

自転軌道結合の安定性について
Stability of spin-orbit coupling

石井 智
Satoshi Ishii

北海道大学 理学部 地球科学科
惑星物理学研究室

2005年01月28日

要旨

本論文は Murray and Dermott (1999): Solar System Dynamics. Cambridge University Press 中の, 太陽系内の主要な衛星における自転運動と軌道運動の結合の安定性について述べた 5 節 Spin-Orbit coupling 5.1 ~ 5.4 のレビューである. 衛星に働く潮汐トルクによる結合の不安定性と衛星の永久四重極子モーメントに働く付加的なトルクによって結合が安定に保たれることについてまとめた.

太陽系の主要な衛星の多くはその自転周期と公転周期が同じ周期を持つことが観測されている. この状態を同期状態という. 潮汐バルジ (潮汐力による膨らみ) に働くトルクのみを考慮した場合には, 同期状態は安定な状態であるとはいえない. そこで衛星の質量分布の永久的な球対称からのずれに働くトルクも考えて公転軌道と結合された衛星の自転の運動方程式を導出し, 同期状態が安定になるための条件を明らかにする.

永久四重極子モーメントに働くトルクは通常はごく小さなもので, 衛星の自転に与える影響は少ないが, 衛星の自転周期が公転周期の $1/2$ の整数倍の関係にある場合のみ, 衛星の自転に大きく作用する. $(B - A)/C$ がある臨界値を超えていれば, もし結合からずれようとしても復元トルクによって結合は安定に保たれることができる. Yoder(1995) による月や水星の復元力と比較してみても, ここでの導出が正しいものであると考えられる.

これらのことから, 太陽系の主衛星の自転運動と軌道運動の結合は安定なものであるといえる.

目次

1	序論	4
2	同期状態の衛星に働く潮汐トルクによる自転速度の変化	5
2.1	惑星による衛星の潮汐バルジと潮汐トルク	5
2.2	潮汐トルクによる衛星の自転速度の増加	6
2.3	平均潮汐トルクが平衡になるための衛星の自転速度	7
3	非球対称な質量分布を持つ衛星に働く力	9
3.1	衛星の慣性モーメントによる外部重力場の記述	9
3.2	衛星の自転の運動方程式	10
4	自転軌道共鳴による自転軌道結合の安定	12
4.1	自転軌道共鳴と平均運動方程式	12
4.2	共鳴時の永久変形に働くトルクと潮汐トルク	14
5	まとめ	18
A	全訳	19
A.1	序論	19
A.2	潮汐による自転速度の変化	19
A.3	永久四重極子モーメント	24
A.4	自転軌道共鳴	30

B	慣性モーメントとオイラーの運動方程式	39
B.1	角運動量に対する方程式	39
B.2	固定点をもつ剛体の回転	39
B.3	主慣性モーメント	40
B.4	剛体に対する運動方程式	42
	参考文献	44

1 序論

太陽系の主要な衛星のほとんどはその自転周期と公転周期が等しい同期状態にあることが知られている。本論文では Murray and Dermott (1999): *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press 中の、太陽系内の主要な衛星における自転運動と軌道運動の結合の安定性について述べた 5 節 Spin-Orbit coupling 5.1 ~ 5.4 をレビューし、天体の自転と軌道運動の相互作用とそれによる同期状態の安定化のメカニズムについて解説する。巻末には同書 5.1 ~ 5.4 節の全訳を付録として載せる。詳細な計算過程はそちらを参照されたい。

まず 2 節では、同期状態が必ずしも安定な状態ではないことを示す。惑星重力が衛星の潮汐バルジ（潮汐力による膨らみ）におよぼすトルクは、衛星の自転速度を同期状態から変化させる働きがある。このため同期状態は必ずしも安定な状態とはいえない。しかし衛星は潮汐力を無視した場合にも一般には完全な球体ではないので、このことによって衛星に働くトルクの影響を考える必要がある。そこで 3 節で、衛星内の質量分布から衛星の重力場を求め、そこから自転運動の運動方程式を導く。4 節では、自転運動と軌道運動は特定の自転軌道共鳴状態においてのみ安定することを述べる。

2 同期状態の衛星に働く潮汐トルクによる自転速度の変化

2.1 惑星による衛星の潮汐バルジと潮汐トルク

惑星を公転する衛星を考えると、衛星には惑星の重力が働く。このとき惑星が及ぼす重力と衛星の遠心力の和の地理的な違いによって引き起こされるのが潮汐である。衛星の重心では惑星からの重力と遠心力はつりあっているが、衛星に働く惑星からの重力（惑星の方向に引っ張られる力）は、衛星の惑星に近い側の面のほうがその裏側よりも強く働く。また衛星の遠心力（惑星と衛星の重心から外側に引っ張られる力）は衛星と惑星の重心の方向（大体惑星の方向）から遠い側の面の方が強く働く。このような衛星の各場所で違う力の和を潮汐力といい、衛星は惑星に近い側では惑星から引っ張られる力が、遠い側では惑星から遠ざかるようとする力が強い。そして、この潮汐力によって生じるふくらみが潮汐バルジである。よって通常は潮汐バルジは惑星と衛星を結ぶ直線に平行に生じる。

しかし、衛星上の固定点から見て惑星が移動しているような場合には、潮汐バルジの移動が惑星の移動に完全には追従しないため、衛星の中心から見た場合に潮汐バルジの生じている方向が惑星の方向とずれてしまう。潮汐バルジの方向が惑星の方向とずれていると、潮汐力により潮汐バルジは惑星に近い側を惑星方向に引っ張られ、遠い側を逆側に引っ張られるので、潮汐バルジを惑星の方に向けるトルク（ここではこのように潮汐バルジに働くトルクを潮汐トルクと呼ぶことにする）が生じる。この潮汐トルクによって衛星の自転速度は影響を受ける。

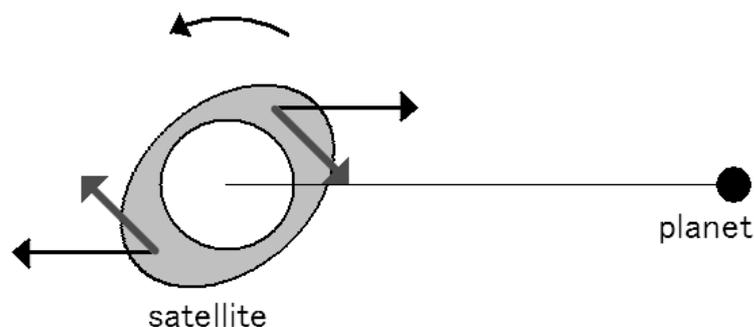


図 2.1: 衛星の潮汐バルジの方向が惑星の方を向いていない場合、衛星の潮汐バルジにトルクが働く。

2.2 潮汐トルクによる衛星の自転速度の増加

同期状態の衛星が惑星の周りを楕円軌道で周回している場合を考え、潮汐トルクが衛星にどのような働きをするか見ていく。自転と公転の周期がほぼ等しい場合、衛星の自転速度は一周の間にその軌道運動の角速度 \dot{f} よりも小さいときと大きいときがあるので、衛星に生じる潮汐バルジの方向は必ずしも惑星の方を向くわけではない。ここで f は真近点離角を表す。この概要を図 2.2 に示す。衛星を中心とする衛星の平均運動 n で回転する座標系に変換したものが図 2.3 で、ここでは惑星の楕円軌道が 2:1 楕円である例を示した。衛星の自転速度を $\dot{\eta} + n$ とおくと、この回転座標系での衛星の自転速度は $\dot{\eta}$ で、同期状態の場合は $\langle \dot{\eta} \rangle = 0$ である。

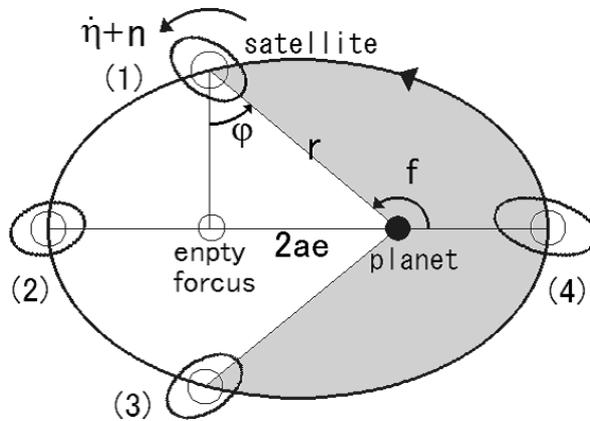


図 2.2: 慣性座標系での衛星と惑星。 a は楕円の半長軸の長さで r は衛星軌道の動径距離を表す。衛星の楕円軌道の中心は惑星である。影の部分は、衛星の自転速度が $\dot{\eta} + n > \dot{f}$ の軌道の部分である。衛星の (1) ~ (4) は、図 2.3 と対応している。

図 2.3 の回転座標系で、離心率 e が小さな値の場合、角度 φ は次のように書ける。

$$\varphi \approx 2e \sin nt \tag{2.1}$$

よって $\dot{\varphi}$ は時間の関数で軌道運動するにつれて符号が変わる。衛星の潮汐バルジは惑星の動きに少し遅れて生じるので、もしも同期状態にあれば惑星に面した潮汐バルジは、惑星が図の上の方へ移動する時（図の影の部分）は衛星の中心と惑星を結ぶ直線より下向きに、惑星が図の下の方へ移動するとき（影でない部分）は上向きに生じる。影の部分では衛星の自転速度を増加させるトルクが、影でない部分では減少させるようなトルクが働く。この回転座標系では惑星は楕円の半分ずつ（この場合は影の部分と影でない部分）を同じ時間だけかけて移動することに注意しておく。

今反時計回りの方向を正とすると、潮汐トルクは次のように書ける。

$$N_s = -D \left(\frac{a}{r} \right)^6 \text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\varphi}) \tag{2.2}$$

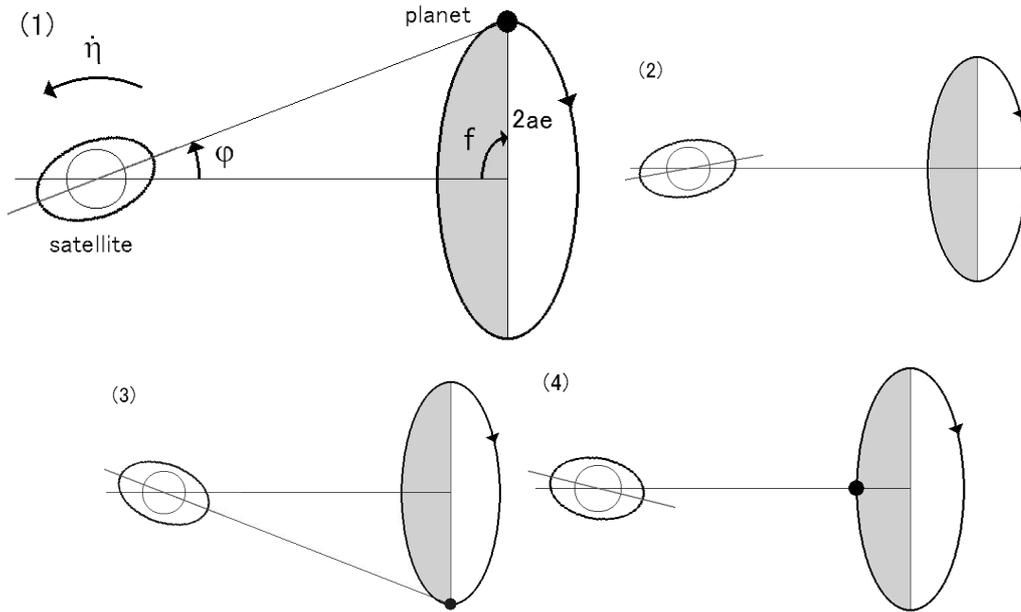


図 2.3: 衛星が同期自転状態にある場合の、衛星を中心として平均運動 n で回転している座標系での惑星の軌道. 影の部分では衛星の潮汐バルジは惑星より下を向いていて、衛星に正のトルクが働く. 影でない部分ではその逆で、衛星に負のトルクが働く. 衛星の (1) ~ (4) は、図 2.2 と対応している.

a は楕円軌道の半長軸の長さで、 r は衛星軌道の動径距離である. また、

$$D = \frac{3}{2} \frac{k_2}{Q_s} \frac{n^4}{G} R_s^5 \quad (2.3)$$

で、正の定数である. Q_s, k_2, R_s はそれぞれ衛星の潮汐散逸関数, ラブ数, 衛星の半径である. 正のトルクは衛星の自転を速めるように作用する. 衛星に働く潮汐トルクは惑星の重力によるものなので、この式からもわかるように動径距離が小さいほうが強く働く. このことから同期状態にある場合には潮汐トルクを一周平均した平均トルクは正で、衛星の自転速度を増加させるように働く.

