

潮汐と自転による天体の変形および
それを用いた衛星の内部構造の推定について

Tidal and Rotational Deformation of a Celestial Body
and its Implication to
the Estimation of Internal Structures of Satellites

樋山 克明

Katsuaki Hiyama

北海道大学理学部 地球科学科
太陽系物理学グループ

2004/01/30

要旨

本論文は Murray and Dermott (1999): *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press の中の、天体における潮汐と自転による変形と、それによる衛星の内部構造の推定方法について論じた4節 Tides, Rotation, and Shapes 4.1~4.7のレビューである。衛星の内部構造を理解するための方法を学ぶために、他の天体から受ける潮汐と自らの自転による変形から衛星の内部構造の推定するまでの流れをまとめた。また同書 4.1~4.7節の全訳を巻末に沿える。

ある天体において、潮汐は他の天体によって働く重力の地理的な違いによって引き起こされる。例えば、衛星を持つ惑星を考えると、惑星の衛星に面している側の面に働く重力は衛星から遠い側の面に働く重力より大きい。太陽系を形作っている天体は剛体ではないので、天体には潮汐バルジ(潮汐によるふくらみ)が生じる。

天体は自らの自転によっても変形し、遠心力により極がつぶれた形になる。変形の程度は偏平率によって表される。この自転変形には潮汐変形の解析結果が直接適用できる。

天体の変形の大きさは内部の密度分布に依存して変化する。このことから、変形の大きさを測定することによって、内部構造を推定することができる。2種類の方法について述べる。1つ目は重力場のデータから Darwin-Radau relation によって慣性能率を求める方法。2つ目は同期自転する太陽系の衛星における三軸楕円体の形状の測定による方法である。

木星のガリレオ衛星は、1990年代後半ガリレオ探査機によって得られたデータにより、内部構造についての理解が進んだ。今後の惑星探査計画によって新たなデータがそろい、内部構造の理解も進んでいくことが期待される。

目次

1	はじめに	1
1.1	目的	1
1.2	本論文の構成	1
2	潮汐による変形	4
2.1	潮汐とは	4
2.2	潮汐力	4
2.3	潮汐ポテンシャル	6
2.4	潮汐変形	8
3	自転による変形	11
3.1	天体の自転	11
3.2	自転による遠心力	12
3.3	遠心ポテンシャル	12
3.4	自転変形	12
4	変形による内部構造の推定	16
4.1	内部構造の制約条件	16
4.2	Darwin-Radau relation による内部構造の推定	18
4.2.1	Darwin-Radau relation	18
4.2.2	核 - マントルモデルにおける慣性能率の制約	18
4.3	同期自転する衛星の内部構造の推定	20
4.3.1	同期自転する衛星の変形	20
4.3.2	衛星の形状を用いた内部構造の推定	22
4.3.3	同期自転する衛星の重力ポテンシャル	23
5	衛星の内部構造モデル	25
5.1	木星のガリレオ衛星	25
5.1.1	ガリレオ探査機による測定	25
5.1.2	ガリレオ衛星の内部構造モデル	25
5.2	土星の衛星	27
6	まとめ	28
	参考文献	29

A 全訳	31
A.1 はじめに	31
A.2 潮汐バルジ	31
A.3 ポテンシャル理論	36
A.4 潮汐による変形	41
A.5 自転による変形	49
A.6 Darwin-Radau Relation	53
A.7 衛星の形と内部構造	56
謝辞	60

1 はじめに

1.1 目的

衛星の内部構造を知ることが、衛星自体にとどまらず、その母惑星と衛星系の進化、さらには太陽系の起源と進化の理解につながる。濃い大気をもつ土星の衛星のタイタンや、木星の衛星で火山活動のあるイオ、氷の地殻の下に液体の水の存在が予測されるエウロパなど、そのシステムとの比較から、地球のシステムの理解も進むと考えられる。

