# Problems

6.1 **クラウジウス-クラペイロンの式 (3.13) を温度 $T_r$ から $T_\infty (T_r - T_\infty \ll T_\infty)$ の範囲で積分し，それぞれの温度における飽和水蒸気圧 $p_s(T_r)$，$p_s(T_\infty)$ の関係式**

$$\ln\left[\frac{p_s(T_r)}{p_s(T_\infty)}\right] \simeq \frac{LM_r(T_r - T_\infty)}{RT_\infty^2} \tag{6.15}$$

**を示せ (ここで，$R$ は気体定数，$M_r$ は水の分子量である)．**

[解] クラウジウス-クラペイロンの式

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{Lp_sM_r}{RT^2} \tag{3.13}$$

から

$$\frac{dp_s}{p_s} = \frac{LM_r}{RT^2}dT \tag{P6.1}$$

となる．この式を温度 $T_r$ から $T_\infty$ の範囲で積分すると

$$\int_{T_r}^{T=T_\infty} \frac{dp_s}{p_s} = \int_{T_r}^{T_\infty} \frac{LM_r}{RT^2}dT \tag{P6.2}$$

となる．実際に計算すると

$$\ln p_s(T_\infty) - \ln p_s(T_r) = \frac{LM_r}{RT_r} - \frac{LM_r}{RT_\infty} \tag{P6.3}$$

となる．ここで右辺は $T_r - T_\infty \ll T_\infty$ であることを用いると

$$\begin{aligned} & \frac{LM_r(T_\infty - T_r)}{RT_rT_\infty} \\ = & \frac{LM_r(T_\infty - T_r)}{RT_\infty^2\left(1 - \frac{T_\infty - T_r}{T_\infty}\right)} \\ \simeq & \frac{LM_r(T_\infty - T_r)}{RT_\infty^2}\left(1 + \frac{T_\infty - T_r}{T_\infty}\right) \\ \simeq & \frac{LM_r(T_\infty - T_r)}{RT_\infty^2} \end{aligned} \tag{P6.4}$$

となる．以上から

$$\ln\left[\frac{p_s(T_r)}{p_s(T_\infty)}\right] = \frac{LM_r(T_r - T_\infty)}{RT_\infty^2} \tag{P6.5}$$

となる．

6.2 **式 (6.2) を水蒸気密度ではなく水蒸気圧を使って書け。式 (6.4) と式 (6.15) を用いて、水滴の成長率に対する以下の表現を導け。**

$$\boldsymbol{r\frac{dr}{dt} \simeq \frac{S-1}{[(L^2 M_r \rho_L/\lambda R T^2) + \{\rho_L RT/\rho_S(T_\infty) D M_r\}]}} \tag{P6.6}$$

**ここで $S = p_\infty / p_S(T_\infty)$ であり、$p_\infty$ は水滴から遠く離れた場所での現実の水蒸気密度である。$S-1(\ll 1)$ は蒸気相の <u>過飽和度</u> である。**

**過飽和の実効度は以下の二つに依存する。(1) 特に半径が $1\mu\mathrm{m}$ 未満の水滴に対しては水滴の半径、平衡水蒸気圧は平面上の値よりかなり高い。(2) 水の純度、塩が溶けているものに対しては平衡蒸気圧が小さくなる。これらの考察から、とても小さな水滴は吸湿性の核にのみくっつく。**

[解]

・式 (6.2) を水蒸気圧を使って書く。

式 (6.2) は、

$$4\pi D \int_{\rho_\infty}^{\rho_r} d\rho = \int_\infty^r \frac{\dot{m}}{x^2} dx$$

である ($D$:拡散係数、$\dot{m}$:雲粒の質量増加率)。両辺の積分を実行すると、

$$4\pi D(\rho_r - \rho_\infty) = -\frac{\dot{m}}{r} \tag{P6.1}$$

となるが、

$$\dot{m} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_L \frac{dr^3}{dt} = 4\pi r^2 \rho_L \frac{dr}{dt} \tag{P6.2}$$

であるから ($\rho_L$:雲粒の密度)、式 (P6.2) を式 (P6.1) に代入すると、

$$4\pi D(\rho_r - \rho_\infty) = -4\pi\rho_L r\frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \quad D(\rho_r - \rho_\infty) = -\rho_L r \frac{dr}{dt} \tag{P6.3}$$

が成り立つ。最後に、状態方程式、

$$\rho = \frac{M_r p}{RT}$$

を用いれば、式 (6.2) を水蒸気圧で書いた式、

$$D\left(\frac{M_r p_r}{RT_r} - \frac{M_r p_\infty}{RT_\infty}\right) = -\rho_L r\frac{dr}{dt} \tag{P6.4}$$

を得る。

・式 (6.15) の導出

式 (6.4) の $\dot{m}$ に対して式 (P6.2) を用いれば、

$$L \cdot 4\pi r^2 \rho_L \frac{dr}{dt} = 4\pi\lambda r(T_r - T_\infty)$$

$$\therefore \quad L\rho_L r\frac{dr}{dt} = \lambda(T_r - T_\infty) \tag{P6.5}$$

を得る。式 (P6.5) の両辺に $\dfrac{LM_r}{\lambda R T_\infty^2}$ をかければ、

$$\frac{L^2\rho_L M_r}{\lambda R T_\infty^2} \cdot r\frac{dr}{dt} = \frac{LM_r(T_r - T_\infty)}{RT_\infty^2} \doteq \ln\left[\frac{p_S(T_r)}{p_S(T_\infty)}\right] \simeq \frac{p_S(T_r)}{p_S(T_\infty)} - 1 \tag{P6.6}$$

となる[1]。

以下、次の仮定、

$$p_S(T_\infty) = p_r$$
$$T_r = T_\infty$$

を置く[2,3]。式 (P6.4) を $p_r$ について解くと、

$$\frac{p_r}{T_r} - \frac{p_\infty}{T_\infty} = -\frac{\rho_L R}{DM_r} r\frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \quad p_r = p_\infty \frac{T_r}{T_\infty} - \frac{\rho_L R T_r}{DM_r} r\frac{dr}{dt} \tag{P6.7}$$