2.3 平均潮汐トルクが平衡になるための衛星の自転速度

平均トルクがゼロで平衡になるためには、正のトルクが負のトルクより短い期間で働かなければならないので (影の部分が同期状態のそれより狭い) $\dot{\eta} > 0$ となる必要がある.

Goldreich(1966) にしたがって潮汐トルクが平衡になるための衛星の自転速度を計算すると、 $\dot{\eta} = \frac{19}{2} e^2 n$ となる. 詳しい計算は付録の全訳を参照されたい. この結果を月に適用すると、月は観測されている同期速度よりも 3% も速く自転し、2.6 年で月の両面が見えてしまうことになる.

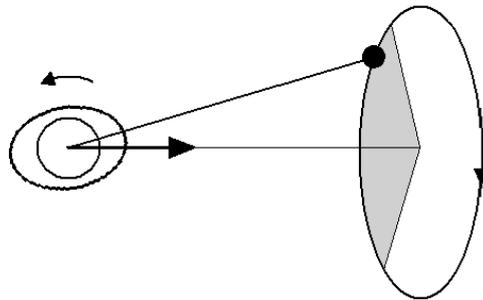


図 2.4: 自転速度が平衡になるには、影の部分（正のトルクが働く部分）と影でない部分（負のトルクが働く部分）が半分ずつではなく、影の軌道の部分が少し短くなくてはならない。

これらの議論から、潮汐バルジに働く潮汐トルクのみを考えた場合、同期状態は安定ではなく、仮にある瞬間に同期状態にあったとしても衛星の自転は加速されてしまう。ではなぜ多くの衛星が同期自転していると観測されているのだろうか？その理由は潮汐トルク以外のトルクが働いているからである。月の場合のようにほとんどの衛星は少なくとも部分的には固体でできているので、永久的な隆起や球体からのずれを持つ。このことによって生じている質量分布の永久四重極子モーメントに働く惑星重力が衛星の自転にさらに影響を与える。

この議論のように実際に同期状態よりも少し速い速度で自転している可能性のある衛星として、ガリレオ衛星のエウロパが知られている（Geissler, 1998）。エウロパは永久四重極子モーメントが小さいか、もしくはエウロパの氷の下には全球を覆うような海があり、海を挟んで外側と内側は連結していないために、内側が同期状態であっても外側の氷の層は非同期状態にあるのではないかとされている。

3 非球対称な質量分布を持つ衛星に働く力

3.1 衛星の慣性モーメントによる外部重力場の記述

ここからは衛星は永久四重極子モーメント, すなわち永久的な膨らみや質量の偏りといった球形からのずれ, を持つとし, この衛星の自転運動を調べる. まず衛星の外部重力場を計算して, そこから自転の運動方程式を求める.

永久変形した衛星の外部重力場を計算するには, 衛星内の質量分布を記述する必要がある. 無限遠においては質点による重力場に漸近する. 有限の, しかしある程度大きな距離離れた位置においては, 衛星の質量分布を記述する量として主慣性モーメントを用いることによって外部重力場を近似的に表すことができる (Macmillan, 1936; Ramsey, 1937, 1940).

衛星の重心に関する主慣性モーメントを A, B, C とし, A を衛星の長軸周りの (最小の), C を衛星の自転軸周りの (最大の) 主慣性モーメントとする. これを用いて永久変形した衛星の外部重力場を表す式を導く. ここでは, 原点 O を衛星の重心とし, O から距離 r の位置に点 P をおく. ここで r は衛星の平均半径よりはるかに大きいとし, 座標系は x, y, z 軸が衛星の慣性主軸に沿っているものとする.

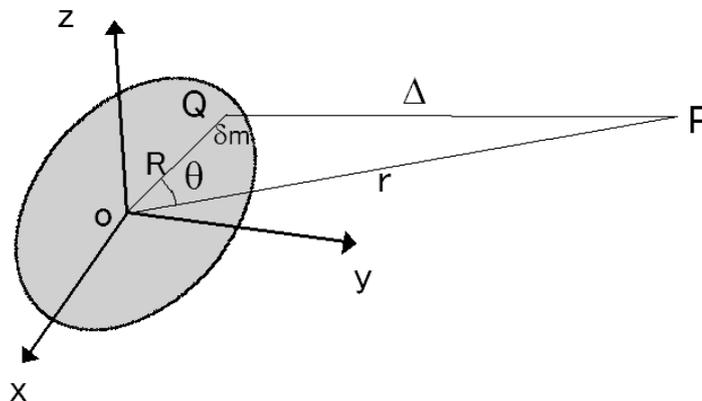


図 3.1: 衛星の重心を原点とし, 座標軸が慣性主軸に沿っている座標系. 点 P は原点 O から距離 r にある. 点 Q での微小質量要素 δm は O から距離 R にあり, OQ と OP の角度が θ である.

δm を原点 O から距離 R の点 Q での微小質量要素とすと, P での衛星のポテンシャル V は,

$$V = - \sum \frac{G\delta m}{\Delta} = - \sum \frac{G\delta m}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} \quad (3.1)$$

であたえられる. ここで θ は OP と OQ の角である. 式 (3.1) を展開して, 高次の項を無視

すると (すべての Q で $r \gg R$)

$$V \approx -\frac{Gm_s}{r} - \frac{\sum G\delta m R \cos \theta}{r^2} - \frac{2\sum G\delta m R^2 - 3\sum G\delta m R^2 \sin^2 \theta}{2r^3} \quad (3.2)$$

を得る. ここでこの式の項を第一項からそれぞれ単極子, 双極子, 四重極子モーメント, という. また $m_s = \sum \delta m$ は衛星の質量である. O は衛星の重心なので,

$$\sum \delta m R \cos \theta = 0 \quad (3.3)$$

また

$$\begin{aligned} 2\sum \delta m R^2 &= 2\sum \delta m(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \sum \delta m(y^2 + z^2) + \sum \delta m(z^2 + x^2) + \sum \delta m(x^2 + y^2) \\ &= A + B + C \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. 直線 OP の周りの慣性モーメントを I とすると

$$I = \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta \quad (3.5)$$

よって, 式 (3.2) は

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G(A + B + C - 3I)}{2r^3} \quad (3.6)$$

と書ける. これは MacCullagh の公式 (MacCullagh, 1844; Haughton, 1855) と呼ばれる.

3.2 衛星の自転の運動方程式

このポテンシャルの勾配にしたがって, 衛星は点 P に仮想的に置いた質量に原点 O の周りのトルクを及ぼし, また衛星にも大きさが同じで符号が逆のトルクが働くことになる. 後者のトルクの成分は点 P に置いた単位質量あたりに次のように書ける.

$$N_x = zF_y - yF_z = +3G(C - B)yz/r^5 \quad (3.7)$$

$$N_y = xF_z - zF_x = +3G(A - C)zx/r^5 \quad (3.8)$$

$$N_z = yF_x - xF_y = +3G(B - A)xy/r^5 \quad (3.9)$$

点 P に質量 m_p の惑星が存在する場合を考えよう. Euler の完全運動方程式は

$$\mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B} - \mathcal{C})\omega_y\omega_z = N_x \quad (3.10)$$

$$\mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C} - \mathcal{A})\omega_z\omega_x = N_y \quad (3.11)$$

$$\mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A} - \mathcal{B})\omega_x\omega_y = N_z \quad (3.12)$$

であり, ここで $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は自転ベクトルを各主軸に射影したものである (詳しくは付録 B のオイラーの運動方程式を参照). 衛星の自転軸は軌道面に垂直で ω_x, ω_y はゼロとす

る. $x/r = \cos \psi$, $y/r = \sin \psi$ とすると (図 3.2 参照) この場合 Euler の運動方程式は, 式 (3.12) から

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (3.13)$$

と書ける. ここで角 θ は慣性空間での衛星の自転角で, 衛星の最小主慣性軸と衛星の軌道長軸がなす角である. これが永久四重極子モーメントを持つ衛星の自転の運動方程式である.

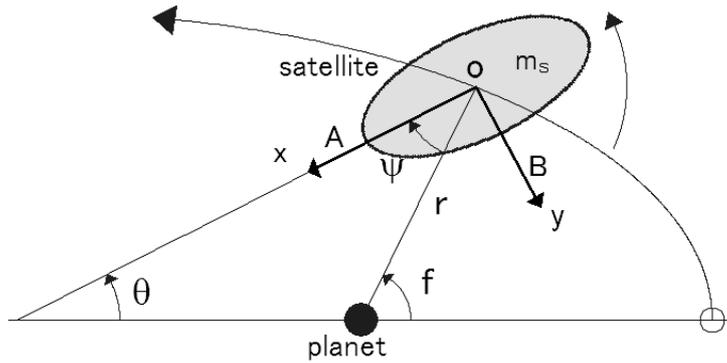


図 3.2: 軌道面に垂直な自転軸を持つ衛星の回転. ψ は惑星と衛星を結ぶ直線と主軸 A との間の角度である. 軸 A は衛星の最小の主慣性モーメントを示している. 角 θ は慣性空間の自転の固定方向からの角度である.

4 自転軌道共鳴による自転軌道結合の安定

4.1 自転軌道共鳴と平均運動方程式

ここまで永久四重極子モーメントに働くトルクについて考えてきたが、通常その重力相互作用は弱く、衛星の回転速度は短周期の振動を生じさせるのみで、それ以上の影響は少ない。しかし、この場合には当てはまらない状況がある。衛星の自転周期と公転周期が整数比関係、もしくはそれに近い自転軌道状態にある場合である。このような場合には強い自転軌道共鳴が起こる。

今、潮汐トルクを考えなければ、衛星の自転 θ に関する運動方程式は、(式 (3.13) 参照)

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (4.1)$$

である。しかしこの運動方程式を解こうとしても r と ψ は、時間の非線形関数なのでこの方程式は積分できない。しかし、自転速度 $\dot{\theta}$ が平均運動 n と整数比になっている場合には、便利な近似式を導くことができる。

今、 $\dot{\theta}$ がほぼ n の有理数 p 倍となっている、 $\dot{\theta} - pn \approx 0$ であるような場合に興味を持つるので、この式を積分して次の新しい変数を導入する。

$$\gamma \equiv \theta - pM \quad (4.2)$$

ここで M は平均近点離角である。 γ は、自転速度と平均運動が整数関係 ($\dot{\theta} \approx pn$) なら、ごくゆっくりとしか動かない (ほぼ定数のような) 値である。 $\psi = f - \theta$ なので、 n を一定とし、 $\dot{\theta} = \dot{\gamma}$ とすると、 γ に関する運動方程式は次のように書ける (式 (4.1) 参照)。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \left(\frac{B - A}{C} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = 0 \quad (4.3)$$

この方程式は e, M について展開することができ、

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2} \frac{(B - A)}{C} n^2 ([S_1 + S_2] \sin 2\gamma + [S_3 - S_4] \cos 2\gamma) = 0 \quad (4.4)$$

と書ける。 S_i は $\mathcal{O}(e^2)$ の項までとって

$$\begin{aligned} S_1 = & \frac{1}{2} [\cos 2(1 - p)M + \cos 2(1 + p)M] \\ & + \frac{1}{4} e [7 \cos(3 + 2p)M + 7 \cos(3 - 2p)M \\ & \quad - \cos(1 + 2p)M - \cos(1 - 2p)M] \\ & + \frac{1}{4} e^2 [-5 \cos 2(1 + p)M - 5 \cos 2(1 - p)M \\ & \quad + 17 \cos 2(2 + p)M + 17 \cos 2(2 - p)M] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{2}[\cos 2(1-p)M - \cos 2(1+p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e[-7\cos(3+2p)M + 7\cos(3-2p)M \\
 & \quad - \cos(1-2p)M + \cos(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e^2[5\cos 2(1+p)M - 5\cos 2(1-p)M \\
 & \quad - 17\cos 2(2+p)M + 17\cos 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = & \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M - \sin 2(1-p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e[7\sin(3+2p)M - 7\sin(3-2p)M \\
 & \quad + \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e^2[-5\sin 2(1+p)M + 5\sin 2(1-p)M \\
 & \quad + 17\sin 2(2+p)M - 17\sin 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 S_4 = & \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M + \sin 2(1-p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e[7\sin(3+2p)M + 7\sin(3-2p)M \\
 & \quad - \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e^2[-5\sin 2(1+p)M - 5\sin 2(1-p)M \\
 & \quad + 17\sin 2(2+p)M + 17\sin 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

である。ここで e は軌道離心率 S_3, S_4 が正弦しか含まず, S_1, S_2 が余弦だけを含むことに注目する。 γ はごくゆっくりとしか変化しないので, この γ がほぼ固定された状態の間に, 式 (4.4) のすべての項を公転一周周期にわたって平均することによって次の近似運動方程式を得ることができる。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3(B-A)}{2C}n^2([\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle] \sin 2\gamma + [\langle S_3 \rangle - \langle S_4 \rangle] \cos 2\gamma) = 0 \tag{4.9}$$

また,

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_i dM \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.10}$$

である。 $\langle S_i \rangle$ は, 有理数 p の値によって様々な値を取る。 M のゼロでない整数倍の引数をもつ正弦と余弦の項は一周周期にわたって平均するとゼロになってしまう。よって運動方程式にゼロでない寄与ができる S_i の唯一の項は, 引数がゼロの余弦の項だけである。例えば $p = 1$ の同期状態の場合は, 引数に $p - 1$ を含む余弦の項だけが平均運動方程式に寄与できる。式 (4.9) を次のように書くと,

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \frac{(B-A)}{C} H(p, e) \sin 2\gamma = 0 \tag{4.11}$$

例えば他の p の値についても式 (4.5) から式 (4.8) を調べ、 $\mathcal{O}(e^4)$ の項までとってそろえると

$$H(-1, e) = +\frac{1}{24}e^4 \quad (4.12)$$

$$H(-1/2, e) = +\frac{1}{48}e^3 \quad (4.13)$$

$$H(0, e) = 0 \quad (4.14)$$

$$H(+1/2, e) = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3 \quad (4.15)$$

$$H(+1, e) = +1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 \quad (4.16)$$

$$H(+3/2, e) = +\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \quad (4.17)$$

$$H(+2, e) = +\frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 \quad (4.18)$$

$$H(+5/2, e) = +\frac{845}{48}e^3 \quad (4.19)$$

$$H(+3, e) = +\frac{533}{16}e^4 \quad (4.20)$$

となる. ここから p が $1/2$ の整数 (ゼロを除く) 倍のときのみ, 衛星の永久四重極子モーメントと惑星の重力相互作用が共鳴し衛星の自転運動に大きく作用することがわかる.