惑星や衛星の内部構造の推定には、その利用できる観測情報の種類によっていくつかの方法がある。もっとも直接的な方法は地震波を用いる方法だが、この種の観測が行われているのは地球と月のみである。探査機によって得られる観測情報は限られたものであるため、他の惑星や衛星の内部構造の推定は、より間接的な方法に頼らざるを得ない。

惑星探査が進んだ現在での観測情報には、形状、重力場、磁場、地殻物質の組成、大気組成などがある。本論文では、重力場を用いた方法と、形状を用いた方法の、2種類の内部構造の推定方法について議論する。今後の惑星探査によってこれらのデータが得られ、内部構造の理解が進むことが期待されるからである。

1.2 本論文の構成

本論文は Murray and Dermott (1999): *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press (以下 MD1999) の中の、天体における潮汐と自転による変形、それによる衛星の内部構造の推定を論じた4節 Tides, Rotation, and Shapes 4.1~4.7 のレビューである。衛星の内部構造を理解するための方法を学ぶために、他の天体から受ける潮汐と自らの自転による変形から衛星の内部構造の推定するまでの流れをまとめた。また同書 4.1~4.7 節の全訳を巻末に沿える。詳細な計算過程等はそちらを参照されたい。

本論分の構成を紹介するにあたり、衛星の内部構造を推定する流れをつかむため、2つの方法について以下にそのチャートを示す。

重力場の解析と Darwin-Radau relation を用いた方法

潮汐による変形 (2 節) + 自転による変形 (3 節)

||

天体の変形

重力場が変化

解析により J_2 (自転変形における内部の質量分布の影響) を得る

Darwin-Radau relation を用いて慣性能率を推定 (4.2 節)

核の密度 (ρ) を仮定

マンツルの密度 (σ),

核と天体の半径比 (A/B) を得る

同期自転する衛星における形状の測定を用いた方法

潮汐による変形 (2 節) + 自転による変形 (3 節)

||

衛星の変形

探査機によって形状を測定

H_h (潮汐変形における内部構造の影響) が求まる (4.3 節)

核の密度 (ρ) を仮定

マンツルの密度 (σ),

核と天体の半径比 (A/B) を得る

太陽系の衛星は潮汐力と自転による力の、両方の影響で変形している。まずこの後の2節で、ある天体が他の天体から受ける潮汐によって起こる変形である潮汐変形について述べる。

3節では、天体の自転による変形である自転変形について述べる。潮汐変形について導かれた解析結果の多くは、自転変形にも直接適用できる。

4節では、内部構造の推定方法について述べる。天体の変形の大きさは内部の密度分布に依存して変化する。このことから、変形の大きさを測定することによって、内部構造を推定することができる。まず内部構造の制約条件を整理したあと、具体的に2種類の方法について述べる。1つ目は重力場のデータから Darwin-Radau relation によって慣性能率を求める方法。2つ目は同期自転する太陽系の衛星における三軸楕円体の形状の測定による方法である。

5節では、以上の理論によって得られる衛星の内部構造モデルを求める。また、そのモデルから得られる各衛星の特徴について述べる。

6節では、以上の理論のまとめと、今後の展望について述べる。

巻末に、MD 1999 4.1 ~ 4.7 節の全訳を沿える。

2 潮汐による変形

2.1 潮汐とは

ある天体において、潮汐は他の天体によって働く重力の地理的な違いによって引き起こされる。例えば、衛星を持つ惑星を考えると、惑星の衛星に面している側の面に働く重力は、衛星から遠い側の面に働く重力より大きい。この惑星の各点で異なる重力と、惑星の中心に働く重力との差が潮汐力である。太陽系を形作っている天体は剛体ではないので、天体には潮汐バルジ (潮汐によるふくらみ) が生じる。

地球には海があるので、潮汐バルジは潮の満ち引きによって観察できる。地球以外の太陽系の天体には海が無く、このような潮汐の大きさの測定は地球以外では不可能である。自転による変形と組み合わせて潮汐変形を見積もることになる。