となるから、式 (P6.7) を式 (P6.6) に代入すれば (ここで $p_S(T_r) = p_r$ を使う)、

$$\begin{aligned}\frac{L^2\rho_L M_r}{\lambda R T_\infty^2} \cdot r\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{p_S(T_\infty)}\left\{p_\infty\frac{T_r}{T_\infty} - \frac{\rho_L R T_r}{DM_r} r\frac{dr}{dt}\right\} - 1 \\ &= \frac{p_\infty}{p_S(T_\infty)}\frac{T_r}{T_\infty} - \frac{\rho_L R T_r}{p_S(T_\infty)DM_r} r\frac{dr}{dt} - 1\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{L^2\rho_L M_r}{\lambda R T_\infty^2} + \frac{\rho_L R T_r}{p_S(T_\infty)DM_r}\right) r\frac{dr}{dt} = \frac{p_\infty}{p_S(T_\infty)}\frac{T_r}{T_\infty} - 1 \tag{P6.8}$$

を得る。最後に $T_r = T_\infty$ という仮定と、$\dfrac{p_\infty}{p_S(T_\infty)} = S$ という定義を使って、式 (P6.8) を $r\dfrac{dr}{dt}$ について解けば、

$$r\frac{dr}{dt} = \frac{S - 1}{\left(\frac{L^2\rho_L M_r}{\lambda R T_\infty^2} + \frac{\rho_L R T_r}{p_S(T_\infty)DM_r}\right)} \tag{6.15}$$

となる。

[1] 最後の $\simeq$ について。後で考察するように $T_r \simeq T_\infty$ である。よって $p_S(T_r)/p_S(T_\infty) \simeq 1$ となるから $\ln x$ の $x = 1$ のまわりの線形近似は、

$$\ln x \simeq \ln x|_{x=1} + (\ln x)'|_{x=1}(x - 1) = x - 1$$

となる。

[2] $p_S(T_\infty) = p_r$ について、$r$ は雨滴表面の半径であるから、この場所では液相と気相が平衡になっている。すなわち、水蒸気圧が飽和水蒸気圧に等しいとするのは妥当であろう。

[3] $T_r = T_\infty$ については、雨滴の半径に比べて十分遠い位置というのは、mm の程度もあればよく、mm 程度では温度は変わらないと思ってよいだろう。

6.3 **純水に対して (6.16) を用い, 水滴が半径 2 $\mu$m から (1) 半径 10 $\mu$m, または (2) 半径 40 $\mu$m まで成長するのにかかる時間を計算せよ． 水滴の成長は凝結によって起こるとし, 過飽和度は 0.05% (すなわち $S-1=5\times10^{-4}$) で $T=273$ K ($D=0.23$ cm$^2$ s$^{-1}$) とせよ.**

[解]

(6.16) を再掲する (『The Physics of Atmospheres third edition』では $p_s$ を $\rho_s$ と誤って記載してあるので注意).

$$r\frac{dr}{dt}\simeq\frac{S-1}{[(L^2M_r\rho_L/\lambda RT^2)+\{\rho_L RT/p_s(T_\infty)DM_r\}]}. \tag{6.16}$$

[ $r$ : 水滴の半径, $S-1$ : 過飽和度, $L$ : 凝結の潜熱 (係数), $M_r$ : 水の分子量, $\rho_L$ : 水滴の密度, $\lambda$ : 空気の熱伝導係数, $R$ : 気体定数, $T$ : 気温, $p_s(T_\infty)$ : 遠隔点における温度での飽和水蒸気圧, $D$ : 大気中の水蒸気の拡散係数 ]

この問題では (6.16) の右辺の量は全て定数と考えることができるので

$$A=\frac{S-1}{[(L^2M_r\rho_L/\lambda RT^2)+\{\rho_L RT/p_s(T_\infty)DM_r\}]} \tag{P6.7}$$

とおく．そして (6.16) を $t=0$ の水滴の半径 $r_0$ から $t=t_1$ の水滴の半径 $r_1$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{r_1} r\ dr &= \int_0^{t_1} A\ dt\\ \frac{{r_1}^2-{r_0}^2}{2} &= At_1\end{aligned}$$

となる．これを整理すると

$$t_1=\frac{{r_1}^2-{r_0}^2}{2A} \tag{P6.8}$$

となる．これが, **半径 $r_0$ の水滴が半径 $r_1$ の水滴まで成長するのにかかる時間 $t_1$ に関する式**である.

では次に (P6.17) に具体的な値を与え, $A$ を求める．まず, 問題文より

| 変数 | 数値 | [単位] |
|---|---|---|
| $S-1$ | $5\times10^{-4}$ | [(無次元)] |
| $T$ | 273 | [K] |
| $D$ | $0.23\times10^{-4}$ | [m$^2$ s$^{-1}$] |

となる．巻末の Appendices より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $L$ | $2.500 \times 10^6$ | [J kg$^{-1}$] | Appendix 2 の「273 K における気化熱」より |
| $M_r$ | $18.015 \times 10^{-3}$ | [kg mol$^{-1}$] | Appendix 2 の「分子量」より |
| $R$ | 8.3143 | [J K$^{-1}$ mol$^{-1}$] | Appendix 1 より |
| $p_s(T_\infty)$ | 610.78 | [Pa] | Appendix 2 の「純水での飽和水蒸気圧」の 0°C の値より．なお, $T_\infty = T = 273$ K とした. |

となる. 残る変数に関しては『理科年表 2003』より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $\rho_L$ | $0.99984 \times 10^3$ | [kg m$^{-3}$] | (1 atm, 273 K での値) |
| $\lambda$ | $2.41 \times 10^{-2}$ | [W m$^{-1}$ K$^{-1}$] | (273 K での値) |

という値を得た. これらの値を (P6.17) に代入すると,

$$A \simeq 3.03 \times 10^{-14} \tag{P6.9}$$

となる.

