

Problems

1.2 TABLE 1.2 の値から単位面積あたりの木星内部起源のエネルギー量を計算しなさい.

[解]

木星の半径を a , 温度の観測値を T_m , ステファンボルツマン定数を σ とおく. 木星の放射エネルギー量は $4\pi a^2 \sigma T_m^4$ であたえられる. 木星が受け取る太陽放射エネルギーの量は (1.1) より $4\pi a^2 \sigma T_e^4$ であたえられる. 従って内部発熱に起因する放射エネルギー量は

$$4\pi a^2 \sigma (T_m^4 - T_e^4)$$

したがって単位面積あたりでは

$$\sigma (T_m^4 - T_e^4)$$

となる. $\sigma = 5.67 \times 10^8 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$, また, 表 1.2 から $T_m = 130 \text{ K}$, $T_e = 98 \text{ K}$ である. これらの値を代入して計算すると

$$\begin{aligned} & 5.67 \times 10^8 \times (130^4 - 98^4) \\ & = 11.0 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

になる.

1.5 もし温度が高度 z において一様に $10Kkm^{-1}$ にさがったら高度における圧力の落差をわかりやすく表現せよ。

[解] 高度 z における圧力を $p(z)$ とすると式 (1.5) より

$$p(z) = p_0 \exp - \int_0^z \frac{dz}{H}$$

スケールハイト H は

$$H = \frac{RT}{M_r g}$$

より、これを代入して

$$p(z) = p_0 \exp - \int_0^z \frac{M_r g}{RT} dz \quad (*)$$

また式 (1.9) より

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_d$$

条件より $\Gamma_d = 10^{-2}$ なので

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_d = -10^{-2}$$

$$T = -10^{-2}z + T_0 (T_0 : z = 0 \text{ での温度})$$

これを (*) に代入して

$$p(z) = p_0 \exp - \frac{M_r g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0 - 10^{-2}z} dz$$

$$p(z) = p_0 \exp \frac{M_r g}{10^{-2}R} \ln \left(1 - \frac{10^{-2}z}{T_0} \right)$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{10^{-2}z}{T_0} \right)^{\frac{M_r g}{10^{-2}R}}$$

1.4 地球大気において、圧力が 1/10 になる高さを計算せよ。

(1) 290 K の等温大気を仮定する。

(2) 地表面温度 290 K で、温度減率 10K km^{-1} (一定) を仮定する。

[解]

以下の、圧力の関係式 (1.4) を用いる。

$$p = p_0 \exp \left\{ - \int_0^z dz/H \right\}, \quad (H = RT/M_r g). \quad (\text{P1.1})$$

また、本文から、

$$\begin{aligned} M_r &= 28.8 \times 10^{-3} \quad (\text{1 mol あたり}) \\ g &= 9.81 \quad [\text{m s}^{-2}] \\ R &= 8.3143 \quad [\text{J K}^{-1}\text{mol}^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{P1.2})$$

である。

(1) 式 (P1.1) を z に関する式に変形する。温度は $T = 290\text{ K}$ で一定なのでスケールハイト H も定数と考えることができるので、

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \exp \left\{ - \int_0^z dz/H \right\} \\ \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= - \left[\frac{z}{H} \right]_0^z \\ z &= -H \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \\ z &= - \frac{RT}{M_r g} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{P1.3})$$

となる。大気は等温のため、 $T = 290\text{ K}$ である。圧力が 1/10 になる高さ z を調べるので、 $p = p_0 \times 10^{-1}$ とする。これらの値と (P1.2) を (P1.3) に代入すると、

$$\begin{aligned} z &= - \frac{8.3143 \times 290}{28.8 \times 10^{-3} \times 9.81} \ln \left(\frac{p_0 \times 10^{-1}}{p_0} \right) \\ &= 19650.69352 \\ &\simeq 1.97 \times 10^4 \quad [\text{m}] \\ &= 19.7 \quad [\text{km}] \end{aligned}$$

となる。以上より、圧力が 1/10 になる高さは 19.7 km である。実際には、地上から中間圏¹ あたりまでは、高度がほぼ 15 km 上がるにつれ気圧が 1/10 になる²。この

¹中間圏は、およそ高度 48 ~ 80 km.