2.2 潮汐力

質量 m_p の惑星を質量 m_s の衛星が周回する場合を考え、惑星に潮汐力がどのように及ぼされるかを見ていく。惑星と衛星を質点と考えると、2点間に働く万有引力の大きさ $\langle \mathbf{F} \rangle$ は

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \mathcal{G} \frac{m_p m_s}{r^2} \quad (2.1)$$

となる。ここで r は2点間の距離である。惑星と衛星がその共通の重心のまわりに円運動しているとする (図 2.1)。惑星の中心 P_1 の軌道は重心 C_1 を中心とする半径 a_p の円軌道で表されている。

自転を無視すると、惑星を形作る全ての点は、公転運動に伴って大きさと方向が等しい共通の遠心力を受ける。しかし、衛星から受ける引力 \mathbf{F} は各点においてそれぞれ違う (図 2.2)。共通の遠心力は万有引力 $\langle \mathbf{F} \rangle$ に等しく

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \text{遠心力} \neq \mathbf{F} \quad (2.2)$$

となり、惑星を変形させる潮汐力 $\mathbf{F}_{\text{tidal}}$ は次のように定義される。

$$\mathbf{F}_{\text{tidal}} = \mathbf{F} - \langle \mathbf{F} \rangle \quad (2.3)$$

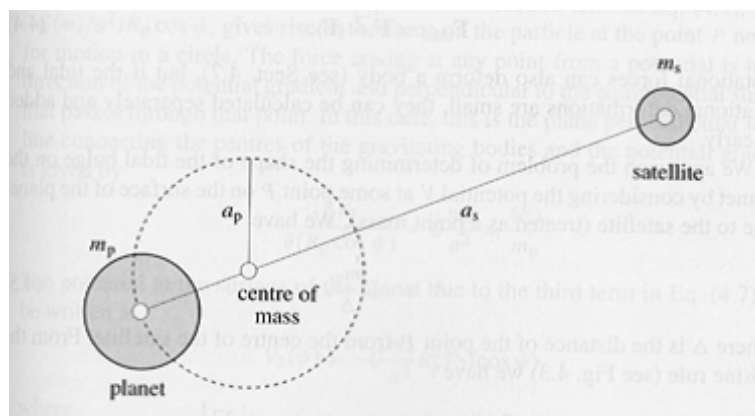


図 2.1: 惑星と衛星はその共通重心を中心に円軌道をとる．重心からとった半長軸はそれぞれ a_p, a_s であり，衛星軌道の惑星からとった半長軸は $a = a_p + a_s$ である．(MD 1999 より)

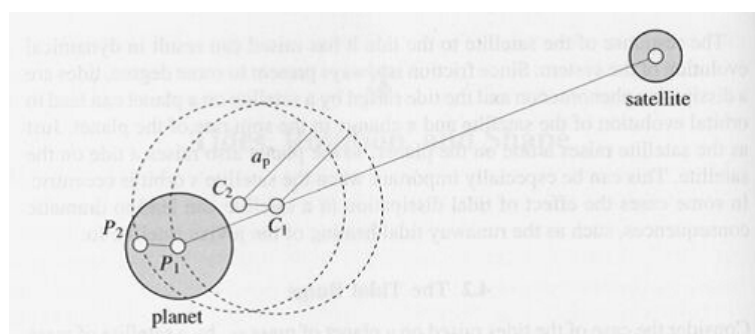


図 2.2: 惑星の全ての点は等しい半径 a_p の円を描くが，中心は異なる． P_1, P_2 はそれぞれ C_1, C_2 を中心とした円を描く．(MD 1999 より)