**(1)** $r_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ m, $r_1 = 10.0 \times 10^{-6}$ m を (P6.18) に代入すると

$$t_1 = 1585 \text{ [s]} = 26.4 \text{ [minutes]} \tag{P6.10}$$

となる. (ちなみに巻末解答は 1590 秒 = 26.5 分).

**(2)** $r_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ m, $r_1 = 40.0 \times 10^{-6}$ m を (P6.18) に代入すると

$$t_1 = 26343 \text{ [s]} = 439.05 \text{ [minutes]} = 7.32 \text{ [hour]} \tag{P6.11}$$

となる. (ちなみに巻末解答は 26424 秒 = 7.34 時間).

**【考察】** (P6.18) から分かるように, (6.16) を用いて水滴の成長を見積もると, 成長にかかる時間は水滴の大きさの 2 乗に比例する．これは, 図 6.2 の実線にも描かれている.

なお, ここでは $A$ を定数と扱ったが, 厳密には過飽和度 $S-1$ や気温 $T$ が水滴生成の際の潜熱解放によって変化するかもしれない．また気温の変化によって空気の熱伝導係数 $\lambda$ や大気中の水蒸気の拡散係数 $D$ も変化し得る．従って, 厳密な計算をする場合にはそれらも考量する必要があるのかもしれない.

## **計算プログラム (Ruby)**　一応, 計算したプログラムです...

```
#!/usr/bin/ruby
#
# 以下の教科書の Probrem 6.3 の計算を行なうスクリプト
#
# Houghton, J. T., 2002:
#      The Physics of Atmospheres, Third Edition.
#      Cambridge Univ. Press. 320pp.
#
# 履歴
#       2004/07/01 Morikawa Yasuhiro
#

# 詳細表示
#Detail = nil         # オフ
Detail = 1           # オン

##############################
##  初期設定
  # 過飽和度
S = 5*10**(-4)
  # 気温
T = 273.0
  # 水蒸気の拡散係数
D = 0.23*10**(-4)
  # 凝結の潜熱
L = 2.500*(10**6)
  # 水の分子量
M_r = 18.015*10**(-3)
  # 気体定数
R = 8.3143
#R = 461
  # 遠隔点での飽和水蒸気圧
P_s = 610.78
  # 水滴の密度
#Rho = 0.00485
Rho = 0.99984*(10**3)
#Rho = 0.99984*(10**1.337)
  # 空気の熱伝導係数
Lambda = 2.41*(10**(-2))

  # 水滴の初期半径
R_0 = 2.0*10**(-6)

  # 問題番号
Prob = ["1", "2"]
  # 水滴の最終半径
R_1 = {"1" => 10.0*10**(-6), "2" => 40.0*10**(-6)}

##############################
##  (6.16) の右辺の導出

a = S/(((L**2)*M_r*Rho)/(Lambda*R*(T**2)) + ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)))

print "=====(6.16) の右辺の導出===== \n" if Detail
  print "  S-1 = ", S, "\n"                 if Detail
  print "  (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2) = ", (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2), "\n" if Detail
  print "  ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)) = ", ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)), "\n" if Detail
  print "    A= ", a, "\n"                 if Detail

##############################
##  成長に必要な時間を求める
print "=====水滴の成長に必要な時間===== \n"
Prob.each{|n|
  print " ==(", n, "): 初期半径: ", R_0, " m 終端半径: ", R_1[n], " m\n"

  # 必要時間
  t_1 = (R_1[n]**2 - R_0**2)/ (2.0 * a)

  print "   成長に必要な時間 t_1 = ", t_1, " s\n"
}

exit 0
```

## 出力結果は以下の通り.

```
=====(6.16) の右辺の導出=====
  S-1 = 5.0e-04
  (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2) = 7538358090
  ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)) = 8967511351
    A= 3.029225463e-14
=====水滴の成長に必要な時間=====
 ==(1): 初期半径: 2.0e-06 m 終端半径: 1.0e-05 m
   成長に必要な時間 t_1 = 1584.563466 s
 ==(2): 初期半径: 2.0e-06 m 終端半径: 4e-05 m
   成長に必要な時間 t_1 = 26343.36763 s
```

6.4 4f

($\boldsymbol{D = 0.23}$ cm$^2$ s$^{-1}$) とせよ.

[解]

(6.16) を再掲する (『The Physics of Atmospheres third edition』では $p_s$ を $\rho_s$ と誤って記載してあるので注意).

$$r\frac{dr}{dt} \simeq \frac{S-1}{[(L^2 M_r \rho_L/\lambda RT^2) + \{\rho_L RT/p_s(T_\infty)DM_r\}]}. \tag{6.16}$$

[ $r$ : 水滴の半径, $S-1$ : 過飽和度, $L$ : 凝結の潜熱 (係数), $M_r$ : 水の分子量,
$\rho_L$ : 水滴の密度, $\lambda$ : 空気の熱伝導係数, $R$ : 気体定数, $T$ : 気温,
$p_s(T_\infty)$ : 遠隔点における温度での飽和水蒸気圧, $D$ : 大気中の水蒸気の拡散係数 ]

この問題では (6.16) の右辺の量は全て定数と考えることができるので

$$A = \frac{S-1}{[(L^2 M_r \rho_L/\lambda RT^2) + \{\rho_L RT/p_s(T_\infty)DM_r\}]} \tag{P6.12}$$

とおく. そして (6.16) を $t=0$ の水滴の半径 $r_0$ から $t=t_1$ の水滴の半径 $r_1$ まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} r\ dr &= \int_0^{t_1} A\ dt \\ \frac{{r_1}^2 - {r_0}^2}{2} &= At_1 \end{aligned}$$

となる. これを整理すると

$$t_1 = \frac{{r_1}^2 - {r_0}^2}{2A} \tag{P6.13}$$

となる. これが, **半径 $r_0$ の水滴が半径 $r_1$ の水滴まで成長するのにかかる時間 $t_1$ に関する式**である.