4.2 共鳴時の永久変形に働くトルクと潮汐トルク

ここで, 式 (4.11) は次の振り子の運動方程式のように整理でき

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)]\frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\gamma \quad (4.21)$$

ただし

$$\omega_0 = n \left[3 \left(\frac{B-A}{C} \right) |H(p, e)| \right]^{1/2} \quad (4.22)$$

は秤動振動数である. ここで先に述べた潮汐トルクが衛星の自転を速める効果を含めると平均運動方程式は, 潮汐トルクを一周期で平均した平均潮汐トルク $\langle N_s \rangle$ を加えて,

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)]\frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\gamma + \langle N_s \rangle / C \quad (4.23)$$

となる. もし

$$|\langle N_s \rangle| / C < \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (4.24)$$

が満たされて, 平均潮汐トルクが秤動振動する復元トルクの範囲にあれば, γ は次式で与えられる平衡値 γ_0 の周りを秤動する.

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\frac{2\langle N_s \rangle}{-[\text{sign } H(p, e)]\omega_0^2 C} \right] \quad (4.25)$$

衛星の平衡方向を表す γ_0 は, $H(p, e)$ の符号で決まる. γ が γ_0 からの変位した場合, $\ddot{\gamma}$ の符号は, γ を γ_0 に戻すようになっていなければならない. ある瞬間に衛星の長軸と衛星と惑星を結ぶ直線が図 4.1 の配置にあった場合, 平均潮汐トルクがきわめて弱く,

$$|\langle N_s \rangle|/C \ll \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (4.26)$$

ならば, $\gamma \geq 0$ のときは, $H(p, e) > 0$ のとき $\ddot{\gamma}$ の符号は負で衛星に時計回りのトルクが働く. つまり衛星の平衡方向は $\gamma_0 \approx 0$ もしくは π で, 衛星は近点を通るときにその長軸が惑星の方を向く (図 4.1 左). 逆にもし $H(p, e) < 0$ で衛星に反時計回りのトルクが働いたら, 衛星の平衡方向は $\gamma_0 \approx \pi/2$ もしくは $3\pi/2$ となり, 衛星は近点でその長軸が惑星と衛星を結ぶ直線に垂直な方向を向く. $\gamma < 0$ の場合はそれぞれトルクが逆になり, 結局 γ_0 は同じ方向を向く.

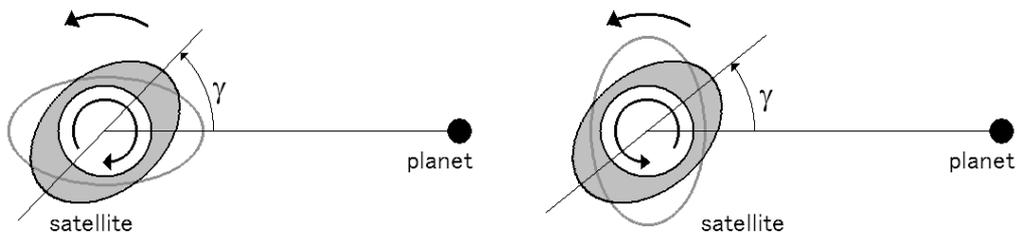


図 4.1: 左側の衛星 ($H(p, e) > 0$) には負のトルクが働いている. 衛星の長軸が惑星の方を向くようなトルクである. 逆に右側の衛星 ($h(p, e) < 0$) には正で, 衛星の長軸が惑星と衛星を結ぶ直線に垂直な方向を向くようなトルクが働いている.

最後に平均運動方程式を簡単に解釈するために水星の太陽の周りの自転軌道運動を考える. これまでは特に同期状態を例に挙げてきたが, $p = +1$ 以外にも結合は安定できると説明した. よってこの例として水星を見てみる. 水星は自転軌道運動が 1:1 の同期状態ではなく, 3:2 の自転軌道共鳴に捕らえられていると観測されているからである.

水星の自転周期は 58.65 日で軌道周期は $87.97 = 1.5 \times 58.65$ 日である. したがって, 水星は 2 回公転する間に 3 回自転する. そして水星は近日点を通過するたびに, 前回向けていた面と反対側の面が太陽と向き合う. 角 γ_0 は, 水星が近日点を通過するときの水星の長軸の太陽方向からの角度である. 式 (4.17) から $H(p, e) \approx +(7/2)e > 0$ なので, $\gamma_0 \approx 0$ すなわち近日点で水星の長軸は太陽の方向を向くと予想される.

図 4.3(1) は, 水星を中心とする自転速度 $(3/2)n$ で回転している座標系での太陽の運動である. ここでの n は水星の平均運動である. 輪になっている太陽の通り道上の点は, 等時間間隔での太陽の場所である. この回転座標系の太陽の通り道が閉じているのは, 水星が太陽と自転軌道結合しているからである.

この図を用いて水星の四重極子モーメントと太陽との平均重力相互作用について説明す

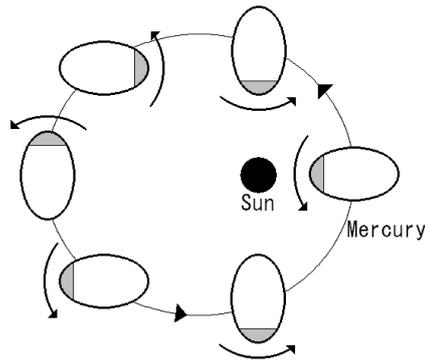


図 4.2: 太陽が中心の慣性座標系で, 水星は一軌道周期あたり $3/2$ 回自転する.

る. まず, この閉じた通路に沿って太陽の質量を太陽が各場所を通過するときに費やす時間に比例させてばら撒き, これが衛星の四重極子モーメントに及ぼすトルクを考える. この図の対称性からこの質量分布は, 図 4.3(2) のように, 正の二つの質点と, トルクに寄与しないような同一の線密度の環状分布を持つ質量分布に置き換えることができる. ここで

$$f = \frac{1}{2}H(p, e) \approx \frac{7}{4}e \tag{4.27}$$

そして m_{sun} は太陽の質量である.

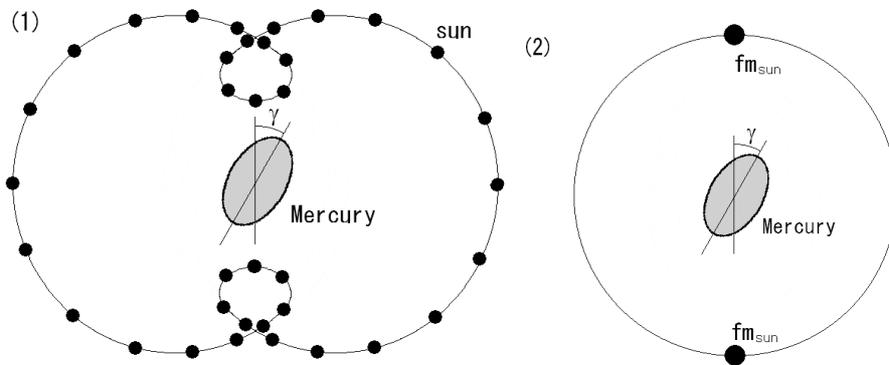


図 4.3: (1) 水星を中心とする $(3/2)n$ (ここで n は水星の平均運動) で回転する座標系での太陽の運動. 水星の四重極子モーメントと太陽との重力相互作用は, 通路の各部分 (通路上の点は, 等時間間隔での太陽の位置である) に費やす時間に比例した点密度を持つ, 通路に沿った太陽の質量分布, もしくは (2) に書かれているような, 二つの質点 fm_{sun} とトルクに寄与しない同一の線密度の輪によって書くことができる. ここで, $f = (1/2)H(3/2, e)$ で m_{sun} は太陽質量である.

式 (4.5) と (4.6) より, p は $1/2$ の整数 (ゼロを除く) 倍でなければならない. p のその他の値は共鳴相互作用には寄与しない. 図 4.3(2) で, もし一つの質点によって衛星に働く

トルクを $N \sin 2\gamma$ とすると、潮汐トルクによって不安定な状態になっている衛星の自転軌道結合を平衡な状態に戻すために衛星に働く総トルクは $2N \sin 2\gamma$ である。しかし例えば、 $p = 4/3$ の場合には質量分布は図 4.4 のように三つの質点と環状分布でモデル化でき、 γ を変化させるために働く総トルクは、

$$N \sin 2\gamma + N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) = 0 \quad (4.28)$$

となり、潮汐トルクを打ち消すトルクはゼロで、自転軌道結合は生じない。また $p = 0$ の場

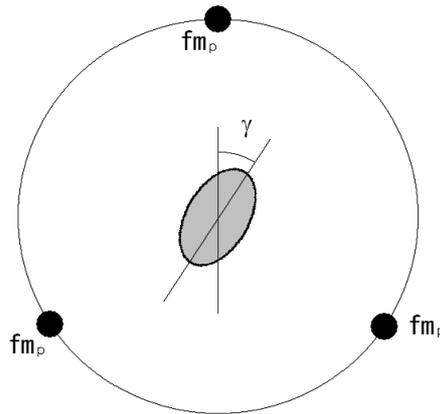


図 4.4: $p = 4/3n$ (n は衛星の平均運動) のときの、衛星の四重極子モーメントと惑星との重力相互作用を、図 4.3(2) のように質点とトルクに寄与しない同一の線密度の輪によってモデル化したもの。この場合では質点は三つで書ける。

合にも、衛星のトルクはゼロになる (詳しい計算は付録の全訳参照)。

自転軌道共鳴に捕われている衛星において、球対称からのずれに働くトルクは潮汐トルクよりも大きなものでなければならない。式 (2.2) と強さの基準の式 (4.40) から、 $(B - A)/C$ は

$$\left(\frac{B - A}{C}\right)_{critical} = \frac{5 k_2}{2 Q} \left(\frac{R_s}{a}\right) \frac{m_p}{m_s} \frac{1}{|H(p, e)|} \quad (4.29)$$

で与えられる臨界値を超えるものでなければならない。ここで m_p は主天体の質量で、 $C \approx (2/5)m_s R_s^2$ と仮定した。太陽と水星、地球と月での一連の自転軌道共鳴に対する $(B - A)/C$ の臨界値を表 4.1 にまとめた。月と水星の軌道離心率はそれぞれ 0.00549 と 0.206 で、月に関しては $(B - A)/C \approx 2.28 \times 10^{-4}$ (Yoder, 1995) である。また、水星の $(B - A)/C$ もそれに匹敵するものと考えられる。表 4.1 を調べると、確かに水星の (もしくは月の) 現在の自転軌道状態の復元力で自転軌道結合は維持できる。

p	Mercury	moon
	$(B - A)/C$	$(B - A)/C$
+3	2×10^{-8}	7×10^{-5}
+5/2	7×10^{-9}	7×10^{-6}
+2	3×10^{-9}	8×10^{-7}
+3/2	2×10^{-9}	10^{-7}
+1	10^{-9}	7×10^{-8}

表 4.1: 月と水星に関する $(B - A)/C$ の臨界値. 水星では $k_2 \approx 0.1$ で $Q = 100$, 月では $k_2 \approx 0.03$ で $Q = 27$ としている (Yoder, 1995).

5 まとめ

衛星の自転運動に影響を与える主なトルクには, 衛星の潮汐バルジに働く潮汐トルクと, 衛星の永久四重極子モーメントと惑星との重力相互作用によるトルクがある. しかし通常, 後者は衛星の自転にごく小さな影響しか与えないので, このうちまず潮汐トルクだけを考える. その場合, 衛星がもし同期自転状態にあった場合には自転速度は徐々に増加し, 同期自転は安定ではない.