²参考文献

小倉義光, 1984: 一般気象学. 東京大学出版会, 308pp.

誤差は、上記の計算で用いた 290 K が実際より高いことが原因である。また中間圏よりさらに上の熱圏や外気圏では気圧が 1/10 になるのに 100 km 以上の高さが必要である。この高さになると、分子量が著しく減っていくためである。

(答え) 19.7 km

(2) 式 (P1.1) を z に関する式に変形する。今回は温度が $T = T_0 - \Gamma z$ K ($T_0 = 290$ K, $\Gamma = 10^{-2}$ K/m) となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_0} &= \exp \left\{ - \int_0^z \frac{M_r g}{RT_0 - \Gamma z} dz \right\} \\
 \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= - \frac{M_r g}{R} \int_0^z \frac{\Gamma^{-1}}{T_0 \Gamma^{-1} - z} dz \\
 \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= \frac{M_r g \Gamma^{-1}}{R} \left[\ln \{ (T_0 \Gamma^{-1}) - z \} \right]_0^z \\
 \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= \frac{M_r g \Gamma^{-1}}{R} \left(\ln \{ T_0 \Gamma^{-1} - z \} - \ln (T_0 \Gamma^{-1}) \right) \\
 \ln \{ T_0 \Gamma^{-1} - z \} &= \frac{R \Gamma}{M_r g} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + \ln (T_0 \Gamma^{-1}) \\
 \ln \{ T_0 \Gamma^{-1} - z \} &= \ln \left\{ T_0 \Gamma^{-1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \Gamma}{M_r g}} \right\} \\
 T_0 \Gamma^{-1} - z &= T_0 \Gamma^{-1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \Gamma}{M_r g}} \\
 z &= T_0 \Gamma^{-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \Gamma}{M_r g}} \right\}. \tag{P1.4}
 \end{aligned}$$

あとは、問(1)と同様のやり方で、 $p = p_0 \times 10^{-1}$ 、 $T_0 = 290$ K と (P1.2) を (P1.4) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 z &= (290 \times 10^2) \left\{ 1 - \left(\frac{p_0 \times 10^{-1}}{p_0} \right)^{\frac{8.3143 \times 10^{-2}}{28.8 \times 10^{-3} \times 9.81}} \right\} \\
 &= 1.427295339 \times 10^4 \text{ [m]} \\
 &\simeq 14.3 \text{ [km]}
 \end{aligned}$$

となる。この値は実際の大气 (対流圏～中間圏) の振る舞いに近い (問(1)参照)。それは、今回用いた問題設定の「温度減率 10 K km^{-1} 」が (問(1)の問題設定よりは) 現実の大气に近いからである。

(答え) 14.3 km

- 1.5 地表面と高度 100km 間では、重力加速度 g は何 % 変化するか？また、重力加速度 g 一定のときの高度 100km における圧力と高度により重力加速度 g が変化するときの圧力の誤差を 1.4 式を用いて見積りなさい。

[解]

単位質量 ($m=1\text{kg}$) の気塊を考える。地表面で気塊にはたらく重力加速度と、高度 100km で気塊にはたらく重力加速度はそれぞれ、

$$g_0 = G \frac{M_e}{R_e^2} \quad (\text{P1.5})$$

$$g_{100} = G \frac{M_e + \delta M}{(R_e + \delta z)^2} \quad (\text{P1.6})$$

と表せる。(0.2) 式の δM は地表面から高度 100km までの大気質量である。地球半径 $R_e = 6.378 \times 10^6 [\text{m}]$ 、地球質量 $M_e = 5.983 \times 10^{24} [\text{kg}]$ 、大気平均密度を地表面での密度とすると $\rho = \rho_0 = 1.225 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、万有引力定数 $G = 6.673 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2/\text{kg}^2]$ より、

$$\delta M = \rho \int_0^z 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho z^3 = 5.129 \times 10^{15} [\text{kg}] \quad (\text{P1.7})$$

