \frac{\phi}{2\pi}(\frac{1}{4}\chi_0^* + 1).$$

2 式から $\phi$ を消去して, $\chi_0^*$ について解く．$T_g = 280$ K$, T_{trop} = 220$ K を代入すると

$$\chi_0^* = \frac{T_g^4 - 2T_{trop}^4}{T_{trop}^4 - \frac{1}{4}T_g^4} = 1.813$$

[1] 教科書では地表面気圧については何も書かれていなかった．しかし, 問題を解く上では必要な情報であるのでここではこのように地表面気圧を仮定した.

を得る．この値を (2.15) に代入すると ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m$^{-2}$ とする)

$$\phi = \frac{2\sigma T_g^4}{\chi_0^* + 2} = 183 \text{ W m}^{-2}$$

を得る．

地表面温度の不連続について調べる．地表面付近の大気の温度を $B_0$ とおくと, 教科書 (2.13) から, 地表面での温度の不連続は以下のように表される．

$$\begin{aligned} B_g - B_0 &= \frac{\phi}{2\pi} \\ \sigma(T_g^4 - T_0^4) &= \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

この式を $T_0$ について解くと

$$T_0 = (T_g^4 - \frac{\phi}{2\sigma})^{1/4}$$

先程求めた $\phi = 133$ W m$^{-2}$ を代入すると

$$T_0 = 259.5 \text{ K}.$$

したがって地表面における温度の不連続は

$$T_g - T_0 = 20.5 \text{ K}$$

となる．

2.3 **§2.3 では大気全体に放射平衡が成り立つという仮定のもと計算が行われた。対流圏界面より下の領域における放射平衡から対流までの変化による対流圏界面より上の領域においての放射平衡に対する効果を質的に評価せよ。(図 2.5)**

[解] 結論からいうと、対流圏界面より下の領域における変化が上の領域に与える効果はない。その理由を今回は対流圏界面の上下の領域に関しての温度構造の式を求め、その式を見ながら考察することにする。
まず放射平衡に関して考える。
大気の運動が全くない時を考えると、

$$\frac{dI}{dz} = 0$$

となる。大気は波長依存性なく高度に関し連続な吸収率 $\kappa$ を持つような大気であり、放射はエネルギー束 $I^{\uparrow}$,$I^{\downarrow}$ に分けて、

$$I = I^{\uparrow} - I^{\downarrow}$$

と書けるとすると、両方向の放射は吸収物質の量 $\kappa\rho$ に比例した吸収と、再放射 $B = \sigma T^4$ を行うので、Schwarzschild の方程式

$$dI = -I\kappa\rho dz + B\kappa\rho dz$$

を使うと、

$$\frac{dI^{\uparrow}}{dz} = \kappa\rho(-I^{\uparrow} + B)$$

$$\frac{dI^{\downarrow}}{-dz} = \kappa\rho(-I^{\downarrow} + B)$$

これにおいて静水圧平衡の式 $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g$ を利用して $dz$ を消去すると、

$$\frac{g}{\kappa}\frac{dI}{dp} = I^{\uparrow} + I^{\downarrow} - 2B$$

$$(*1) \qquad \frac{g}{\kappa}\frac{d(I^{\uparrow} + I^{\downarrow})}{dp} = I \equiv I_s$$

ここで $I_s$ は太陽放射を表す。このとき大気の運動は無く $\frac{dI}{dz} = 0$ であるので $\frac{dI}{dp} = 0$ となり

$$\frac{g}{\kappa}\frac{dI}{dp} = I^{\uparrow} + I^{\downarrow} - 2B = 0$$

これを (*1) に代入してやると、

$$\frac{g}{\kappa}\frac{d(I^{\uparrow} + I^{\downarrow})}{dp} = I_s$$

$$\frac{g}{\kappa}\frac{d(2B)}{dp} = I_s$$

$$\frac{dB}{dp} = \frac{\kappa}{2g} I_s$$

となり、大気上端 $(p = 0)$ では $I^{\downarrow} = 0$ であるから

$$I^{\uparrow} + I^{\downarrow} - 2B = 0$$

$$I^{\uparrow} - 2B = 0$$

$$I - 2B = 0$$

$$B = \frac{I}{2} = \frac{I_s}{2}$$

となるので、もし $\kappa$ や $g$ の変化が無視できるならば最後の式は容易に積分でき、

$$T(p) = (\frac{B}{\sigma})^{\frac{1}{4}} = [\frac{I_s}{2\sigma}(\frac{\kappa}{g}p + 1)]^{\frac{1}{4}}$$