では次に (P6.17) に具体的な値を与え, $A$ を求める. まず, 問題文より

| 変数 | 数値 | [単位] |
|---|---|---|
| $S-1$ | $5 \times 10^{-4}$ | [(無次元)] |
| $T$ | 273 | [K] |
| $D$ | $0.23 \times 10^{-4}$ | [m$^2$ s$^{-1}$] |

となる. 巻末の Appendices より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $L$ | $2.500 \times 10^6$ | [J kg$^{-1}$] | Appendix 2 の「273 K における気化熱」より |
| $M_r$ | $18.015 \times 10^{-3}$ | [kg mol$^{-1}$] | Appendix 2 の「分子量」より |
| $R$ | 8.3143 | [J K$^{-1}$ mol$^{-1}$] | Appendix 1 より |
| $p_s(T_\infty)$ | 610.78 | [Pa] | Appendix 2 の「純水での飽和水蒸気圧」の 0°C の値より. なお, $T_\infty = T = 273$ K とした. |

となる. 残る変数に関しては『理科年表 2003』より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $\rho_L$ | $0.99984 \times 10^3$ | [kg m$^{-3}$] | (1 atm, 273 K での値) |
| $\lambda$ | $2.41 \times 10^{-2}$ | [W m$^{-1}$ K$^{-1}$] | (273 K での値) |

という値を得た. これらの値を (P6.17) に代入すると,

$$A \simeq 3.03 \times 10^{-14} \tag{P6.14}$$

となる.

**(1)** $r_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ m, $r_1 = 10.0 \times 10^{-6}$ m を (P6.18) に代入すると

$$t_1 = 1585 \text{ [s]} = 26.4 \text{ [minutes]} \tag{P6.15}$$

となる. (ちなみに巻末解答は 1590 秒 = 26.5 分).

**(2)** $r_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ m, $r_1 = 40.0 \times 10^{-6}$ m を (P6.18) に代入すると

$$t_1 = 26343 \text{ [s]} = 439.05 \text{ [minutes]} = 7.32 \text{ [hour]} \tag{P6.16}$$

となる. (ちなみに巻末解答は 26424 秒 = 7.34 時間).

**【考察】** (P6.18) から分かるように, (6.16) を用いて水滴の成長を見積もると, 成長にかかる時間は水滴の大きさの 2 乗に比例する. これは, 図 6.2 の実線にも描かれている.

なお, ここでは $A$ を定数と扱ったが, 厳密には過飽和度 $S-1$ や気温 $T$ が水滴生成の際の潜熱解放によって変化するかもしれない. また気温の変化によって空気の熱伝導係数 $\lambda$ や大気中の水蒸気の拡散係数 $D$ も変化し得る. 従って, 厳密な計算をする場合にはそれらも考量する必要があるのかもしれない.

**計算プログラム (Ruby)** 一応, 計算したプログラムです...

```
#!/usr/bin/ruby
#
# 以下の教科書の Probrem 6.3 の計算を行なうスクリプト
#
# Houghton, J. T., 2002:
#      The Physics of Atmospheres, Third Edition.
#      Cambridge Univ. Press. 320pp.
#
# 履歴
#       2004/07/01 Morikawa Yasuhiro
#

# 詳細表示
#Detail = nil          # オフ
Detail = 1            # オン

##############################
##  初期設定
  # 過飽和度
S = 5*10**(-4)
```

```
  # 気温
T = 273.0
  # 水蒸気の拡散係数
D = 0.23*10**(-4)
  # 凝結の潜熱
L = 2.500*(10**6)
  # 水の分子量
M_r = 18.015*10**(-3)
  # 気体定数
R = 8.3143
#R = 461
  # 遠隔点での飽和水蒸気圧
P_s = 610.78
  # 水滴の密度
#Rho = 0.00485
Rho = 0.99984*(10**3)
#Rho = 0.99984*(10**1.337)
  # 空気の熱伝導係数
Lambda = 2.41*(10**(-2))

  # 水滴の初期半径
R_0 = 2.0*10**(-6)

  # 問題番号
Prob = ["1", "2"]
  # 水滴の最終半径
R_1 = {"1" => 10.0*10**(-6), "2" => 40.0*10**(-6)}

##############################
##  (6.16) の右辺の導出

a = S/(((L**2)*M_r*Rho)/(Lambda*R*(T**2)) + ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)))

print "=====(6.16) の右辺の導出===== \n" if Detail
  print "  S-1 = ", S, "\n"                 if Detail
  print "  (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2) = ", (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2), "\n" if Detail
  print "  ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)) = ", ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)), "\n" if Detail
  print "    A= ", a, "\n"                 if Detail

##############################
##  成長に必要な時間を求める
print "=====水滴の成長に必要な時間===== \n"
Prob.each{|n|
  print " ==(", n, "): 初期半径: ", R_0, " m 終端半径: ", R_1[n], " m\n"

  # 必要時間
  t_1 = (R_1[n]**2 - R_0**2)/ (2.0 * a)

  print "   成長に必要な時間 t_1 = ", t_1, " s\n"
}

exit 0
```

出力結果は以下の通り.

```
=====(6.16) の右辺の導出=====
  S-1 = 5.0e-04
  (L**2 *M_r*Rho)/(Lambda*R*T**2) = 7538358090
  ((Rho*R*T)/(P_s*D*M_r)) = 8967511351
    A= 3.029225463e-14
=====水滴の成長に必要な時間=====
 ==(1): 初期半径: 2.0e-06 m 終端半径: 1.0e-05 m
   成長に必要な時間 t_1 = 1584.563466 s
 ==(2): 初期半径: 2.0e-06 m 終端半径: 4e-05 m
   成長に必要な時間 t_1 = 26343.36763 s
```

6.5 **appendix2 で与えられる-10 ℃における水平な液体の水の表面と水平な氷表面での飽和蒸気圧の値から，氷晶が球状を保つと仮定して，-10 ℃の水滴の雲の中の氷晶が半径 $1\mu$m から $100\mu$m まで成長するのにかかる時間を計算せよ．**

**氷晶の温度も計算せよ．（氷の昇華潜熱 (Latent heat of sublimation of ice) =2800 Jg$^{-1}$，D=0.23 cm$^2$s$^{-1}$.）**

[解]