これは、 $M_e + dM \equiv M_e$ とみなせる。よって、

$$g_0 = 6.673 \times 10^{-11} \frac{5.983 \times 10^{24}}{(6.738 \times 10^6)^2} = 9.813 [\text{m}/\text{s}^2] \quad (\text{P1.8})$$

$$g_{100} = 6.673 \times 10^{-11} \frac{5.983 \times 10^{24}}{(6.478 \times 10^6)^2} = 9.514 [\text{m}/\text{s}^2] \quad (\text{P1.9})$$

を得る。したがって、高度が上昇するとそれに伴い重力加速度も変化する。その変化率は、

$$\left(1 - \frac{g_{100}}{g_0}\right) \times 100 = 3.05\% \quad (\text{P1.10})$$

次に 1.4 式を用いて高度 100km における圧力 p_{100} を求める。現実大気では高度 100km まで気温は高さとともに変化するが、ここでは簡単のために $T_0 = 288.15 [\text{K}]$ 、 $T_{100} = 195.08 [\text{K}]$ とし、仮温度 T が高さに対して一定な値 $T \equiv \frac{T_0 + T_{100}}{2} (= 241.62 [\text{K}])$ をとる等温大気について考える。1.4 式に $g = 9.81 [\text{m}/\text{s}^2]$ 、気体定数 $R = 8.31 [\text{J}/\text{Kmol}]$ 、

平均分子量 $M_r = 28.96 \times 10^{-3} [\text{kg/mol}]$ 、地表面気圧 $p_0 = 1013 \times 10^2 [\text{Pa}]$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 p_{g=\text{const}} &= p_0 \cdot \exp \left\{ - \int_0^z \frac{M_r g}{RT} dz \right\} \\
 &= 1013 \times 10^2 \cdot \exp \left\{ - \int_0^{1 \times 10^5} \frac{28.96 \times 10^{-3} \cdot 9.81}{8.31 \cdot 241.62} dz \right\} \\
 &= 0.0725 [\text{Pa}] (= 7.25 \times 10^{-4} [\text{hPa}])
 \end{aligned} \tag{P1.11}$$

これに対し、 $g(z)$ が高度によって変化すると仮定した場合、と表せる。これを 1.4 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 P_{g(z)} &= P_0 \cdot \exp \left\{ - \frac{M_r}{RT} \int_0^z g(z) dz \right\} \\
 &= 1013 \times 10^2 \cdot \exp \left\{ - \frac{28.96 \times 10^{-3} \cdot 9.66 \times 10^5}{8.31 \cdot 241.62} \right\} \\
 &= 0.0903 [\text{Pa}] (= 9.03 \times 10^{-4} [\text{hPa}])
 \end{aligned} \tag{P1.12}$$

以上より、 g 一定の場合と高度により $g(z)$ が変化する場合では、

$$\left(1 - \frac{p_{g=\text{const}}}{p_{g(z)}} \right) \times 100 = 19.7 [\%] \tag{P1.13}$$

だけ圧力の値が異なる。

- 1.6 海洋の全質量は 1.35×10^{21} kg である. この質量を大気的全質量と比較しなさい. また, 海洋の熱容量と大気の熱容量を比較しなさい.

[解] 地表面気圧 p_0 とする. 地表面での気圧が p_0 であるということは, $p_0 N/m^2$ で上から押されているということである. つまり単位平方メートルあたりに p_0/g kg の重さのものが乗っていると考えればよい. つまり大気的全質量 M は

$$\begin{aligned} M = 4\pi r^2 \frac{p_0}{g} &= \frac{4 \times 3.141 \times (6.378 \times 10^6)^2 \times 1.013 \times 10^5}{9.806} \\ &= 5.35 \times 10^{18} \text{ kg} \end{aligned} \quad (\text{P1.14})$$

大気の比熱は $1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ なので熱容量は $5.37 \times 10^{21} \text{ J/K}$. 海水の比熱は $4102 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ なので熱容量は $5.54 \times 10^{25} \text{ J/K}$.