次に永久四重極子モーメントを持つ衛星の外部重力場を主慣性モーメントを用いて Mac-Cullagh の公式によって記述し, それをもとに衛星の自転の運動方程式を求めることができる.

永久四重極子モーメントに働くトルクは, 自転周期が公転周期の $1/2$ の整数倍の場合に, 軌道運動と自転運動の共鳴を起こし, 衛星の自転周期をそこに固定する働きを持つ. ただしこのトルクによる復元力は潮汐トルクよりも大きな値でなければならず, 平均自転角速度の平均運動に対する比 p が $p = +1, +1/2, +3/2$ のような共鳴状態の場合に, より安定することがわかる.

求めた復元力の臨界値からも月や水星が現在持つ復元力で結合が安定できることがわかり, 以上のことから, 太陽系内の主要な衛星の自転軌道結合は安定なものであるといえる.

A 全訳

A.1 序論

前章では衛星が同期自転状態（すなわち衛星の自転周期がその公転周期に等しい状態）にあると仮定した場合の、惑星によって衛星に生じる潮汐の効果について考えた。1.6 節で述べたように、太陽系内の主要な天然な衛星のほとんどは同期状態で回転していると観測されている。このような状況はどのようにして起きたのか？また、これらの衛星の自転や公転軌道は何によって決まるのだろうか？この章では、衛星の自転における潮汐トルクの影響を、さらに進んで調べることから始めよう。この分析は、例えばなぜ月はその同期自転軌道共鳴を維持するために永久四重極子モーメントを持っていないからなのか、ということをはっきりさせる。その系におけるこの付加的なトルクの効果の結果は次に調べ、太陽系における自転軌道共鳴に関する概念への一般的なアプローチを導く。またこれらの共鳴の起源と安定性についても議論する。

A.2 潮汐による自転速度の変化

衛星が惑星の周りを楕円軌道で回っている場合を考える。 $\dot{\eta} + n$ で示される衛星の自転速度は、その角速度、すなわち真近点離角の変化の割合 \dot{f} よりも小さい（もしくは大きい）。この概要を図 5.1a に示す。衛星を中心とし衛星の平均運動 n で回転する座標系に変換すると、そのときこの回転系では、惑星は 2 : 1 の楕円（4.10 節参照）で図 5.1b のように案内中心（guiding centre）の周りを移動する。回転座標系における衛星の回転速度は $\dot{\eta}$ で、 $\langle \dot{\eta} \rangle = 0$ の場合は同期自転軌道状態にあたる。

Fig.5.1 で、離心率 e が小さな値の場合、角度 φ は次のように表される。

$$\varphi \approx 2e \sin nt \quad (\text{A.1})$$

したがって $\dot{\varphi}$ は時間の関数で、惑星が 2 : 1 楕円の周りを動くにつれて符号が変わる。もし $\dot{\varphi} < 2en$ ならば、そのとき衛星が近点（pericentre）に近い位置にあるなら $\dot{\varphi} > \dot{\eta}$ となりうる。図 5.2a は、この角度が $\dot{\eta}$ の値を超えている場合で、影が掛かっている部分で示されている。この部分では、惑星の遅れによって衛星に衛星惑星間のライン（図 4.12 参照）より遅れて潮汐が起き、結合は衛星の $\dot{\eta}$ を増加させるように働き、衛星の自転は早くなる（図 5.2a 参照）。 $\dot{\varphi} < \dot{\eta}$ の影になっていない部分ではこの状況は逆になり、衛星での潮汐は衛星惑星間のライン（図 4.6 参照）より前に進んでいる。この場合、その結果生じた結合は衛星の自転にブレーキをかけ、 $\dot{\eta}$ を減少させる（図 5.2b 参照）。

4.3 節で調べたこの状況の類似性から、潮汐トルクが衛星の自転を変化させる働きは、

$$N_s = -D \left(\frac{a}{r} \right)^6 \text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\varphi}) \quad (\text{A.2})$$

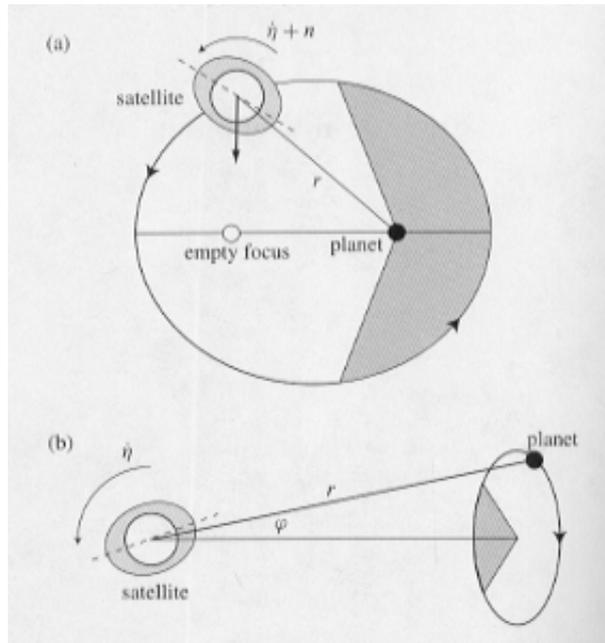


図 A.1: (a) 慣性座標系の衛星の軌道は惑星が中心である. 影になっていない部分は慣性空間での衛星の自転速度が $\dot{\eta} + n > \dot{f}$ の軌道の部分である. (b) 衛星を中心として平均運動 n で回転している座標系での惑星の軌道. 影でない部分は真近点離角が $\eta > \phi$ のときである.

で, ここで,

$$D = \frac{3}{2} \frac{k_2}{Q_s} \frac{n^4}{G} R_s^5 \tag{A.3}$$

で, 正の定数である. Q_s, k_2, R_s はそれぞれ潮汐散逸関数, ラブ数, 衛星の半径である. 正のトルクは衛星の自転速度 $\dot{\eta}$ を増加させるように働く. 平均トルク $\langle N_s \rangle$ を求めるには, 衛星の一周にわたって N_s の平均をとる必要がある. もし衛星が同期自転 ($\dot{\eta} = 0$) しているような特殊な場合を考えるなら, そのときトルクは楕円の中心に近い位置なら正, 遠い位置では負である (図 5.3a 参照). 惑星は 2 : 1 の楕円の半分ずつを同じ時間だけかける. しかしながら, 近い位置では動径距離は小さいので, 平均トルクは正で衛星の自転速度を増加させるように働くだらう. 平均トルクがゼロで平衡になるためには, 必ず ($\dot{\eta} > 0$) となる. この場合, トルクの符号は 2 : 1 楕円の間接点では逆にならない. また, 惑星軌道の影の部分のトルクの働きは, 影でない部分よりも強いがより短い期間で働くので, トルクは平衡に達する (図 5.3b 参照).

この議論から, 同期状態は安定ではなく衛星の自転が加速するように働くと想像される. もしこれが事実なら, なぜ多くの衛星が同期自転していると観測されているのだろうか? その答えは他のトルクが働いているからで, なぜなら月の場合のようにほとんどの衛星が少なくとも部分的には固体で, かつ永久的な隆起もしくは球体からのずれのような永久四重極子モーメントを持つからである. 四重極子モーメントの影響を調べる前に, Goldreich(1966) に従って, 久変形を考えずに平衡自転速度を計算する.

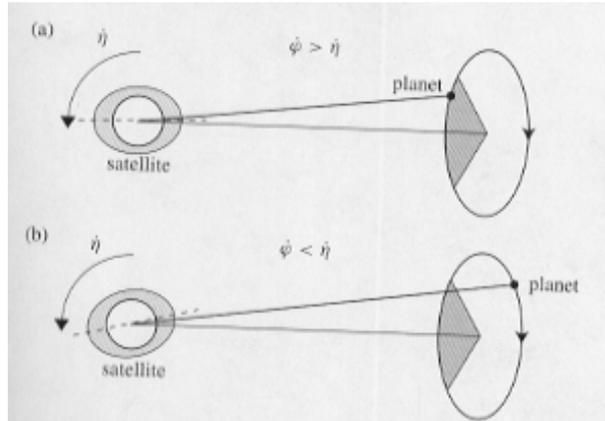


図 A.2: (a) $\dot{\phi} > \dot{\eta}$ の影になっている部分では, 衛星の潮汐は惑星の遅れによって衛星惑星間のラインより遅れて生じ (点線は潮汐バルジの軸を示している), 正の結合は衛星に自転速度を増加させるように働く. (b) $\dot{\phi} < \dot{\eta}$ である他のすべての軌道の部分では, 潮汐バルジは衛星惑星間ラインよりも前に運ばれ, 衛星の自転にブレーキがかかる.

$\dot{\eta} = \dot{\phi}$ もしくは次の式で与えられるような二点では式 (5.2) の符号は逆になる.

$$\dot{f} = \dot{\eta} + n \tag{A.4}$$

もし近点の通過時間が $t = 0$ で, $t = \pm T$ で符号が逆転するなら

$$f \approx nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt \tag{A.5}$$

から,

$$\dot{\eta} = 2en \cos nT + \frac{5}{2}e^2 n \cos 2nT \tag{A.6}$$

のときに符号が逆転する. その時間を

$$f = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \tag{A.7}$$

と表せるとする. そのとき

$$\sin \delta = \cos f = \cos(nT + 2e \sin nT) = \cos nT - 2e \sin^2 nT \tag{A.8}$$

式 (5.6) より

$$\cos nT = \frac{\dot{\eta}}{2en} - \frac{5}{4}e \cos 2nT \tag{A.9}$$

したがって, $\mathcal{O}(e)$ までとると

$$\sin \delta = \frac{\dot{\eta}}{2en} - \frac{5}{4}e + \frac{1}{2}e \sin^2 nT \tag{A.10}$$

衛星に働いている平均潮汐トルクは

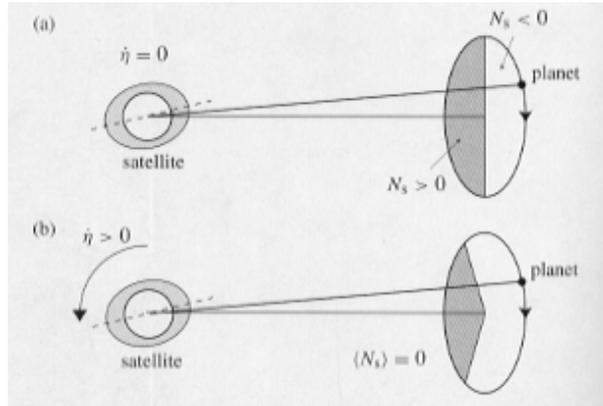


図 A.3: (a) もし $\dot{\eta} = 0$ なら, 潮汐トルクは惑星軌道に近い場所では正で強く, 遠い場所では負で弱い. したがって最終的な衛星のトルクの結果は正で, 衛星の自転速度は増加する. (b) 平衡の場合, $\dot{\eta} > 0$ で, 衛星の潮汐トルクの符号は遠点 (apocentre) より近点に近い位置で逆になる. 正の強いトルク (影の部分) は, 負の弱いトルクより短い時間で働く.

$$\begin{aligned} \langle N_s \rangle &= -\frac{nD}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^6 \text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\varphi}) \\ &= -\frac{D}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \frac{\text{sign}(\dot{\eta} - \dot{\varphi})}{(1-e^2)^{1/2}} df \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

で与えられる. 符号の変化を考慮すれば次のように変形される.

$$\begin{aligned} \langle N_s \rangle &= +\frac{D}{\pi} \int_0^{(\pi/2)-\delta} (1+4e \cos f) df - \frac{D}{\pi} \int_{(\pi/2)-\delta}^{\pi} (1+4e \cos f) df \\ &= +\frac{2D}{\pi} (4e \cos \delta - \delta) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

平衡状態なので, $\langle N_s \rangle = 0$ で

$$\delta = 4e \cos \delta \approx 4e \left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right) \approx 4e \quad (\text{A.13})$$

となる. これと式 (5.5) と (5.7) より次のような関係が出て,

$$\begin{aligned} \sin nT &\approx \sin f \approx \sin[\pm(\pi/2 - \delta)] \\ &= \cos \delta \approx \cos 4e \approx 1 - 8e^2 \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

式 (5.10) に代入すれば, 次の結果を得る.

$$\dot{\eta} = \frac{19}{2} e^2 n \quad (\text{A.14})$$

このように, 永久四重極子モーメントを考えなければ, 例えば月では観測された同期速度よりも 3% 早く自転し, 2.6 年かけて月の両面が見えてしまうだろう.

この前置きの課を終える前に式 (5.2) で, 潮汐バルジが一定の遅れ角を持つ MacDonald(1966) のモデルを使って, 潮汐遅れの影響を公式化したいということを強調しておかなければならない. もし潮汐ポテンシャルがフーリエ時間級数に展開され, 潮汐のそれぞれの成分が一定の位相のずれによって与えられる Darwin(1908) の定式化を選んだなら, 結果はかなり違ったものになるだろう. Goldreich & Peale(1966) でこの詳細について議論されている.