成長にかかる時間 $t_1$ と氷晶の温度 $T_r$ の 2 つを求める．まずは成長にかかる時間 $t_1$ を式 (6.16) から求める．

式 (6.16) は (『The Physics of Atmospheres third edition』では $p_s$ を $\rho_s$ と誤って記載してあるので注意).

$$r\frac{dr}{dt} \simeq \frac{p_\infty/p_{si}(T_\infty) - 1}{[(L^2 M_r \rho_L/\lambda R T^2) + \{\rho_L R T/p_{si}(T_\infty) D M_r\}]}. \tag{6.16}$$

[ $r$ : 水滴の半径, $L$ : 昇華の潜熱 (係数), $M_r$ : 水の分子量,
$\rho_L$ : 氷の密度, $\lambda$ : 空気の熱伝導係数, $R$ : 気体定数, $T_\infty$ : 気温, $T_r$ : 氷晶の温度
$p_\infty$ : 気圧, $p_{si}(T_\infty)$ : 遠隔点における温度での氷の飽和水蒸気圧,
$p_{si}(T_r)$ : 氷表面における温度での氷の飽和水蒸気圧,
$D$ : 大気中の水蒸気の拡散係数 ]

問題 6.3 と同様に (6.16) の右辺の量は全て定数と考えることができるので

$$A = \frac{p_\infty/p_{si}(T_\infty) - 1}{[(L^2 M_r \rho_L/\lambda R T^2) + \{\rho_L R T/p_s(T_\infty) D M_r\}]} \tag{P6.17}$$

とおく．そして (6.16) を $t = 0$ の水滴の半径 $r_0$ から $t = t_1$ の水滴の半径 $r_1$ まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} r\ dr &= \int_0^{t_1} A\ dt \\ \frac{{r_1}^2 - {r_0}^2}{2} &= A t_1 \end{aligned}$$

となる．これを整理すると

$$t_1 = \frac{{r_1}^2 - {r_0}^2}{2A} \tag{P6.18}$$

となる．これが, **半径 $r_0$ の水滴が半径 $r_1$ の水滴まで成長するのにかかる時間 $t_1$ に関する式**である．

では次に (P6.17) に具体的な値を与え, $A$ を求める．まず, 問題文より

| 変数 | 数値 | [単位] |
|---|---|---|
| $T$ | 263 | [K] |
| $D$ | $0.23 \times 10^{-4}$ | [m$^2$ s$^{-1}$] |

となる. 巻末の Appendix より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $L$ | $2.800 \times 10^6$ | [J kg$^{-1}$] | 問題文より |
| $M_r$ | $18.015 \times 10^{-3}$ | [kg mol$^{-1}$] | Appendix 2 の「分子量」より |
| $R$ | $8.3143$ | [J K$^{-1}$ mol$^{-1}$] | Appendix 1 より |
| $p_s(T_\infty)$ | $259.7$ | [Pa] | Appendix 2 の TABLE A.2 (over pure ice) より. |

となる. 残る変数に関しては『理科年表 2003』より

| 変数 | 数値 | [単位] | 備考 |
|---|---|---|---|
| $\rho_L$ | $0.917 \times 10^3$ | [kg m$^{-3}$] | (1 atm, 273 K での値) |
| $\lambda$ | $2.41 \times 10^{-2}$ | [W m$^{-1}$ K$^{-1}$] | (273 K での値) |

という値を得た.

最後に, $p_\infty$ の条件が与えられていないので, 問 6.3 の水滴に対する不飽和度の条件をそのまま用いる.

$$p_\infty = S \times P_{sv}(T_\infty)$$

ただし, $p_{sv}(T_\infty) = 286.27$ [Pa], $S - 1 = 5.0 \times 10^{-4}$ である. これらの値を (P6.17) に代入すると,

$$A \simeq 1.7802 \times 10^{-14} \tag{P6.19}$$

となる. $r_0 = 1.0 \times 10^{-6}$ m, $r_1 = 100.0 \times 10^{-6}$ m を (P6.18) に代入すると

$$t_1 = 1267.79[\mathrm{sec}] = 21.12[\mathrm{min}]$$

が導出された.

拡散法則から導かれた (6.4) より

$$L\dot{m} = -4\pi\lambda r(T_r - T_\infty) \tag{6.4}$$

であり, ここで

$$\dot{m} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_L\frac{dr^3}{dt} = 4\pi r^2\rho_L\frac{dr}{dt} \tag{P6.20}$$

なので, 式 (6.4) は

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\lambda}{L\rho_L}(T_r - T_\infty) \tag{P6.21}$$

$$T_r = \frac{L\rho_L}{\lambda}r\frac{dr}{dt} + T_\infty \tag{P6.22}$$

である. $r\frac{dr}{dt} = A$ であることに留意し各値を代入すると,

$$T_r = 0.375 + T_\infty = -9.625[^\circ\mathrm{C}]$$

が導出された.

6.6 $\omega = 1$ **の時,** $\chi_0^* = 20$ **および** $f = 0.9$ **の場合について A と** $\tau$ **を求めなさい. 章の中で引用されている** $\omega = 0.9997$ **の値と比較しなさい.**

[解] 純粋な散乱 $\omega = 1$ の時, 雲のアルベド A, 透過率 $\tau$ はそれぞれ以下のように書ける.

$$A = \frac{\chi_0^*(1-f)}{1+\chi_0^*(1-f)} \tag{6.9}$$

$$\tau = \frac{1}{1+\chi_0^*(1-f)} \tag{6.10}$$

$\chi_0^* = 20$, $f = 0.9$ を代入すると A $\simeq 0.667$, $\tau \simeq 0.333$ を得る.