[別解] まず, 大気の質量を求める. スケールハイト H が一定 ($T=\text{const}$) であるとすると, 教科書の式 (1.4) は直ちに積分できて

$$p = p_0 \int_0^z -dz/H = p_0 e^{-z/H} \quad (\text{P1.15})$$

ただし, p_0 は地表面気圧. $p = nkT$ なので, n_0 を地表面での数密度とすると

$$n = n_0 e^{-z/H} \quad (\text{P1.16})$$

これを高度 0 m から無限大まで積分することで単位面積あたりに上空にある気体の全個数が分かる. 単位面積当たりの全個数 N は

$$N = \int_0^\infty n_0 e^{-z/H} dz = n_0 H \quad (\text{P1.17})$$

地表面での温度 T_0 とすると $n_0 = p_0/kT_0$ なので全質量 M は

$$M = 4\pi r^2 M_r \frac{N}{N_A} = 4\pi r^2 \frac{p_0 R T_0 M_r}{N_A k T_0 M_r g} = 4\pi r^2 \frac{p_0}{g} \quad (\text{P1.18})$$

よって, [解] で求めたものと同じになる.

1.7 TABLE1.1 と TABLE1.2 から火星、金星、木星の大気の断熱減率を計算しなさい。

[解]

(火星)

火星の重力加速度を g_M 、大気平均分子量を M_{rM} 、定圧比熱を C_{pM} と置く。火星大気の組成は主に CO_2 であるから C_{pM} は

$$C_{pM} = \frac{9}{2} R \frac{1000}{M_{rM}} \simeq \frac{9}{2} \times 8.3 \times \frac{1000}{44} \simeq 849 \quad (\text{P1.19})$$

よって (1.8) より火星大気の断熱減率 Γ_{dM} は

$$\Gamma_{dM} = \frac{g_M}{C_{pM}} \simeq \frac{3.76}{849} \simeq 4.43 \times 10^{-3} \quad (\text{P1.20})$$

(答) 4.43 K km^{-1}

(金星)

金星の重力加速度を g_V 、大気平均分子量を M_{rV} 、定圧比熱を C_{pV} と置く。金星大気の組成は主に CO_2 であるから C_{pV} は

$$C_{pV} = \frac{9}{2} R \frac{1000}{M_{rV}} \simeq \frac{9}{2} \times 8.3 \times \frac{1000}{44} \simeq 849 \quad (\text{P1.21})$$

よって (1.8) より金星大気の断熱減率 Γ_{dV} は

$$\Gamma_{dV} = \frac{g_V}{C_{pV}} \simeq \frac{8.84}{849} \simeq 1.04 \times 10^{-2} \quad (\text{P1.22})$$

(答) 10.4 K km^{-1}

(木星)

木星の重力加速度を g_J 、大気平均分子量を M_{rJ} 、定圧比熱を C_{pJ} と置く。木星大気の組成は主に H_2 であるから C_{pJ} は

$$C_{pJ} = \frac{7}{2} R \frac{1000}{M_{rJ}} \simeq \frac{7}{2} \times 8.3 \times \frac{1000}{2} \simeq 14525 \quad (\text{P1.23})$$

よって (1.8) より木星大気の断熱減率 Γ_{dJ} は

$$\Gamma_{dJ} = \frac{g_J}{C_{pJ}} \simeq \frac{26}{14525} \simeq 1.79 \times 10^{-3} \quad (\text{P1.24})$$

(答) 1.74 K km^{-1}

1.8 全体の体積に対して2%の水蒸気を含有する空気塊の断熱減率を求め、乾燥大気のもそれと比較せよ。

[解]