を得る。

ここで対流圏にかんして考えると、大気下端 $(p = p_0)$ の温度が不連続である温度ギャップがあり、また大気下層で $\frac{dT}{dz} < -\Gamma(\Gamma$：乾燥断熱減率$)$ となり、放射平衡の温度勾配は対流不安定であり、この温度分布がそのまま維持されることはなく、対流平衡の温度分布が寄与される。そのため、ここで大気の熱力学的性質を考えて対流平衡にかんして考えると、
熱力学の第一法則より、

$$dU = dQ + dW$$

である。この関係を、まず乾燥した空気塊 (温度 $T$ 気圧 $p$ 体積 $V$) に当てはめてみると、いまこの空気塊に外部から熱 $dQ$ が与えられ、そのために温度が $dT$ だけ上昇し、体積が $dV$ だけ膨張したとすると、この関係は、

$$C_v dT = dQ + (-pdV) \tag{$*2$}$$

となる。ここで、$C_v$ は定積比熱で、$C_v dT$ が内部エネルギーの増加であり、右辺第二項は $pdV$ が膨張により空気塊の外に作用した仕事であるから、外からなされた仕事は $-pdV$ となる。
さてここで、断熱状態、つまり $dQ = 0$ であったときを考えると、

$$C_v dT = -pdV$$

となる。ここで、単位質量の理想気体に対する状態方程式

$$p = \rho RT(or \quad p\alpha = RT)$$

を導入し、$\alpha$ を $\rho^{-1}$、すなわち比容とすれば、これを微分して、

$$\alpha dp + pd\alpha = RdT$$

を得る。ここでこの式を $(*2)$ で $dV$ を $d\alpha$ に代えたものに代入し、$C_p - C_v = R$($C_p$ は定圧比熱) と静水圧平衡の式 $dp = -\rho g dz$ をもちいれば、乾燥空気の断熱減率は

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{C_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{g}{R}$$

となる。ここで $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$、$R = 2.8706 \times 10^6 [\mathrm{erg\,gm^{-1}\,K^{-1}}](287.06[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}])$ であり、$\frac{dT}{dz}$ は $9.8[\mathrm{K\,km^{-1}}]$ である。
一方、大気中では水蒸気の相変化がおこり凝結の潜熱が放出されるので、飽和している空気ではその効果を考慮にいれなければならない。すなわち、凝結の起こっている湿潤空気に対する断熱変化では、

$$C_v dT = -p dV - L dw_s$$

となり、ここで $w_s$ は湿潤空気に含まれる飽和水蒸気の質量であり、$L$ は凝結の潜熱定数である。つまり $-Ldw_s$ は凝結の潜熱である。この場合の断熱減率は、

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{C_p} \cdot \frac{1}{1 + (L/C_p)(dw_s/dT)}$$

で与えられる。この湿潤断熱減率は水蒸気量にもよるが約 $5[\mathrm{K\,km^{-1}}]$ である。
つまり、乾燥空気では $9.8[\mathrm{K\,km^{-1}}]$ 以上、湿潤空気では約 $5[\mathrm{K\,km^{-1}}]$ 以上の気温減率をもつ気層は不安定になり、対流が発生することが予想できる。ところが、実際の大気では湿潤な部分も乾燥した部分もあるので、断熱変化による気温減率はこの中間の値になり、教科書のような $6[\mathrm{K\,km^{-1}}]$ が得られる。
また成層圏にかんしては大気は安定して層をなしており放射による熱輸送が支配的であるため、放射平衡の式がそのまま利用される。
つまり、対流圏での温度分布に関しては

$$\frac{dT}{dz} = -6$$

の式が利用され、成層圏での温度分布に関しては

$$T(p) = (\frac{B}{\sigma})^{\frac{1}{4}} = [\frac{I_s}{2\sigma}(\frac{\kappa}{g}p + 1)]^{\frac{1}{4}}$$

の式が利用されることが分かる。
ここで成層圏の温度構造の式が対流圏からの影響を受けるかを考える。このとき上の式において $p$、$g$、$I_s$、$\sigma$ にかんしては下層大気の効果を考えなくてよく、また今の場合 $\kappa$ にかんしては $\kappa = constant$ であるので $\kappa$ による効果も考えなくてよい。つまり対流圏界面より上の領域では下の領域からの効果はないとかんがえられる。

教科書から考える場合 (2.12) より、

$$B = \frac{\phi}{2\pi}(\chi^* + 1)$$

であり、$B$ に関してみると、$\phi$、$\chi^*$ に関して下層大気の効果を考えればよい。
今の場合 $\phi = constant$ であり $\phi$ からの効果は考えなくてもよい。
また、$\chi^*$ に関しては $\chi^* = \frac{\kappa p}{g}$ である。