A.3 永久四重極子モーメント

重心からの任意の距離における永久変形した衛星の外部の重力場を計算するには、衛星内の質量分布の記述が必要である。無限遠での場合は質点による場によってうまく表すことができる。それよりも距離が小さい（それでも大きい）場合は、衛星の主慣性モーメントによって定められる質量分布の情報は、十分であると証明される。あとに続く導出は、主に Macmillan(1936) と Ramsey(1937, 1940) によるものに基づいている。物体中の点 P の質量要素を考え、この要素の任意の原点 O に対する位置ベクトルを $\mathbf{p} = (x, y, z)$ とする。(図 5.4) 座標の軸に関する慣性モーメントを次で定義する。

$$A = \sum \delta m (y^2 + z^2) \quad (\text{A.15})$$

$$B = \sum \delta m (z^2 + x^2) \quad (\text{A.16})$$

$$C = \sum \delta m (x^2 + y^2) \quad (\text{A.17})$$

また、慣性乗積は、

$$D = \sum \delta m yz \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{E} = \sum \delta m zx \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{F} = \sum \delta m xy \quad (\text{A.20})$$

である。

直線 OL の周りの慣性モーメント I_L は、 $A, B, C, D, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ と直線 OL の x, y, z 軸の方向余弦 l, m, n で表される。 PQ は点 $P(x, y, z)$ を通り、直線 OL に垂直な直線とする。また、位置ベクトル Q は $\mathbf{q} = (x', y', z')$ で与えられる。したがって、ベクトル \mathbf{p} と \mathbf{q} の大きさは、それぞれ $OP = p, OQ = q$ である。 PQ は OL に垂直なので、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = q^2 \quad (\text{A.21})$$

を得る。しかしながら、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = xx' + yy' + zz' = x(lq) + y(mq) + z(nq) = q(lx + my + nz) \quad (\text{A.22})$$

なので、したがって

$$q = lx + my + nz \quad (\text{A.23})$$

となる。慣性モーメント I_L は

$$I_L = \sum \delta m (PQ)^2 = \sum \delta m [x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2] \quad (\text{A.24})$$

であたえられる。 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ なので

$$I_L = \sum \delta m [(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2] \quad (\text{A.25})$$

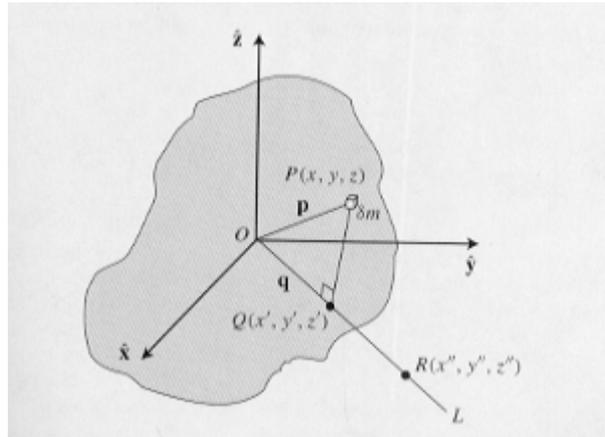


図 A.4: 物体中の点 P での質量要素 δm の位置は、位置ベクトル $\mathbf{p} = (x, y, z)$ であらわされる。 OL は O での座標系での原点からの任意の直線である。 PQ は点 P を通り、 OL 上の位置ベクトル $\mathbf{q} = (x', y', z')$ の点 Q で直線 OL に垂直である。点 R は直線 OL 上の、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x'', y'', z'')$ であらわされる任意の点である。

と書ける。展開して整理すれば

$$I_L = l^2 \sum \delta m (y^2 + z^2) + m^2 \sum \delta m (z^2 + x^2) + n^2 \sum \delta m (x^2 + y^2) - 2mn \sum \delta m yz - 2nl \sum \delta m zx - 2lm \sum \delta m xy \quad (\text{A.26})$$

これは次のように書ける。

$$I_L = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2Dmn - 2Enl - 2Flm \quad (\text{A.27})$$

もし原点 O からの距離が r の OL 上の任意の点 $R(x'', y'', z'')$ を考え $m_s = \sum \delta m$ を変形物体の総質量、 λ を任意の長さとするなら

$$I_L = \frac{m_s \lambda^4}{r^2} \quad (\text{A.28})$$

三軸楕円体の一般方程式より $x'' = lr, y'' = mr, z'' = nr$ なので、式 (5.27) は式 (5.29) になる。

$$m_s \lambda^4 = Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 - 2Dy''z'' - 2Ex''z'' - 2Fx''y'' \quad (\text{A.29})$$

もし座標軸を対称軸と一致するものを選んだなら、慣性乗積 D, E, F はその新しい軸については消去され、式 (5.29) は次のように変形される。

$$m_s \lambda^4 = Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 \quad (\text{A.30})$$

これらの新しい軸は原点 O で定義される物体の慣性主軸である。式 (5.30) は慣性楕円を定義している。(上の計算の詳細は Cauchy(1827) 参照) これは一定不変な物体で、軸方向から独立しているが、原点 O の位置とともに変化する。 O が重心なら、この楕円は慣性中心楕円と呼ばれる。この楕円の特性によれば、どの物体もその形にはよらず、あるひとつの軸

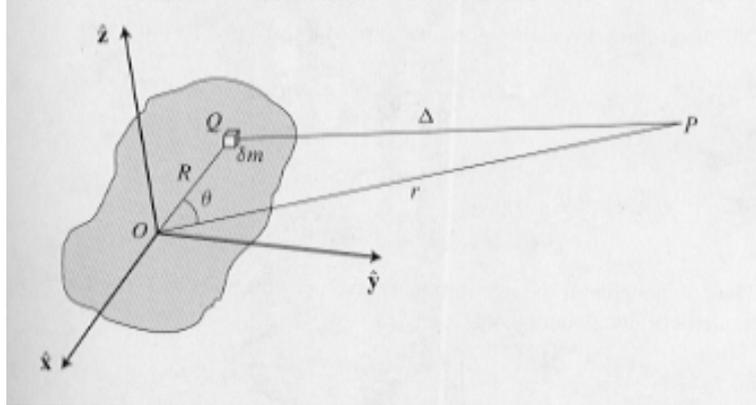


図 A.5: 衛星の質量の中心 O が原点で、軸が主な慣性モーメントと並んでいる座標系. 点 P は点 O から距離 r にある. 点 Q での微小質量要素 δm は O から距離 R にあり, OQ と OP の角度が θ である.

の周りの慣性モーメントは最大で, 他のひとつでは最小, 三つ目ではその間かもしくはどちらかと同じ値, というような三つのお互いに垂直な軸をもつ.

これから重心に関して定義される主慣性モーメント A, B, C によって, 永久変形した衛星の外部重力場の式を導く. 新しい系では, 点 O を衛星の重心とし, 点 P は点 O から距離 r の位置にあるとする. ここでは r は, 衛星の平均半径よりはるかに大きいと想定し, 座標系は x, y, z 方向が衛星の慣性主軸に沿っているとする (図 5.5).

δm が原点 O から距離 R の点 Q での微小質量要素ならば, P での衛星のポテンシャルは

$$V = - \sum \frac{G\delta m}{\Delta} = - \sum \frac{G\delta m}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} \quad (\text{A.31})$$

であたえられる. θ は OP と OQ の角で, 和はすべての質量要素を引き継いでいる. 式 (5.31) を二項式に展開して, 次数の高い項を無視すると (すべての Q で $r \gg R$),

$$V \approx - \frac{Gm_s}{r} - \frac{\sum G\delta m R \cos \theta}{r^2} - \frac{2 \sum G\delta m R^2 - 3 \sum G\delta m R^2 \sin^2 \theta}{2r^3} \quad (\text{A.32})$$

を得る. 前に述べたように $m_s = \sum \delta m$ は衛星の質量である. 点 O は衛星の重心なので

$$\sum \delta m R \cos \theta = 0 \quad (\text{A.33})$$

で, また

$$\begin{aligned} 2 \sum \delta m R^2 &= 2 \sum \delta m (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \sum \delta m (y^2 + z^2) + \sum \delta m (z^2 + x^2) + \sum \delta m (x^2 + y^2) \\ &= A + B + C \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

となる. 直線 OP の周りの物体の慣性モーメントを I で定義すると,

$$I = \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.35})$$

式 (5.32) が良い近似の範囲において,

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - 3I)}{2r^3} \quad (\text{A.36})$$

これは MacCullagh の公式である. (MacCullagh, 1844; Haughton, 1855)

今 x, y, z を点 P での座標とすると $x/r, y/r, z/r$ は慣性主軸に関する点 P での方向余弦である. よって式 (5.27) から

$$I = (\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2)/r^2 \quad (\text{A.37})$$

である. MacCullagh の公式にこの I の式を代入すると

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}}{2r^5} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) \quad (\text{A.38})$$

ここで

$$f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) = (\mathcal{B} + \mathcal{C} - 2\mathcal{A})x^2 + (\mathcal{C} + \mathcal{A} - 2\mathcal{B})y^2 + (\mathcal{A} + \mathcal{B} - 2\mathcal{C})z^2 \quad (\text{A.39})$$

このポテンシャルの勾配による点 P での単位質量ごとの重力の成分は

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mathcal{G}m_s x}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{B} + \mathcal{C} - 2\mathcal{A})x}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}x}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) \quad (\text{A.40})$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mathcal{G}m_s y}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{C} + \mathcal{A} - 2\mathcal{B})y}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}y}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) \quad (\text{A.41})$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\mathcal{G}m_s z}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 2\mathcal{C})z}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}z}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) \quad (\text{A.42})$$

これらの力は点 P の単位質量あたりに偶力を及ぼし, 変形体の重心には等しくて正反対な偶力が働く. 後者の偶力には次のような成分がある.

$$N_x = zF_y - yF_z = +3\mathcal{G}(\mathcal{C} - \mathcal{B})yz/r^5 \quad (\text{A.43})$$

$$N_y = xF_z - zF_x = +3\mathcal{G}(\mathcal{A} - \mathcal{C})zx/r^5 \quad (\text{A.44})$$

$$N_z = yF_x - xF_y = +3\mathcal{G}(\mathcal{B} - \mathcal{A})xy/r^5 \quad (\text{A.45})$$

Euler の完全運動方程式は

$$\mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B} - \mathcal{C})\omega_y\omega_z = N_x \quad (\text{A.46})$$

$$\mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C} - \mathcal{A})\omega_z\omega_x = N_y \quad (\text{A.47})$$

$$\mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A} - \mathcal{B})\omega_x\omega_y = N_z \quad (\text{A.48})$$

で $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は主な軸での自転ベクトルの射影である. 考える問題においては, 遠い惑星によって, 衛星のトルクがその四重極子モーメントの影響を受けるので, 衛星の回転運動を計

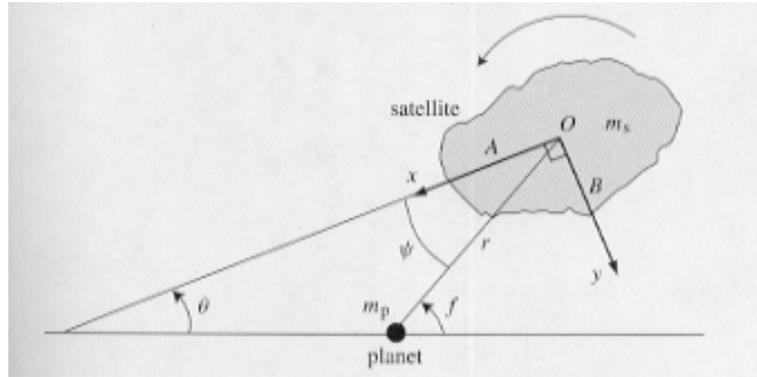


図 A.6: 軌道面に垂直な自転軸を持つ衛星の回転. ψ は惑星衛星間のラインと主要な軸 A の間の角度である. 軸 A は衛星の最小慣性モーメントと関係している. 角 θ は慣性空間の固定方向からの角度である.

算したい. ここでは衛星の自転軸は軌道面に垂直で ω_x, ω_y はゼロであると想定する. x 軸と y 軸に関する平面余弦を, それぞれ $x/r = \cos \psi$ と $y/r = \sin \psi$ と示す (図 5.6 参照). この場合 Euler の運動方程式は, 式 (5.48) から

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \tag{A.49}$$

と書ける. 角 θ は慣性空間で固定された方向から測ったものである. 上の運動方程式以外の公式化では, 例えば Danby(1988) では, $\ddot{\theta}$ の符号は正よりもむしろ負で記されている. これは Danby の座標系の選択が $\omega_z = -\dot{\theta}$ を示すことによって生じる.