不飽和湿潤空気塊に対する断熱減率 Γ_m は、

$$\Gamma_m = \frac{g}{C_{pm}} \quad (\text{P1.25})$$

で表せる。ただし C_{pm} はこの空気塊の等圧比熱である。

まず、この空気塊の混合比 r の値を求めておく。水蒸気密度を ρ_v 、乾燥大気密度を ρ_d とすると、

$$r = \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{0.02 \times M_v/V}{0.98 \times M_d/V} = \frac{0.02 \times 18}{0.98 \times 28.95} \approx 0.0127, \quad (\text{P1.26})$$

ただし、 V は1モルの気体の体積、 M_v 、 M_d はそれぞれ水蒸気の分子量と乾燥空気の平均分子量である。混合比 r 、質量 $(1+r)$ の空気塊に熱力学第一法則を適用すると、等圧過程に対して

$$(1+r)dQ = (C_{pd} + rC_{pv})dT \quad (\text{P1.27})$$

が導かれる。ただし C_{pd} は乾燥大気の等圧比熱、 C_{pv} は水蒸気の等圧比熱である。よって式 (P1.27) より

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{(C_{pd} + rC_{pv})}{1+r} dT \\ &= \frac{C_{pd}}{(1+r)} \left(1 + \frac{C_{pv}}{C_{pd}} r\right) dT \\ &= C_{pm} dT, \end{aligned} \quad (\text{P1.28})$$

よって Γ_m は

$$\Gamma_m = \frac{g}{C_{pm}} = \Gamma_d \frac{(1+r)}{\left(1 + \frac{C_{pv}}{C_{pd}} r\right)} \quad (\text{P1.29})$$

となる。 $C_{pd} = 0.240 \text{ cal g}^{-1}\text{K}^{-1}$ ($1.005 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$), $C_{pv} = 0.332 \text{ cal g}^{-1}\text{K}^{-1}$ ($1.854 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$), $g = 9.81 \text{ m s}^{-1}$ という値を用いると、

$$\Gamma_m \approx 0.989\Gamma_d \approx 9.659 \text{ (K km}^{-1}\text{)}. \quad (\text{P1.30})$$

となる。ちなみに上述のパラメータを用いると $\Gamma_d = 9.761 \text{ (K km}^{-1}\text{)}$ となる。

- 1.9 ヘリウムで満たされた風船は、荷重 100 kg を高度 30 km まで運ぶことができる。もし、それを構成している材料が厚さ 25×10^{-4} cm , 密度 1 gcm^{-3} であるポリエチレンの場合、その風船の体積はいくらか。

[解]

風船が、高度 30 km まで運ばれるということは、風船の密度 = 高度 30 km の密度となることである。すなわち

$$\frac{\text{荷重 } 100\text{kg} + \text{ヘリウムの質量} + \text{ポリエチレンの質量}}{\text{風船の体積}} = \text{高度 } 30\text{km} \text{ の密度} \quad (\text{P1.31})$$

となる。風船は球形に近似できるものとし、その半径を r [m] とおく。

ヘリウムの質量は、理想気体の状態方程式より、 $m = M_{He}PV/RT$ 。ただし、 M_{He} : ヘリウムの分子量、 P : 圧力、 V : 体積、 R : 気体定数、 T : 温度 である。

また、ポリエチレンの質量は、 $4\pi r^2 \times \sigma \times \rho_p$, ただし、 σ : ポリエチレンの厚さ、 ρ_p : ポリエチレンの密度 である。以上より 荷重の質量を M , 高度 30km での大気密度を ρ とすると (P1.31) は以下のように書くことができる。

$$\frac{M + M_{He}PV/RT + 4\pi r^2 \sigma \rho_p}{4\pi r^3/3} = \rho \quad (\text{P1.32})$$