2.3 潮汐ポテンシャル

潮汐力を記述するポテンシャルを潮汐ポテンシャルという．衛星を持つ惑星の表面の点 P における重力ポテンシャル V について考えてみよう．ここでは衛星は質点として扱う．

$$V = -\mathcal{G} \frac{m_s}{\Delta} \quad (2.4)$$

ここで， Δ は P と衛星の中心との距離である（図 2.3）．余弦定理より

$$\Delta = a \left[1 - 2 \left(\frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

となる．ここで ψ はふたつの天体の中心を結んだ線からとった点 P の余緯度である．ほとんどの場合 $R_p/a \ll 1$ である．例えば，地球の赤道半径は 6,378 km であり，月軌道の半長軸は 384,400 km である．よって，式 (2.5) を式 (2.4) に入れて展開し高次の項を無視すると

$$\begin{aligned} V &= -\mathcal{G} \frac{m_s}{a} \left[1 + \left(\frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) + \dots \right] \\ &\approx V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる．

式 (2.6) の第 1 項， $V_1 = -\mathcal{G}(m_s/a)$ ，は定数であり，点 P の座標についてとった V_1 の勾配はゼロであることからこの項は点 P に何の力も及ぼさない．式 (2.6) の第 2 項， $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi$ ，は点 P にある粒子が円軌道を描くのに必要な力を与え，実際に計算すると

$$-\frac{\partial V_2}{\partial (R_p \cos \psi)} = \mathcal{G} \frac{m_s}{a^2} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} \quad (2.7)$$

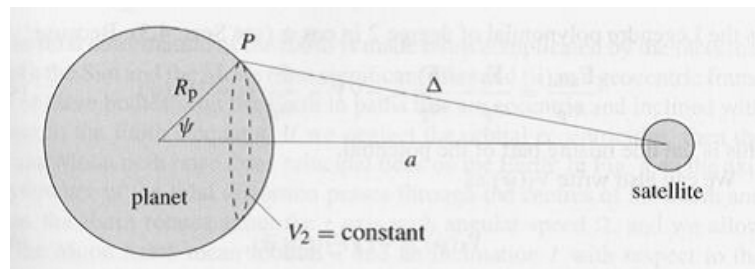


図 2.3: 惑星の半径 R_p ，衛星の半長軸 a ，惑星の表面上の点 P から衛星までの距離 Δ との関係を示す．点線は等ポテンシャル面 $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi = \text{constant}$ を示す．(MD 1999 より)

となる．式 (2.6) の第 3 項による惑星表面のポテンシャルは以下のように書ける．

$$V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (2.8)$$

ここで

$$\mathcal{P}_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) \quad (2.9)$$

は，引き数を $\cos \psi$ とする 2 次のルジャンドル多項式である（巻末，全訳 A.3 節参照）．潮汐力をポテンシャルから導くと

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{tidal}}}{m_p} = \frac{\mathbf{F}}{m_p} - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} = -\nabla V - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} \approx -\nabla V_3(\psi) \quad (2.10)$$

であるので， $V_3(\psi)$ は潮汐を引き起こす潮汐ポテンシャルであるということがわかる．潮汐ポテンシャル $V_3(\psi)$ を整理して

$$V_3(\psi) = \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (2.11)$$

と書くことができる．ここで

$$\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a} \right)^3 R_p \quad (2.12)$$

であり，また，

$$g = \mathcal{G} \frac{m_p}{R_p^2} \quad (2.13)$$

は惑星における，重力加速度，表面重力である． $\zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ は惑星表面の各余緯度 ψ における，平衡潮汐の大きさを表す．平衡潮汐とは，剛体球の惑星を密度ゼロの浅い海が覆う場合に，海に生じる潮汐の大きさである．

式 (2.12) より，地球における太陽と月による潮汐の大きさの比率はどんな場合でも

$$\frac{m_{\text{Sun}}}{m_{\text{Moon}}} \left(\frac{a_{\text{Moon}}}{a_{\text{Sun}}} \right)^3 \approx 0.46 \quad (2.14)$$