$\omega \neq 1$ の場合,

$$A = \beta \frac{1-\exp(-2\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.12}$$

$$\tau = \frac{(1-\beta^2)\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.13}$$

ただし,

$$\alpha^2 = (1-\omega)(1+\omega-2\omega f) \tag{6.11}$$

$$\beta = \frac{\alpha-1+\omega}{\alpha+1-\omega} \tag{6.14}$$

本文中では $\omega = 0.9997, f = 0.9, \chi_0^* \simeq 20$ の時, A $\simeq 0.66$ であり, この時, $\tau \simeq 0.33$ となる. よってほとんど変わらないことが分かる.

6.7 **(6.11)(6.14).**

$$\beta^2 = \frac{1-\omega f-\alpha}{1-\omega f+\alpha} \tag{P6.23}$$

[]

(6.11), (6.14)f;

$$\beta = \frac{\alpha-1+\omega}{\alpha+1-\omega}, \tag{6.11}$$

$$\alpha^2 = (1-\omega)(1+\omega-2\omega f). \tag{6.14}$$

p$\beta^2$

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \left[\frac{\alpha-(1-\omega)}{\alpha+(1-\omega)}\right]^2 \\
&= \frac{\alpha^2+(1-\omega)^2-2\alpha(1-\omega)}{\alpha^2+(1-\omega)^2+2\alpha(1-\omega)} \\
&= \frac{(1-\omega)(1+\omega-2\omega f)+(1-\omega)^2-2\alpha(1-\omega)}{(1-\omega)(1+\omega-2\omega f)+(1-\omega)^2+2\alpha(1-\omega)} \\
&= \frac{1+\omega-2\omega f+1-\omega-2\alpha}{1+\omega-2\omega f+1-\omega+2\alpha} \\
&= \frac{2-2\omega f-2\alpha}{2-2\omega f+2\alpha} \\
&= \frac{1-\omega f-\alpha}{1-\omega f+\alpha}
\end{aligned}$$

. (P6.23).

6.08 **(6.12)(6.13)B**

$$A = \beta \frac{1 - \exp(-2\alpha\chi_0^*)}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.12}$$

$$\tau = \frac{(1 - \beta^2) \exp(-\alpha\chi_0^*)}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.13}$$

[]

(6.6)E$F^{\uparrow}$

$$\frac{dF^{\downarrow}}{d\chi^*} + F^{\downarrow} = \omega\{fF^{\downarrow} + (1-f)F^{\uparrow}\} \tag{6.6$'$}$$

$$F^{\uparrow} = \frac{1 - \omega f}{\omega(1-f)} F^{\downarrow} + \frac{1}{\omega(1-f)} \frac{dF^{\downarrow}}{d\chi^*} \tag{P6.24}$$

P.87$F^{\downarrow}$

$$F^{\downarrow} = C \exp(-\alpha\chi^*) + D \exp\big[-\alpha(\chi_0^* - \chi^*)\big] \tag{P6.25}$$

$$\begin{aligned} F^{\uparrow} &= \frac{1 - \omega f}{\omega(1-f)} \Big\{ C \exp(-\alpha\chi^*) + D \exp\big[-\alpha(\chi_0^* - \chi^*)\big] \Big\} \\ &\quad + \frac{1}{\omega(1-f)} \Big\{ -\alpha C \exp(-\alpha\chi^*) + \alpha D \exp\big[-\alpha(\chi_0^* - \chi^*)\big] \Big\} \\ &= \left( \frac{1 - \omega f - \alpha}{\omega(1-f)} \right) C \exp(-\alpha\chi^*) + \left( \frac{1 - \omega f + \alpha}{\omega(1-f)} \right) D \exp\big[-\alpha(\chi_0^* - \chi^*)\big] \end{aligned} \tag{P6.26}$$

BE$F^{\downarrow}(\chi^* = 0) = F_S$, $F^{\uparrow}(\chi^* = \chi_0^*) = 0$

$$\begin{aligned} F^{\downarrow}(\chi^* = 0) &= F_S = C + D \exp(-\alpha\chi_0^*) \\ C &= F_S - D \exp(-\alpha\chi_0^*) \end{aligned} \tag{P6.27}$$

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}(\chi^* = \chi_0^*) = 0 &= \left( \frac{1 - \omega f - \alpha}{\omega(1-f)} \right) C \exp(-\alpha\chi_0^*) + \left( \frac{1 - \omega f + \alpha}{\omega(1-f)} \right) D \\ D &= -\beta^2 C \exp(-\alpha\chi_0^*) \end{aligned} \tag{P6.28}$$

AO$\beta^2 = \dfrac{1 - \omega f - \alpha}{1 - \omega f + \alpha}$B

$$C = \frac{F_S}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{P6.29}$$

$$D = -\frac{\beta^2 F_S \exp(-\alpha\chi_0^*)}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{P6.30}$$

B]A$F^{\uparrow}$, $F^{\downarrow}$

$$
\begin{aligned}
F^{\uparrow} = {} & \frac{1-\omega f-\alpha}{\omega(1-f)}\cdot\frac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi^*) \\
& -\frac{1-\omega f+\alpha}{\omega(1-f)}\cdot\frac{\beta^2F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp\big[-\alpha(\chi_0^*-\chi^*)\big] \qquad \text{(P6.31)} \\
F^{\downarrow} = {} & \frac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi^*) \\
& -\frac{\beta^2F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp\big[-\alpha(\chi_0^*-\chi^*)\big] \qquad \text{(P6.32)}
\end{aligned}
$$

B

Axh$A$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{F^{\uparrow}(\chi^*=0)}{F^{\downarrow}(\chi^*=0)} \\
&= \frac{\dfrac{1-\omega f-\alpha}{\omega(1-f)}\cdot\dfrac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}-\dfrac{1-\omega f+\alpha}{\omega(1-f)}\cdot\dfrac{\beta^2F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi_0^*)}{\dfrac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}-\dfrac{\beta^2F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi_0^*)} \\
&= \frac{1-\omega f-\alpha}{\omega(1-f)}\frac{1-\dfrac{1-\omega f+\alpha}{1-\omega f-\alpha}\cdot\beta^2\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \\
&= \frac{1-\omega f-\alpha}{\omega(1-f)}\frac{1-\dfrac{1}{\beta^2}\cdot\beta^2\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \\
&= \beta\frac{1-\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \qquad \text{(P6.33)}
\end{aligned}
$$