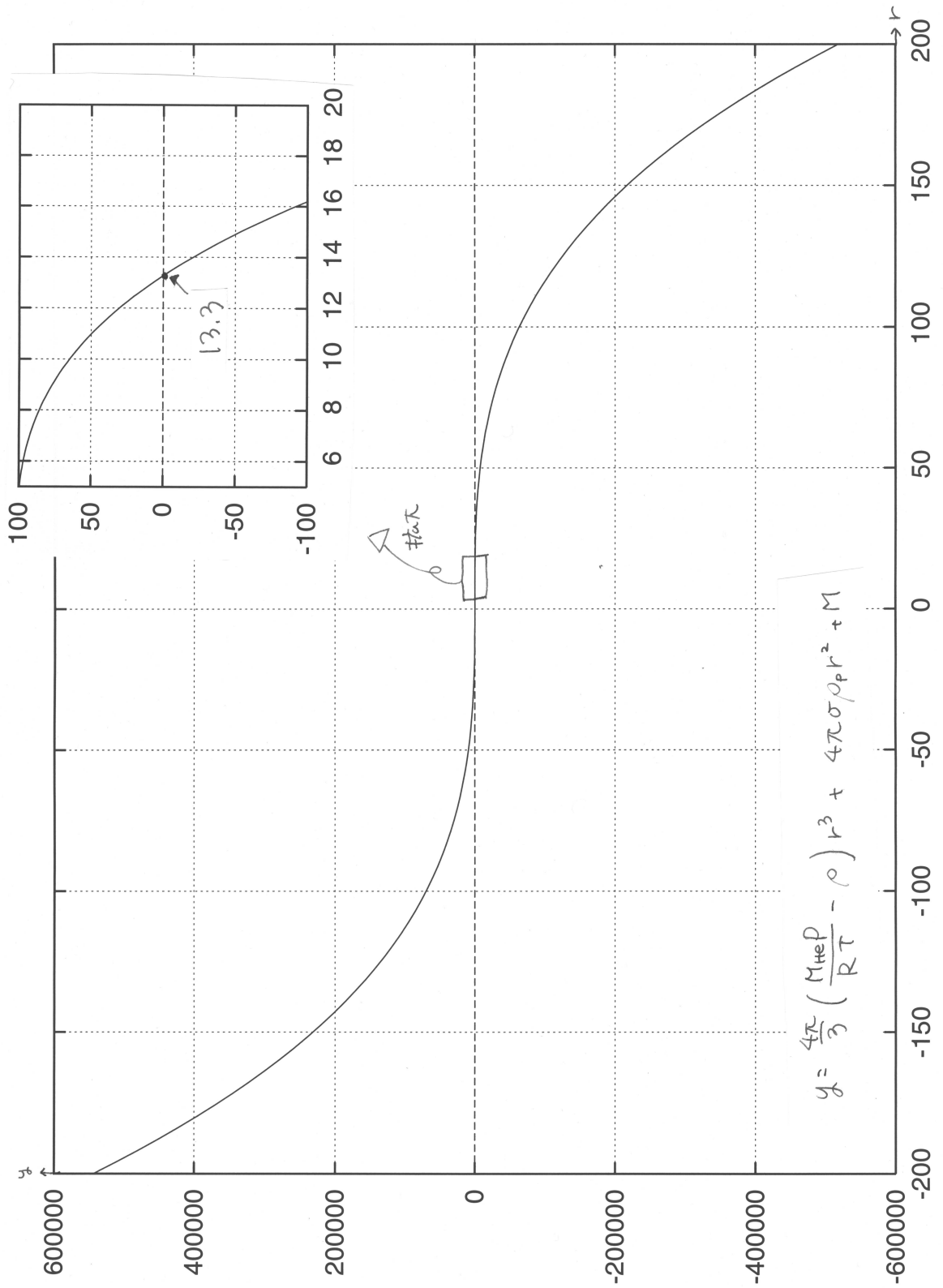
これを变形すると

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{M_{He}P}{RT} - \rho(30) \right) r^3 + 4\pi \sigma \rho_p r^2 + M = 0 \quad (\text{P1.33})$$