続く考察で単純で十分な式 (5.49) の証明を得る. 直径上で正反対にあって, 赤道 (軌道) 平面にある, 等しい二つの質点 m を持つ球形衛星によって, 永久四重極子モーメントを持つ衛星を表す (図 5.7 参照). 質点の惑星からの距離をそれぞれ r_1, r_2 とし, r を衛星の中心と惑星の中心との距離とする. 惑星と衛星の中心を繋ぐ直線は A に関係する主要な軸と角 ψ をなす. A は慣性モーメントが最小で, 質点 m を結ぶ直線である.

衛星の平均半径を R_s とすれば, 惑星と二つの質点の間の重力による衛星のトルクは $N_1 + N_2$ で

$$N_1 = +G\frac{m_s m_p}{r_1^2} R_s \sin \alpha, \quad N_2 = -G\frac{m_s m_p}{r_2^2} R_s \sin \beta \tag{A.50}$$

角 α, β は図 5.7 で定義する. N_1 の符号は θ を増加させるように働くので正である. コサインとサインの公式を適用すれば

$$\sin \alpha = \frac{r}{r_1} \sin \psi, \quad \sin \beta = \frac{r}{r_2} \sin \psi \tag{A.51}$$

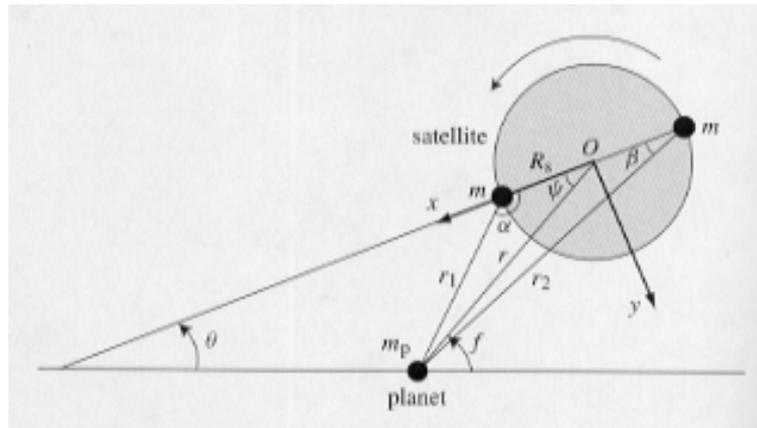


図 A.7: 直径の反対側に二つの質点がある球体による, 四重極子モーメントを持つ衛星の概要. 二つの質点を繋いだ直径は慣性モーメントが最小の軸と定義し, それは惑星衛星間のラインと角度 ψ をなす (図 5.6 参照).

となる. また

$$\frac{1}{r_1^3} \approx \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_s}{r} \right)^2 + 3 \frac{R_s}{r} \cos \psi \right] \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{1}{r_2^3} \approx \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_s}{r} \right)^2 - 3 \frac{R_s}{r} \cos \psi \right] \quad (\text{A.53})$$

である. それゆえ θ の運動方程式は次のように変形され,

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2} (2mR_s^2) \frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (\text{A.54})$$

$B - A = 2mR_s^2$ なので, 式 (5.49) と同様のものができた.

A.4 自転軌道共鳴

惑星の軌道運動とそれに伴う衛星の四重極子モーメントの間の重力相互作用の結果、衛星の回転速度に小さくて短周期な振動が生じるが、通常はその影響は少ない。しかしながら、この場合には当てはまらない状況がある。これらの状況は、衛星の自転周期と公転周期の関係が単に整数関係もしくは整数関係に近いような場合に生じ、このような場合には、重大な自転軌道結合がある。後の話は、Goldreich & Peale(1966, 1968) や、Wisdom, Peale & Mignard(1984), また、Wisdom(1987a, b) の先駆的なものに基づいている。

回転軸が固定された楕円軌道平面に垂直な、小さな衛星の運動について考える。衛星軌道の主軸をとることができる二体の場合のケプラー系で、衛星の長軸が慣性空間に固定されたひとつの基準軸と角度 θ をなすとする。衛星の長軸は衛星惑星間のラインと角度 ψ をなす。したがって

$$\psi = f - \theta \quad (\text{A.55})$$

ここで f は真近点離角である (図 5.8 参照)。潮汐トルクを考えなければ θ に関する運動方程式は (式 (5.49) 参照)

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad (\text{A.56})$$

r と ψ は非線形関数の f と共に変化するので、この方程式は積分できない。しかしながら、自転速度 $\dot{\theta}$ が平均運動 n と整数比になっている今興味があるこれらのような場合、近似であるにもかかわらず便利でなおかつ積分できる運動方程式を導くことができる。

今 $\dot{\theta}$ が平均運動の有理数倍であるような、このような場合に興味を持つるのでよって新しい変数を導入する。

$$\gamma = \theta - pM \quad (\text{A.57})$$

ここで p は有理数で M は平均近点離角である。 n を一定とし、 $\dot{\theta} = \dot{\gamma}$ とすると、 γ に関する運動方程式は次のように書ける (式 (5.56) 参照)。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \left(\frac{B - A}{C} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = 0 \quad (\text{A.58})$$

この方程式は e, M についてフーリエに似たポワソン級数に展開することができ、 M は標準式 $(a/r)^3$, $\sin f$, $\cos f$ を使って表すことができる (2.5 節参照)。すべての $\mathcal{O}(e^2)$ の項も含めると

$$\sin f = \left(1 - \frac{7}{8}e^2 \right) \sin M + e \sin 2M + \frac{9}{8}e^2 \sin 3M \quad (\text{A.59})$$

$$\cos f = \left(1 - \frac{9}{8}e^2 \right) \cos M + e (\cos 2M - 1) + \frac{9}{8}e^2 \cos 3M \quad (\text{A.60})$$

$$\left(\frac{a}{r} \right)^3 = 1 + 3e \cos M + \frac{3}{2}e^2 (1 + 3 \cos 2M) \quad (\text{A.61})$$

を得る。ここで次のように書ける。

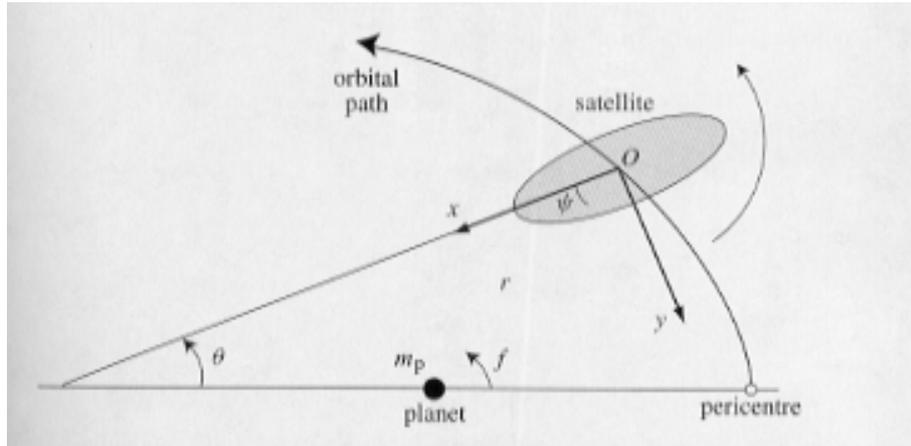


図 A.8: 衛星の長軸は、慣性空間に固定されているひとつの関連する軸と角度 θ をなす. その軸は、衛星の固定軌道の主軸にとる.

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma + 2pM - 2f) &= \sin 2\gamma (\cos 2pM \cos 2f + \sin 2pM \sin 2f) \\ &+ \cos 2\gamma (\sin 2pM \cos 2f - \cos 2pM \sin 2f) \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

したがって

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = [S_1 + S_2] \sin 2\gamma + [S_3 - S_4] \cos 2\gamma \quad (\text{A.63})$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2pM \cos 2f & S_2 &= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2pM \sin 2f \\ S_3 &= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2pM \cos 2f & S_4 &= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2pM \sin 2f \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$\mathcal{O}(e^2)$ の項までとると、 S_i は次で与えられる.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} [\cos 2(1-p)M + \cos 2(1+p)M] \\ &+ \frac{1}{4} e [7 \cos(3+2p)M + 7 \cos(3-2p)M \\ &\quad - \cos(1+2p)M - \cos(1-2p)M] \\ &+ \frac{1}{4} e^2 [-5 \cos 2(1+p)M - 5 \cos 2(1-p)M \\ &\quad + 17 \cos 2(2+p)M + 17 \cos 2(2-p)M] \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} [\cos 2(1-p)M - \cos 2(1+p)M] \\ &+ \frac{1}{4} e [-7 \cos(3+2p)M + 7 \cos(3-2p)M \\ &\quad - \cos(1-2p)M + \cos(1+2p)M] \\ &+ \frac{1}{4} e^2 [5 \cos 2(1+p)M - 5 \cos 2(1-p)M \\ &\quad - 17 \cos 2(2+p)M + 17 \cos 2(2-p)M] \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = & \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M - \sin 2(1-p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e[7 \sin(3+2p)M - 7 \sin(3-2p)M \\
 & \quad + \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e^2[-5 \sin 2(1+p)M + 5 \sin 2(1-p)M \\
 & \quad + 17 \sin 2(2+p)M - 17 \sin 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{A.67}$$

$$\begin{aligned}
 S_4 = & \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M + \sin 2(1-p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e[7 \sin(3+2p)M + 7 \sin(3-2p)M \\
 & \quad - \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
 & + \frac{1}{4}e^2[-5 \sin 2(1+p)M - 5 \sin 2(1-p)M \\
 & \quad + 17 \sin 2(2+p)M + 17 \sin 2(2-p)M]
 \end{aligned} \tag{A.68}$$

したがって、 γ に関する運動方程式、式 (5.58) は次のように書ける。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3(B-A)}{2C}n^2 ([S_1 + S_2] \sin 2\gamma + [S_3 - S_4] \cos 2\gamma) = 0 \tag{A.69}$$

S_3, S_4 が正弦しか含まない一方、 S_1, S_2 が余弦だけを含むことに注目する。方程式は正確であるが、 S_i は e と M について無限級数なので、したがってこの方程式は積分できない。先に進むには近似に頼らなければならない。

もし衛星の自転速度が自転軌道共鳴に近いとすれば、 $\dot{\theta} \approx pn$ となり、 γ ($\dot{\gamma} \ll n$) はゆっくりと変化する。そして、 γ が固定された状態の間に、式 (5.69) のすべての項を一周期にわたって平均することによって、近似運動方程式を与えることができる。よって次の式を得る。

$$\ddot{\gamma} + \frac{3(B-A)}{2C}n^2 (\langle [S_1] + \langle S_2 \rangle \rangle \sin 2\gamma + [\langle S_3 \rangle - \langle S_4 \rangle] \cos 2\gamma) = 0 \tag{A.70}$$

ここで

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_i dM \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{A.71}$$

そして、ここでの γ は平均値を表していると理解されている。 S_i はこの考察の下での特定の自転軌道共鳴に対応する有理数 p の特定の値について求められなければならない。 M の整数倍の角度を持つ正弦と余弦は一軌道周期にわたって平均するとゼロになるので、よって運動方程式にゼロでない寄与をしている S_i の唯一の項は、それらの角度ゼロの余弦の項である。例えば $p = 1$ の同期状態の場合は、因子として $p - 1$ を含む角度の項だけが平均運動方程式に寄与する。式 (5.65) から式 (5.68) を調べると、この場合には $\mathcal{O}(e^2)$ でそろえると、次の式を得る。

$$(\langle [S_1] + \langle S_2 \rangle \rangle \sin 2\gamma + [\langle S_3 \rangle - \langle S_4 \rangle] \cos 2\gamma)_{p=1} = \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \sin 2\gamma \tag{A.72}$$

もし p の他の値についても同じ手順で行えば, 同じ方程式 (もしくは e について高次の項を含む同等の集合) を調べると, 唯一 $1/2$ の整数倍の p の値が平均運動方程式に寄与できる. それらの場合は次のように書けて

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \frac{(B-A)}{C} H(p, e) \sin 2\gamma = 0 \quad (\text{A.73})$$

ここで, 例えば $\mathcal{O}(e^4)$ の項にそろえると

$$H(-1, e) = +\frac{1}{24}e^4 \quad (\text{A.74})$$

$$H(-1/2, e) = +\frac{1}{48}e^3 \quad (\text{A.75})$$

$$H(0, e) = 0 \quad (\text{A.76})$$

$$H(+1/2, e) = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3 \quad (\text{A.77})$$

$$H(+1, e) = +1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 \quad (\text{A.78})$$

$$H(+3/2, e) = +\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \quad (\text{A.79})$$

$$H(+2, e) = +\frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 \quad (\text{A.80})$$

$$H(+5/2, e) = +\frac{845}{48}e^3 \quad (\text{A.81})$$

$$H(+3, e) = +\frac{533}{16}e^4 \quad (\text{A.82})$$

Kaula(1966) で定義されている離心率関数 $G_{lpq}(e)$ について調べると

$$H(p, e) = G_{20(2p-2)}(e) \quad (\text{A.83})$$

そして $p = 0$ の場合を除けば $H(p, e) = \mathcal{O}(e^{2|p-1|})$ である.