[4]B

---

[4]

$$\frac{1-\omega f-\alpha}{\omega(1-f)}=\frac{2(1-\omega)(1-\omega f-\alpha)}{2\omega(1-\omega)(1-f)} \qquad (*)$$

q

$$
\begin{aligned}
2(1-\omega)(1-\omega f-\alpha) &= (1-\omega)(2-2\omega f-2\alpha) \\
&= (1-\omega)(1+\omega-2\omega f+1-\omega-2\alpha) \\
&= (1-\omega)(1+\omega-2\omega f)+(1-\omega)(1-\omega-2\alpha) \\
&= \alpha^2+(1-\omega)^2-2\alpha(1-\omega) \qquad (\because \alpha^2=(1-\omega)(1+\omega-2\omega f)) \\
&= (\alpha-(1-\omega))^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+(1-\omega))(\alpha-(1-\omega)) &= \alpha^2-(1-\omega)^2 \\
&= (1-\omega)(1+\omega-2\omega f)-(1-\omega)^2 \qquad (\because \alpha^2=(1-\omega)(1+\omega-2\omega f)) \\
&= (1-\omega)(1+\omega-2\omega f-1+\omega) \\
&= (1-\omega)(2\omega-2\omega f) \\
&= 2\omega(1-\omega)(1-f)
\end{aligned}
$$

$\tau$

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{F^{\downarrow}(\chi^* = \chi_0^*)}{F^{\downarrow}(\chi^* = 0)} \\
&= \frac{\dfrac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi_0^*) - \dfrac{\beta^2 F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}}{\dfrac{F_S}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} - \dfrac{\beta^2 F_S\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)}\exp(-\alpha\chi_0^*)} \\
&= \frac{\exp(-\alpha\chi_0^*) - \beta^2\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \\
&= \frac{(1-\beta^2)\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \qquad \text{(P6.34)}
\end{aligned}$$

A(6.13)B

---

$(*)$vB$(*)$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{(\alpha-(1-\omega))^2}{(\alpha+(1-\omega))(\alpha-(1-\omega))} \\
&= \frac{\alpha-(1-\omega)}{\alpha+(1-\omega)} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

B

6.9 **本文で述べた, $\chi_0^* = 20$ をもつ層雲の透過率を求めよ．またその雲の吸収率 $(1-\tau-A)$ を求めよ．**

[解] 雲の吸収, 散乱効果を考慮した場合のアルベド値は, 前問で導かれた通り,

$$A = \beta \frac{1-\exp(-2\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.12}$$

$$\tau = \frac{(1-\beta^2)\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.13}$$

である．ただしこのとき

$$\beta = \frac{\alpha-1+\omega}{\alpha+1-\omega} \tag{6.14}$$

$$\alpha^2 = (1-\omega)(1+\omega-2\omega f)$$

である．ここで．雲の光学的厚さ $\chi_0^* = 20$, 第一次散乱アルベド $\omega = 0.9997$ 及び前方散乱率 $f = 0.9$ を代入すると,

$$A = 0.664 \quad , \quad \tau = 0.331 \quad , \quad (1-A-\tau) = 0.00597$$

が導出されました.

---

```
#!/usr/bin/ruby
#
include Math
##############################
##  初期設定
  # 雲の第一次散乱アルベド
omega = 0.9997
  # 前方散乱率
f = 0.9
  # 光学的厚さ
chi = 20.0

##############################
##  1 つ目のアルベド.
alph1= -((1.0-omega)*(1.0+omega-2.0*omega*f))**0.5
beta1=(alph1-1.0+omega)/(alph1+1.0-omega)

albedo1 =  beta1 * ( 1.0-exp(-2.0*alph1*chi) ) / (1.0-beta1**2*exp(-2.0*alph1*chi))
tau1    =  (1.0 - beta1**2) * exp(-alph1*chi)  /
   (1.0-beta1**2*exp(-2.0*alph1*chi))

###############################
  print " alpha: ", alph1, " の場合==\n"
  print "   - アルベド: ", albedo1, " \n"
  print "   - 透過率: ", tau1, " \n"
  print "   - 吸収率: ", 1.0-tau1-albedo1, "\n"

##############################
##  2 つ目のアルベド.
alph2= ((1.0-omega)*(1.0+omega-2.0*omega*f))**0.5
beta2=(alph2-1.0+omega)/(alph2+1.0-omega)
#
albedo2 =  beta2 * ( 1.0-exp(-2.0*alph2*chi) ) / (1.0-beta2**2*exp(-2.0*alph2*chi))
tau2    =  (1.0 - beta2**2) * exp(-alph2*chi)  / (1.0-beta2**2*exp(-2.0*alph2*chi))#

###############################
  print " alpha: ", alph2, " の場合==\n"
  print "   - アルベド: ", albedo2, " \n"
  print "   - 透過率: ", tau2,  "\n"
  print "   - 吸収率: ", 1.0-tau2-albedo2, "\n"

exit 0

----------------------------------------------

alpha: -0.007750612879 の場合==
   - アルベド: 0.6635037248
   - 透過率: 0.3305261355
   - 吸収率: 0.005970139758
alpha: 0.007750612879 の場合==
   - アルベド: 0.6635037248
   - 透過率: 0.3305261355
   - 吸収率: 0.005970139758
```

6.10 $2\pi r/\lambda \ll 1$ **のとき，半径** $r$ **の水滴の波長** $\lambda$ **における散乱断面積はおよそ** $2\pi r^2$ **である．** $1\ \mathrm{cm}^3$ **あたり半径** $r = 5\mu\mathrm{m}$ **の水滴を** 150 **個含む厚さ** 0.5 km **の雲の光学的厚さを求めよ．ただし，** $\chi_0^* \simeq 1.66\chi_0$ **である．**

[解]

各物理量を以下のようにおく.