ここで以下の値を代入し、グラフ化する (参照)。

$$\begin{aligned} M &= 100 \text{ [kg]} \\ \sigma &= 25 \times 10^{-4} \text{ [cm]} \\ &= 2.5 \times 10^{-5} \text{ [m]} \\ \rho_p &= 1 \text{ [g cm}^{-3}\text{]} \\ &= 10^3 \text{ [kg m}^{-3}\text{]} \\ M_{He} &= 4.008 \text{ [g mol}^{-1}\text{]} \\ &= 4.008 \times 10^{-3} \text{ [kg mol}^{-1}\text{]} \\ P &= 1.197 \times 10 \text{ [hPa]} \\ &= 1.197 \times 10^3 \text{ [Pa]} \\ R &= 8.31 \text{ [JK}^{-1}\text{mol}^{-1}\text{]} \\ T &= 226.5 \text{ [K]} \\ \rho &= 1.841 \times 10^{-2} \text{ [kg m}^{-3}\text{]} \end{aligned}$$

グラフより、の解は、 $r=13.3$ に得られる。よってこの場合、風船の体積は、 $4\pi r^3/3 = 9.8 \times 10^3 \text{ m}^3$ となる。



図船の半径 [m]

[補足]

実際のヘリウムの質量, ポリエチレンの質量の値を算出する. 場合によっては近似によって解析解を得られる可能性がある.

- 1.10 鉛直温度勾配が dT/dz である大気において、つりあいの位置から Δz だけ移動したパーセルに働く鉛直方向の力について議論せよ。運動方程式を以下に示すように書き下せ。

$$\ddot{\Delta z} + gB\Delta z = 0$$

ただし、

$$B = \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_d \right)$$

$B < 0, = 0, > 0$ の場合について運動方程式の解法を説明せよ。 $B > 0$ である時、このパーセルはプラント・パイサラ振動数 $N_B = (gB)^{1/2}$ で振動する。鉛直温度勾配が地球大気下層の平均値 $dT/dz = -6.5 \text{Kkm}^{-1}$ であるときこの値を求めよ。この振動は重力波の特殊な場合である。重力波については § 8.3 でさらに詳しく議論する。

[解] 気塊においては大気との間で物質の出入りは無く断熱変化する。ただし圧力は大気圧と等しいものとする。今、つりあいの位置から Δz だけ移動した気塊内の圧力、体積、温度、密度をそれぞれ $P(\Delta z), V_p(\Delta z), T_p(\Delta z), \rho_p(\Delta z)$ とする (図 P1.1)。同じ高さの大気についても同様に $P(\Delta z), V_a(\Delta z), T_a(\Delta z), \rho_a(\Delta z)$ とおく。気塊の運動方程式は、鉛直上向きを正として次のように書ける。

$$\rho_p V_p \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = -\rho_p V_p g - \int_{V_p} P ds \tag{P1.34}$$

大気は静水圧平衡が成り立つ。気塊と同じ体積の大気をつりあいの式は、

$$-\int_{V_p} P ds - \rho_a V_p g = 0 \tag{P1.35}$$

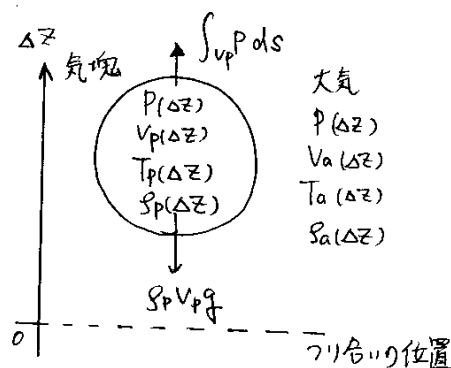


図 P1.1: 気塊に加わる力と物理量

(P1.35) 式を (P1.34) へ代入し V_p で割ると、

$$\rho_p \ddot{\Delta z} = -\rho_p g + \rho_a g \tag{P1.36}$$

ここで状態方程式

$$P = \rho_p R T_p \quad (\text{P1.37})$$

$$P = \rho_a R T_a \quad (\text{P1.38})$$

を用いて変形すると (ただし R は気体に固有な定数),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_p} \ddot{\Delta z} &= - \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_a} \right) g \\ \ddot{\Delta z} &= - \frac{1}{T_a} (T_a - T_p) g \end{aligned} \quad (\text{P1.39})$$