したがって近似値を導入すると, 式 (5.56) の完全運動方程式を振り子の方程式のように整理して, 次のように書くことができる.

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)] \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin 2\gamma \quad (\text{A.84})$$

ただしここで

$$\omega_0 = n \left[3 \left(\frac{B-A}{C} \right) |H(p, e)| \right]^{1/2} \quad (\text{A.85})$$

は秤動振動数である. 潮汐トルクが衛星の自転を乱す影響を考えれば, 一周期にわたって平均された平均潮汐トルク $\langle N_s \rangle$ は, 平均の運動方程式に加えて

$$\ddot{\gamma} = -[\text{sign } H(p, e)] \frac{1}{2} \omega_0^2 \sin 2\gamma + \langle N_s \rangle / C \quad (\text{A.86})$$

と書ける. もし

$$|\langle N_s \rangle| / C < \frac{1}{2} \omega_0^2 \quad (\text{A.87})$$

ならば, $\dot{\gamma}$ の符号は周期的に逆にならなければならず, したがって $\langle \theta \rangle = pn$ によって, 衛星は自転軌道共鳴の状態になりうる. もし強さの基準である式 (5.87) を満たすなら, 惑星と衛星の四重極子モーメントの相互作用共鳴による平均トルクは, 衛星の自転周期を変化させる平均潮汐トルクを相殺し, $\langle \dot{\gamma} \rangle = 0$ であり, γ は次式で与えられる平衡値 γ_0 の周りを秤動する.

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\frac{2\langle N_s \rangle}{-[\text{sign } H(p, e)]\omega_0^2 \mathcal{C}} \right] \quad (\text{A.88})$$

衛星の平衡方向と γ_0 の符号は, $H(p, e)$ の符号で決まる. γ が γ_0 からの小さく移動すると, $\dot{\gamma}$ の符号は γ を γ_0 に戻すために平衡移動するようなものにならなければならない. もし平均トルクが共鳴トルクと比較して弱く,

$$|\langle N_s \rangle|/\mathcal{C} \ll \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (\text{A.89})$$

ならば, $H(p, e) > 0$ で $\gamma_0 \approx 0$ もしくは π のとき, 近点を通る衛星の通路で衛星の長軸は惑星の方を向く. 逆にもし $H(p, e) < 0$ で $\gamma_0 \approx \pi/2$ もしくは $3\pi/2$ ならば, 近点で衛星の長軸は惑星衛星間のラインに垂直な方向を向く.

今水星の公転を考え, 平均運動方程式の物理的解釈を簡単に与える. 水星の場合は特に興味がある. なぜなら, 惑星が太陽と, 最初に調べられた自転軌道共鳴の予期された 1:1 の同期状態よりむしろ, 3:2 の自転軌道共鳴にとらわれているとレーダー観測によって明らかにされているからである. これらのことを与えるうまい歴史は Goldreich & Peale(1968) によって与えられている. 水星の慣性座標系での自転と軌道運動は, 図 5.2 に書かれている.

惑星の自転周期は 58.65 日で, 軌道周期は $87.97 = 1.5 * 58.65$ 日である. したがって惑星は, 太陽を 2 回転する間に軸が 3 回転する. そして水星が近日点を通過する通路で, 惑星の反対側の面は太陽と向き合う. 角 γ の物理的な意味は, 衛星が近日点を通過するときの衛星の長軸の方向で, $M = 0$ のときに評価されるスナップショット角 (stroboscopic angle) である. $H(p, e) \approx +(7/2)e > 0$ が与えられると, γ は振幅が $< \pi/2$ で平衡値 $\gamma \approx 0$ の周りで秤動すると予想され, 近日点で惑星の長軸は太陽の方向を向く (図 5.10). もし水星が $H(p, e) < 0$ の $p = +1/2$ の共鳴に捕われたとすれば, 惑星の方向は図 5.11 のようになると予想できる.

図 5.10a は, 水星を中心とする平均共鳴自転速度 $(3/2)n$ で回転している座標系での太陽の運動である. ここでの n は水星の平均運動である. 輪になっている通り道上の点は, 等時間間隔の太陽の場所である. この回転座標系の太陽の通り道は, 自転軌道共鳴状態なので閉じていて, そのことは今まで使ってきた平均する方法を正当なものと認める決定的な事実である. 惑星の四重極子モーメントと太陽のあいだの平均重力相互作用は, それぞれの場所での線密度が太陽が通過するときの各部分に費やす時間に比例するような, この閉じた道筋に沿って太陽の質量をばら撒くことでモデル化できる. 線密度は図 5.10a の点の間隔に反比例している. 角 γ は今, 図 5.10a の回転座標系での惑星の長軸の惑星近日点方向からのずれであると解釈できる. この図の対称性から, さらに重力相互作用は図 5.10b のように

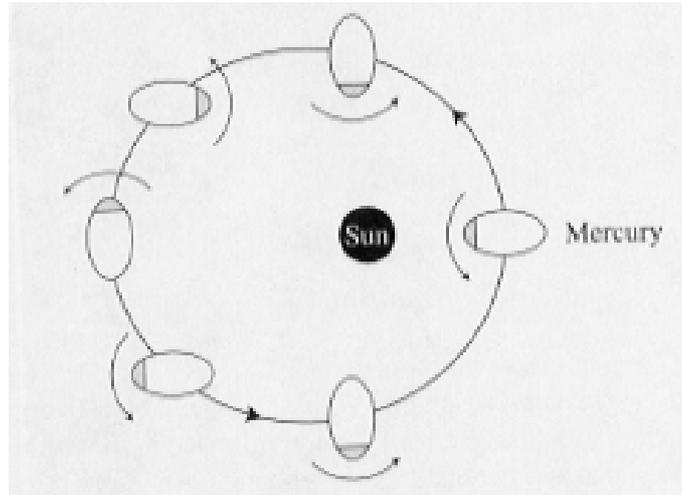


図 A.9: 太陽が中心の慣性座標系で, 水星は一軌道周期あたり $3/2$ 回転で完結している.

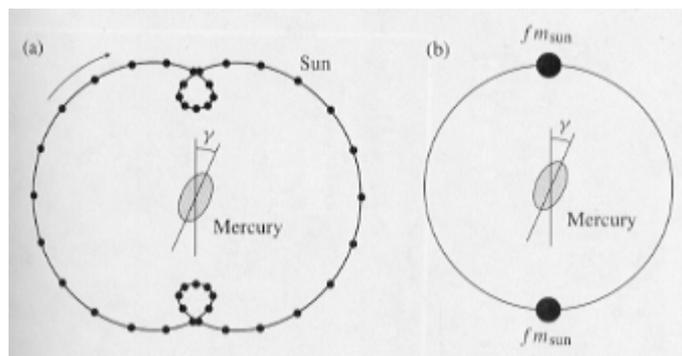


図 A.10: (a) 水星が中心で水星の共鳴自転速度 $(3/2)n$ (ここで n は水星の平均運動) で回転する座標系で太陽の運動このように見える. 水星の四重極子モーメントと太陽との重力相互作用は, 通路の一部 (閉じた通路での点は, 等時間間隔で太陽が連続で位置している場所である) に費やす時間に比例した短い区間の線密度を持つ, 閉じた通路に沿って広がっている太陽の質量分布, もしくは (b) に描かれているような, 二つの質点 fm_{sun} によって書くことができる. ここで $f = (1/2)H(3/2, e)$ である.

置かれる正の二つの質点のトルクに寄与しないような同一の線密度の環状分布を持つ, 太陽の質量分布に置き換えたものによって書くことができると推論できる. ここで

$$f = \frac{1}{2}H(p, e) \approx \frac{7}{4}e \tag{A.90}$$

そして, m_{sun} は太陽の質量である.

図 5.11 で見られるような, 公転している座標での閉じた軌道は, 自転軌道結合に必要なものは十分な条件ではない. 式 (5.65) と (5.56) より, p は (衛星の重力ポテンシャルの二重対称によって決められるような) $1/2$ の整数倍でなければならない. p の他の値は

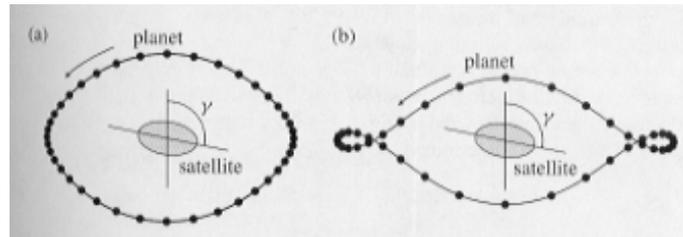


図 A.11: $p = +1/2$ の共鳴に捕われた衛星の概要は, 衛星が近点を通過するときの通路での衛星の長軸が惑星衛星間ラインに垂直な方向を向くような, 変則的なものである.

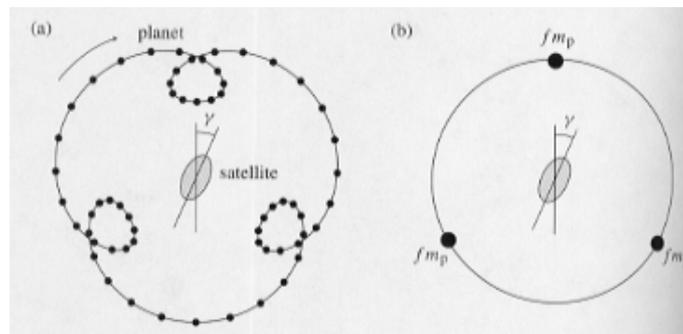


図 A.12: (a) 衛星が中心で衛星の平均自転速度 (この場合は $(4/3)n$ で n は衛星の平均運動) で回転する惑星の軌道. 衛星の四重極子モーメントによって惑星に働く重力によるトルクは, この回転座標系での惑星の輪の軌道を, (b) のように三つの質点を加えた質量の環状分布に置き換えることでモデル化できる.

共鳴相互作用には寄与しない. 図 5.12 の惑星の運動は, 衛星を中心とした衛星の平均公転速度 (この場合では $(4/3)n$ で, n は衛星の平均運動) で回転する座標でのものである. 図 5.12a の閉じた軌道の形から, この場合惑星の平均重力は, 環状の質量分布と等しい三つの質点で輪になった軌道の移動によってモデル化できる (図 5.12b 参照). ここで図 5.10b と図 5.12b の形状を比較する. 図 5.10b で, もし $N \sin 2\gamma$ があるひとつの質点によって衛星に働くトルクなら, 平衡な状態に戻すために衛星に働く総トルクは $2N \sin 2\gamma$ である. しかしながら, $p = 4/3$ である図 5.12b のように描かれている場合には, γ を変化させるために働く総トルクは

$$N \sin 2\gamma + N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - N \sin 2\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) = 0 \quad (\text{A.91})$$

によって決められ, 系は中立的に安定している.

$p = 0$ の特別な場合には, 図 5.13 のようになる. 質量要素 δm による衛星のトルク δN は次のようにかける.

$$\delta N = \frac{3}{2}(\mathcal{B} - \mathcal{A}) \frac{G\delta m}{r^3} \sin 2\psi \quad (\text{A.92})$$

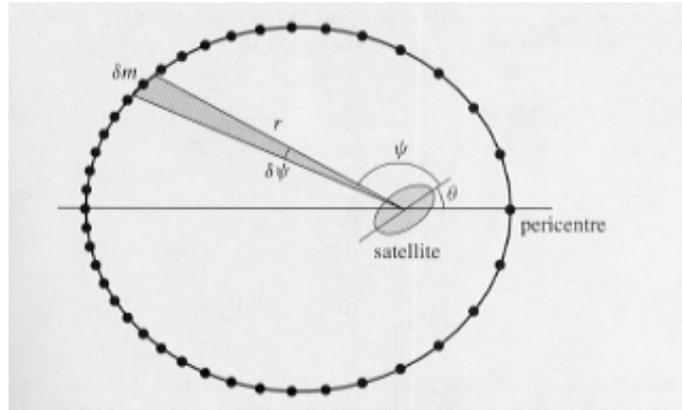


図 A.13: 慣性座標系での衛星を中心とした惑星の軌道. もし $p = 0$ なら衛星の概要は慣性空間に固定されていて, 惑星との共鳴相互作用はない.

p	Mercury $(B - A)/C$	Moon $(B - A)/C$
+3	2×10^{-8}	7×10^{-5}
+5/2	7×10^{-9}	7×10^{-6}
+2	3×10^{-9}	8×10^{-7}
+3/2	2×10^{-9}	10^{-7}
+1	10^{-9}	2×10^{-8}

図 A.14: 月と水星に関する $(B - A)/C$ の臨界値. 水星では $k_2 \approx 0.1$ で $Q = 100$, 月では $k_2 \approx 0.03$ で $Q = 27$ と想定している (Yoder, 1995).