$\sigma$: 単位質量あたりの散乱係数

$\sigma_n$: 散乱断面積

$n$: 水滴の数密度

$r$: 水滴の半径

$H$: 雲の厚さ

光学的厚さは

$$\chi_0 = \int_0^H \sigma_n n dz \tag{P6.35}$$

で与えられる. いま, $\sigma_n = 2\pi r^2$ の場合を考えているから

$$\chi = \int_0^H 2\pi r^2 n dz = 2\pi r^2 nH \tag{P6.36}$$

となる. ここで

$r = 5 \times 10^{-6}$ m

$n = 150/(10^{-2})^3 = 1.50 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-3}$

$H = 5 \times 10^2$ m

を代入すると

$$\chi_0 = 11.78 \tag{P6.37}$$

となる. $\chi_0^* = 1.66\chi_0$ より

$$\chi_0^* = 19.6 \tag{P6.38}$$

となる.

6.11 **波長 $2.3\mu$m で $r = 7\mu$m, $\omega = 0.988$, $f = 0.9$ の水滴に対して、$\beta$ の値を求め、アルベドが $0.98\beta$ となる $\chi_0^*$ の値を求めよ。**

**この $\chi_0^*$ の値を典型的な層雲に対する値と比較せよ。**

[解]

$$\beta = \frac{\alpha - 1 + \omega}{\alpha + 1 - \omega} \tag{6.14}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= (1-\omega)(1+\omega-2\omega f) && (6.11)\\
&= (1-0.988)(1+0.988-2\times 0.988\times 0.9) \\
&\fallingdotseq 0.00251 && (\text{P6.39})
\end{aligned}$$

より、$\alpha = 0.050$ となるから (6.14) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\beta &\fallingdotseq \frac{0.038}{0.062} \\
&\fallingdotseq 0.61
\end{aligned}$$

を得る。また、

$$A = \beta \frac{1 - \exp(-2\alpha\chi_0^*)}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.12}$$

であるから、

$$\frac{1 - \exp(-2\alpha\chi_0^*)}{1 - \beta^2 \exp(-2\alpha\chi_0^*)} = 0.98$$

となる。これを $\chi_0^*$ について解くと、

$$\chi_0^* = -\ln\left(\frac{0.02}{1 - 0.98\beta^2}\right) \Big/ 2\alpha$$

となるから、$\alpha, \beta$ の値を代入すると、

$$\chi_0^* \simeq 34$$

を得る。

本文によると、典型的な層雲に対しては $\chi_0^* \simeq 20$ であるから、上で求めた値はそれよりも大きい。そもそも $\chi_0^* \simeq 34$ はどのくらいの厚さなのだろうか。

6.12 **波長が 10.6$\mu$m の時**[5]**, $\omega = 0.36$, $f = 0.9$ である．(1) この時の $\beta$ を求めよ．(2) また, 本文中の層雲と同じ性質を持つ霧をこの光が 100 m 通過した場合の散乱光の透過率を求めよ．(なお, ここでの $\chi_0^*$ は 10.6$\mu$m でも 0.7$\mu$m でも同じであると仮定せよ).**

[解]

**(1)**　§6.4 の (6.11) [6]と (6.14) [7]を用いることで, 一次散乱アルベド $\omega$ と前方に散乱する放射量の割合 $f$ から $\beta$ を得ることができる．(6.11) に $\omega = 0.36$, $f = 0.9$ を代入することで,

$$\alpha = 0.675 \tag{P6.40}$$

が得られる．この値を (6.14) に代入することで

$$\beta = 0.0266 \tag{P6.41}$$

が得られる．

**(2)**　本文 (§6.4) 中では, 層雲は波長 0.7 $\mu$m に対して, 典型的な雲の厚さ 0.5 km の場合には, 光学的厚さは $\chi_0^* = 20$ であった．この問題での霧もこの層雲と同じ性質を持ち, また $\chi_0^*$ は, 10.6$\mu$m でも 0.7$\mu$m でも同じであると仮定しているので, 霧を 0.5 km 通る場合には同様に $\chi_0^* = 20$ になると考えられる．霧の性質が一様であると考えると, 光学的厚さはその通過する距離に比例するため, 霧を 100 m 通過する場合の光学的厚さは

$$\chi_0^* = 4 \tag{P6.42}$$

と考えることができる．

(P6.40)〜(P6.42) を (6.13) [8] に代入することで, 以下の透過率を得ることができる．

$$\tau = 0.067 \tag{P6.43}$$

[5]原著の問題文に書いてあるように, 実際に波長 10.6$\mu$m の光を出すものとして $CO_2$ のレーザーがある．

[6]

$$\alpha^2 = (1-\omega)(1+\omega-2\omega f). \tag{6.11}$$

[7]

$$\beta = \frac{\alpha - 1 + \omega}{\alpha + 1 - \omega}. \tag{6.14}$$

[8]

$$\tau = \frac{(1-\beta^2)\exp(-\alpha\chi_0^*)}{1-\beta^2\exp(-2\alpha\chi_0^*)} \tag{6.13}$$

**【考察】** 本文で述べられていた典型的な例では, 0.7$\mu$m の光 ($\omega = 0.9997, f = 0.9$) が層雲を 0.5 km ($\chi_0^* \simeq 20$) 通過する際には, 透過率は $\tau = 0.3$ であった (§6.3, §6.4 参照).

この問題では $\chi_0^*$ が本文の例よりも小さいため, この影響だけ考えれば透過率は小さくなるはずである. しかし, 結果は $\tau = 0.067$ と非常に小さくなっている. これは一次散乱アルベド $\omega$ が本文の例に比べ非常に小さい (つまり, 散乱に比べ吸収が効く) ためである. 散乱の場合は, 光はまた散乱を経て雲 (または霧) を通過することも可能だが, 吸収の場合には光はエネルギーとして雲粒に取り込まれてしまう[9].

[9](雑談)
「じゃあ, 暗闇の中で赤外でものをみようとしても, 霧があると見えないんだ.」
「へぇ〜. 暗視スコープって霧があると使えないんだねぇ...」
「(赤外が透過できないってことは温室効果に寄与してるってことだって理解して欲しいなぁ…) ( ¨ ;)」