さらに T_p, T_a は次式で表されるから,

$$T_a = T_0 + \frac{dT}{dz} \Delta z \quad (\text{P1.40})$$

$$T_p = T_0 + \Gamma \Delta z \quad (\text{P1.41})$$

Γ は断熱減率. これらを代入して

$$\ddot{\Delta z} = - \frac{1}{T_a} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma \right) \Delta z \quad (\text{P1.42})$$

故に,

$$\begin{aligned} \therefore \ddot{\Delta z} + gB \Delta &= 0 \quad (\text{P1.43}) \\ B &= \frac{1}{T_a} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma \right) \end{aligned}$$

(P1.43) の解法

$\Delta z = e^{\lambda t}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + gB e^{\lambda t} &= 0 \\ \therefore \lambda^2 &= -gB \end{aligned} \quad (\text{P1.44})$$

1. $B < 0$ の場合 ($\Gamma < -\frac{dT}{dz}$)

(P1.44) の解は, $\lambda = \pm \sqrt{|gB|}$. 故に一般解は任意定数 A_1, A_2 を用いて以下のようなになる.

$$\Delta z = A_1 e^{\sqrt{|gB|}t} + A_2 e^{-\sqrt{|gB|}t} \quad (\text{P1.45})$$

したがって $B < 0$ であるときつりあいの位置から少しでも変位した気塊は浮力の作用で元の位置からますます離れて行く. このような場合, 流体層は静力学的に不安定 (statically unstable) であると言う.

2. $B = 0$ の場合 ($\Gamma = -\frac{dT}{dz}$)

(P1.43) 式は

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} = 0$$

となりその解は気塊の始めの位置を Δz_0 , 変位させた時の初速を $\dot{\Delta z}$ とすれば,

$$\Delta z = \dot{\Delta z}t + \Delta z_0 \quad (\text{P1.46})$$

となり気塊は大気中を等速運動する (初速が 0 であればその場所に留まっている). このような場合, 流体層は静力学的に中立 (statically neutral) であると言う.

3. $B > 0$ の場合 ($\Gamma > -\frac{dT}{dz}$) (P1.44) の解は,

$$\lambda = \pm\sqrt{gB}i$$

となり一般解は任意定数 C_1, C_2, \dots を用いて,

$$\begin{aligned} \Delta z &= C_1 e^{\sqrt{gB}it} + C_2 e^{-\sqrt{gB}it} \\ &= C_3 \cos \sqrt{gB}t + C_4 \sin \sqrt{gB}t \\ &= C_5 \sin(N_B t + \alpha) \end{aligned} \quad (\text{P1.47})$$

ただし $\tan \alpha = \frac{C_3}{C_4}$. (P1.47) 式より気塊は, ブラント=バイサラ振動数 (Brunt-Väisälä frequency) と呼ばれる角振動数 $N_B = \sqrt{gB}$ で振動することがわかる. 振動の周期 T は $2\pi/N_B$ である. このような場合, 流体層は静力学的に安定 (statically stable) と言う.

実際に N_B の値を求めてみよう. 地球大気下層の平均的な鉛直温度勾配として $\frac{dT}{dz} = -6.5 \text{Kkm}^{-1}$, その他の値を以下のように与えると.

$$\begin{aligned} g &= 9.8 \times 10^{-3} \quad [\text{Km s}^{-2}] \\ \Gamma_d &= 10 \quad [\text{K km}^{-1}] \\ T_a &= 300 \quad [\text{K}] \end{aligned}$$

これより,

$$B = \frac{1}{300} (-6.5 + 10) = 1.17 \times 10^{-2}$$

$$N_B = 1.06 \times 10^{-2} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (\text{P1.48})$$

$$T = \frac{2\pi}{N_B} = 9.87 \quad [\text{minutes}] \quad (\text{P1.49})$$

となる.