2.5 **金星の太陽日の長さを求めよ．(表 1.2 の値を用い，金星の自転の向きは地球や火星と逆向きであることに注意して導出せよ.) また，雲の効果は無視して，問題 2.4 と同様の手法で，金星の下層大気における放射の時定数を見積もれ．金星では雲による温室効果と，おそらく大気の運動によって，観測される下層大気の昼夜の温度差は無い (図 2.7 参照).**

[解]
太陽日とは太陽の中心が正中してから次に正中するまでの時間を言う．惑星は太陽の周りを公転していると同時に自転しているため，一般的に自転周期[2]と太陽日は一致しない．金星の場合，自転と公転の向きが逆向きであるために，太陽日の長さは自転周期よりも短い．以下でその具体的な値を求める．表 1.2 から金星の自転周期は地球の太陽日を単位として 243 日である．金星の公転周期として 225 日を用いると，金星の自転の角速度を $\omega_{rev}$[deg/day]，公転の角速度を $\omega_{rot}$ とすると

$$\omega_{rev} = 360/225, \quad \text{(P2.3)}$$
$$\omega_{rot} = 360/243 \quad \text{(P2.4)}$$

と与えられる．このとき太陽日を $T_{sun}$ と表すと，$T_{sun}$ は以下の方程式を満足する．

$$\omega_{rev}T_{sun} = 360 - \omega_{rot}T_{sun} \quad \text{(P2.5)}$$

よって金星の太陽日は

$$T_{sun} = \frac{360}{\omega_{rev}+\omega_{rot}} = \frac{243 \cdot 225}{468} = 116(\mathrm{day}) \quad \text{(P2.6)}$$

となる．これは巻末の解答と一致する．

次に問題 3.4 と同様に金星大気の時定数を見積もる．問題 3.3 と同様に (2.14) を (1.3) を用いて変形し，$h = H$(スケールハイト) とおくことで，$\tau = c_p p/8\sigma T^3 g$ と書ける．p=$9.00\times10^6$ [N m$^{-2}$] , $c_p = 850$ [J kg$^{-1}$ K], $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$[J m$^{-2}$ K$^{-4}$ s$^{-1}$], $T = 750$ [K], $g = 8.84$ [N kg$^{-1}$] とすると

$$\tau \simeq 48.8\ [\text{地球日}] = 0.44\ [\text{金星日}] \quad \text{(P2.7)}$$

を得る．ただし気圧は地表面気圧を用い，温度には地表面温度を用いた．実際の大気下端における温度は地表面温度よりも大幅に低い値となるので，この時定数は短く見積もった値であると言える．

[2] 自転周期は恒星日と呼ばれる．

2.6 **金星の地表面温度はおよそ 750 K である (table 1.1 参照). table 1.2 の値** $T_m$[3] **と放射平衡を仮定した式 (2.15) より 金星大気の光学的厚さを算出せよ.**

[解]

放射平衡を仮定した式 (2.15) より,

$$B_g = \frac{\phi}{2\pi}(\chi_0^* + 2) \tag{2.15}$$

ただし, $B_g$ : 地表面の黒体関数, $\phi$ : 正味放射フラックス, $\chi_0^*$ : 地表面での光学的厚さである. $\phi$ は, (2.5) より, 以下のように与えられる.

$$\phi = F^{\uparrow} - F^{\downarrow} \tag{2.5}$$

ここで大気上端の場合を考える. 下向き放射フラックス $F^{\downarrow}$ は 0 であり, 上向き放射フラックス $F^{\uparrow}$ はその有効放射温度での黒体関数 $B_{eff}$ で書くことができる. よって,

$$\begin{aligned} \phi &= F^{\uparrow} \\ &= \pi B_{top} \end{aligned} \tag{P2.8}$$

(**??**) を (2.15) へ代入すると,

$$B_g = \frac{\pi B_{top}}{2\pi}(\chi_0^* + 2) \tag{P2.9}$$

$$\chi_0^* = 2\frac{\pi B_g}{\pi B_{top}} - 2 \tag{P2.10}$$

ここで, $\pi B_g = \sigma {T_g}^4, \pi B_{top} = \sigma {T_m}^4$ を代入すると,

$$\chi_0^* = 2\frac{{T_g}^4}{{T_m}^4} - 2 \tag{P2.11}$$

$T_g = 750$ [K], $T_m = 230$ [K] を代入すると

$$\begin{aligned} \chi_0^* &= 224.13 \\ &\simeq 224 \end{aligned} \tag{P2.12}$$

よって, 地表面での光学的厚さは, およそ **224** .

[3]観測された有効放射温度