Kepler の法則から

$$\delta m = \frac{r^2 \delta \psi}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \quad (\text{A.93})$$

を得る. したがって衛星の総トルクは

$$N = \frac{3(B - A)G}{4\pi a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [1 + e \cos(\psi + \theta)] \sin 2\psi \, d\psi \quad (\text{A.94})$$

で与えられ, また慣性空間では衛星は回転しないので θ は固定されていて, 積分はゼロである.

特定の自転軌道共鳴に捕われている衛星において, 共鳴による衛星のトルクは潮汐引きずりを超えるものでなければならない. 式 (5.87) と (5.2) の強さの基準から, $(B - A)/C$ が

$$\left(\frac{B - A}{C}\right)_{critical} = \frac{5 k_2}{2 Q} \left(\frac{R_s}{a}\right) \frac{m_p}{m_s} \frac{1}{|H(p, e)|} \quad (\text{A.95})$$

で与えられる臨界値を超えるものでなければならぬと計算できる。ここで m_p は主天体の質量で、 $C \approx (2/5)m_s R_s^2$ とみなすことができる。太陽と水星、地球と月での系では自転軌道共鳴の級数による $(B - A)/C$ の臨界値は表 5.1 に一覧にしている。月と水星の軌道離心率はそれぞれ、0.00549 と 0.206 で、月に関しては $(B - A)/C \approx 2.28 \times 10^{-4}$ (Yoder, 1995), そして、水星の $(B - A)/C$ がそれに匹敵するものであると考えるのは理にかなったものである。表 5.1 を調べると、確かに、水星のもしくは月の現在の自転軌道状態の復元力で、問題はない。しかしながら、もしこれらの物体の両方とも自転が潮汐によってブレーキがかかり、最初の軌道周期が短かったとすれば、これらの物体がどのように現在の自転軌道状態に捕われたのかだけでなく、どのようにたくさんの他の強力な共鳴に捕われることなく進化することができたのかをぜひ知る必要がある。

B 慣性モーメントとオイラーの運動方程式

B.1 角運動量に対する方程式

質点の運動方程式は

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (\text{B.1})$$

である. この式を回転の運動方程式に変えるには, \mathbf{F} を $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ のように変えたい. そこで, 両辺に \mathbf{r} を左から掛けると, 次のようになる.

$$\mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{B.2})$$

合成関数の微分の公式から,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{B.3})$$

となり, ここで

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (\text{B.4})$$

を導入すると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (\text{B.5})$$

を得る.

B.2 固定点をもつ剛体の回転

剛体の一点 O が空間に固定され, 剛体はその回りで運動する場合を考える. このような点を固定点という. 剛体の運動は, 重心の運動と重心の回りの運動とに分けることができるので, 後者のみを扱う場合には重心を固定点と考えればよい. 今は点 O は, 剛体中の任意の点であってよいとする.

空間に固定された座標系を x, y, z とし, 剛体の回転を記述する角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とする. また剛体に固定された座標系を x', y', z' とする. 点 O の, 回りにもつ剛体の全角運動量 \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = \sum_l m_l (\mathbf{r}_l \times \dot{\mathbf{r}}_l) \quad (\text{B.6})$$

と表される. \mathbf{r}_l は剛体とともに回転するので, $\dot{\mathbf{r}}_l = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_l$ が成り立つ. よって \mathbf{L} は,

$$\mathbf{L} = \sum_l m_l [\mathbf{r}_l \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_l)] \quad (\text{B.7})$$

となる. ここで x', y', z' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ とし, \mathbf{r}_l を

$$\mathbf{r}_l = x'_l \mathbf{i}' + y'_l \mathbf{j}' + z'_l \mathbf{k}' \quad (\text{B.8})$$

と書く. 式 (1.7) の x' 成分をとると

$$\begin{aligned}
 L_{x'} &= \sum_l m_l [y'_l (\omega \times \mathbf{r}_l)_{z'} - z'_l (\omega \times \mathbf{r}_l)_{y'}] \\
 &= \sum_l m_l [y'_l (\omega_{x'} y'_l - \omega_{y'} x'_l) - z'_l (\omega_{z'} x'_l - \omega_{x'} z'_l)] \\
 &= \sum_l m_l (y_l'^2 + z_l'^2) \omega_{x'} - \sum_l m_l x'_l y'_l \omega_{y'} - \sum_l m_l x'_l z'_l \omega_{z'}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

が得られる. y'_l, z'_l も同様で, 結果を行列の式に表すと

$$\begin{pmatrix} L_{x'} \\ L_{y'} \\ L_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

となる. ただしここで

$$\begin{aligned}
 I_{x'x'} &= \sum_l m_l (y_l'^2 + z_l'^2) \\
 I_{y'y'} &= \sum_l m_l (z_l'^2 + x_l'^2) \\
 I_{z'z'} &= \sum_l m_l (x_l'^2 + y_l'^2)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

は慣性モーメントで, また

$$\begin{aligned}
 I_{x'y'} &= \sum_l m_l x'_l y'_l \\
 I_{y'z'} &= \sum_l m_l y'_l z'_l \\
 I_{z'x'} &= \sum_l m_l z'_l x'_l
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

であり, これらの量を慣性乗積という. 上の式から慣性乗積は, 例えば $I_{x'y'} = I_{y'x'}$ といった対称性が成り立つ. 式 (1.10) 中の 3 行 3 列の行列を I と書き, I を慣性テンソルという.

B.3 主慣性モーメント

これまでは x', y', z' 軸は任意であるとしてきたが, 次からは式 (1.10) を簡単化するためにこれらの軸を適当に選んでみる. ここで慣性テンソル I を

$$I = I_0 E - I' \tag{B.13}$$

と表す. ただし

$$I_0 = \sum_l m_l (x_l'^2 + y_l'^2 + z_l'^2) \tag{B.14}$$

で、 E は 3 行 3 列の単位行列、また I' は次式で定義される。

$$I' = \begin{pmatrix} \sum_l m_l x_l'^2 & \sum_l m_l x_l' y_l' & \sum_l m_l x_l' z_l' \\ \sum_l m_l y_l' x_l' & \sum_l m_l y_l'^2 & \sum_l m_l y_l' z_l' \\ \sum_l m_l z_l' x_l' & \sum_l m_l z_l' y_l' & \sum_l m_l z_l'^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

x', y', z' 軸の代わりに x'', y'', z'' 軸を選んだとすれば、上の議論で $'$ を $''$ で置き換えればよい。この座標変換に対し、 $x_l'^2 + y_l'^2 + z_l'^2$ は変わらないので、式 (1.13) の右辺第一項は不変である。一方 x'', y'', z'' の座標系で考えると、 I' に相当する量は式 (1.15) 中の $'$ を $''$ で置き換えた I'' で与えられる。 I'' と I' の関係を調べるため

$$|\mathbf{r}_l'\rangle = \begin{pmatrix} x_l' \\ y_l' \\ z_l' \end{pmatrix} \quad \langle \mathbf{r}_l'| = (x_l', y_l', z_l') \quad (\text{B.16})$$

という列ベクトルと行ベクトルを導入し、同じようにして $'$ を $''$ で置き換えた $|\mathbf{r}_l''\rangle, \langle \mathbf{r}_l''|$ を考える。 x', y', z' から x'', y'', z'' への座標変換は、このようなベクトルに対して

$$|\mathbf{r}_l''\rangle = T|\mathbf{r}_l'\rangle, \quad \langle \mathbf{r}_l''| = \langle \mathbf{r}_l'|T^{-1} \quad (\text{B.17})$$

の関係が成り立つことを意味する。ここで T は座標変換に対応する適当な 3 行 3 列の行列で直行行列である。式 (1.15) の I' は

$$I' = \sum_l m_l |\mathbf{r}_l'\rangle \langle \mathbf{r}_l'| \quad (\text{B.18})$$

と書ける。同様に I'' は

$$I'' = \sum_l m_l |\mathbf{r}_l''\rangle \langle \mathbf{r}_l''| \quad (\text{B.19})$$

と書ける。式 (1.17) を使うと

$$I'' = T I' T^{-1} \quad (\text{B.20})$$

となる。式 (1.15) からわかるように、 I' は対称な行列である。よって、式 (1.20) のように対角化され、式 (1.13) より慣性テンソル I は

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

という形になることがわかった。この場合の I_1, I_2, I_3 を主慣性モーメント、座標軸の方向を慣性主軸という。以後、この慣性主軸を 1, 2, 3 と表す。各慣性主軸の成分を書くと、式 (1.10) は

$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2 \quad L_3 = I_3 \omega_3 \quad (\text{B.22})$$

と表される。

B.4 剛体に対する運動方程式

剛体に対する運動方程式を導くため、剛体に固定された座標軸は慣性主軸であるとし、 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ の関係を考察する。慣性主軸方向の単位ベクトルを前回と同様 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ とし、 \mathbf{L} を

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{i}' + L_2 \mathbf{j}' + L_3 \mathbf{k}' \quad (\text{B.23})$$

と書く。この式を時間微分すると

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}_1 \mathbf{i}' + \dot{L}_2 \mathbf{j}' + \dot{L}_3 \mathbf{k}' + L_1 \dot{\mathbf{i}}' + L_2 \dot{\mathbf{j}}' + L_3 \dot{\mathbf{k}}' \quad (\text{B.24})$$

となる。 I_1, I_2, I_3 が時間に依存しないので、式 (1.22) の時間微分を代入し、 $\dot{\mathbf{i}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'$ などの関係を利用すると

$$\dot{\mathbf{L}} = I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{i}' + I_2 \dot{\omega}_2 \mathbf{j}' + I_3 \dot{\omega}_3 \mathbf{k}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \quad (\text{B.25})$$

この式の各軸方向の成分をとると

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = N_1 \quad (\text{B.26})$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = N_2 \quad (\text{B.27})$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3 \quad (\text{B.28})$$

が得られる。これをオイラーの運動方程式という。

謝辞

本論文の作成にあたり、非常に多くの方々のご助言及びご指導を賜りました。特に、北海道大学 倉本 圭 助教授には、些細な質問にも丁寧にご指導いただきました。心から感謝します。

また、惑星物理学研究室及び地球流体力学研究室と友人知人の皆様には日頃からご助言、激励いただきました。併せて感謝致します。

参考文献

- [1] 阿部 龍蔵, 1994: 力学・解析力学, 岩波基礎物理シリーズ 1, 岩波書店, 111-176
- [2] Cauchy, A. L., 1827: Sur les moments d'inertia, *Exercice de Mathematiques*, 2, 93-103
- [3] Darwin, G. H., 1908: Tidal friction and cosmogony, in *scientific paper*, 2, Cambridge University Press, Cambridge
- [4] Geissler, P. E., Greenberg, R., Hoppa, G., Helfenstein, P., McEwen, A., Pappalardo, R., Tufts, R., Ockert-Bell, M., Sullivan, R., Greeley, R., Belton, M. J. S., Denk, T., Clark, B., Burns, J., Veverka, J., and the Galileo Imaging Team, 1998: Evidence for non-synchronous rotation of Europa, *nature*, 391, 368-370
- [5] Goldreich, P., 1966: Final spin states of planets and satellites, *Astron.J.*, 71, 1-7
- [6] goldreich, P. and Peale, S. J., 1966: Spin-orbit coupling in the solar system, *Astron.J.*, 71, 425-438
- [7] 橋本 淳一郎, 2002: 単位が取れる力学ノート, 講談社
- [8] Houghton, S., 1855: On the rotation of a solid body round a fixed point; being an account of the rate Professor MacCullagh's lectures on that subject, *Trans.Royal Irish Academy*, 22, 139-154
- [9] Kaula, W. M., 1966: *Theory of Sitellite Geodesy*, Blaisdell, Waltham, MA
- [10] MacCullagh, J., 1844: *Proc.Rpyal Irish Academy*, 2, 520-526, 542-545
- [11] MacDinald, G. J. F., 1964: Tidal friction, *Rev.Geophys.*, 2, 467-541
- [12] Macmillan, W. D., 1936: *Dynamics of Rigid Bodies*, McGraw-Hill, New York
- [13] 三宅 敏恒, 1992: 入門微分積分, 倍風館
- [14] Murray, C. D. and Dermott, S. F., 1999: *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press
- [15] Ramsey, A. S., 1937: *Dynamics. Part 2*, Cambridge University Press, Cambridge
- [16] Ramsey, A. S., 1940: *An Introduction to the Theory of Newtonian Attraction*, Cambridge University Press, Cambridge
- [17] 内田 伏一, 高木 斉, 剣持 勝衛, 浦川 肇, 1988: 線形代数入門, 裳華房, 152-170
- [18] Wisdom, J., 1987: Urey Prize Lecture: Chaotic dynamics in the solar system, *Icarus*, 72, 241-275

-
- [19] Wisdom, J., 1987: Chaotic behaviour in the solar system, *Proc. Lodon. A* , 413, 109-129
- [20] Wisdom, J., Peale, S. J., and Mignard, S., 1984: The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus* , 58, 137-152
- [21] Yoder, C. F., 1995: Astrometric and geodetic properties of Earth and the solar system, in *Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants*, ed. T. Ahrens, American Geophysical Union, Washington