となる．月によって地球に起こる平衡潮汐の大きさは $\zeta = 0.36 \text{ m}$ ，一方太陽によって起こる平衡潮汐は $\zeta = 0.16 \text{ m}$ である

また， $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ は $\psi = 0, \pi$ のとき最大であり， $\psi = \pi/2, 3\pi/2$ のときに最小になることに注目すると，地球は 24 時間で 1 回自転するので，このことから月によって地球に満潮と干潮がほぼ 1 日に 2 回起こることがわかる．

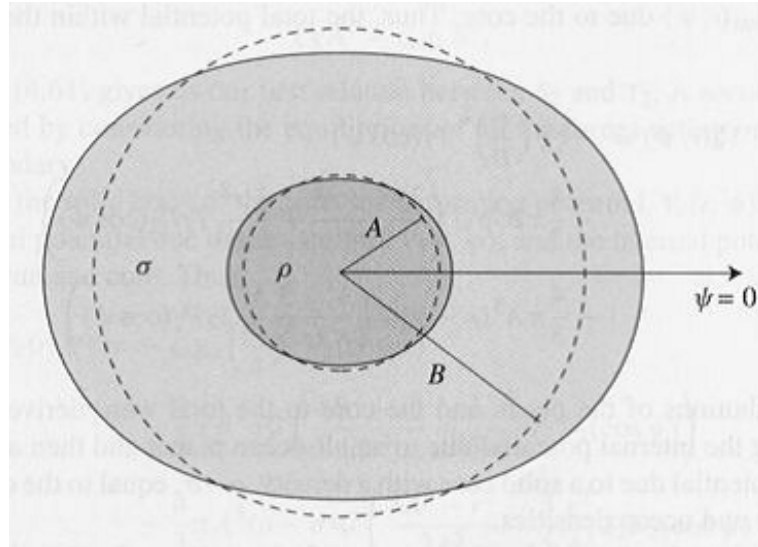


図 2.4: 平均半径 A 、密度 ρ の変形した核と、それを覆う平均半径 B 、密度 σ の変形した海をを持つ惑星のモデル．半径 A 、 B の円は点線で表されている．(MD 1999 より)

2.4 潮汐変形

他の天体により生じる潮汐力により，天体は変形する．この潮汐変形について考えていこう．均質で非圧縮な密度 σ の流体の海と，均質で非圧縮な平均半径 A ，密度 ρ ，剛性率 μ の固体の核から成る平均半径 B の惑星を考える．(図 2.4)．剛性率 μ とはせん断応力下でのせん断ひずみの弾性率であり，ずれ弾性とも呼ばれ，単位ずれを起こすための応力の大きさである．

2.3 節であったように，潮汐ポテンシャルは 2 次のルジャンドル多項式によって記述されるので，惑星の変形もそれによって記述される．また潮汐ポテンシャルは角度 ψ のみ依存し，それぞれ核の境界 (core boundary) R_{cb} と海面 (ocean surface) R_{os} を以下のように表す．

$$R_{cb}(\psi) = A[1 + S_2 P_2(\cos \psi)] \quad (2.15)$$

$$R_{os}(\psi) = B[1 + T_2 P_2(\cos \psi)] \quad (2.16)$$

ここで， S_2 と T_2 はそれぞれ変形の大きさを表す定数である． S_2 と T_2 決めるには S_2 と T_2 の間の関係式が 2 つ必要だが，(i) 静的な海の表面は等ポテンシャル面である条件と (ii) 核の平均境界に生じる全ての力が平衡する条件を用い， S_2 と T_2 の間の関係式を 2 つ求めることができる．

(i) 静的な海面と等ポテンシャル面の一致

まず， S_2 と T_2 の間の関係式の 1 つ目を求める．海面のポテンシャル $V_{os}(r, \psi)$ は，衛

星による潮汐ポテンシャル，海によるポテンシャル，核によるポテンシャルの和である．総ポテンシャルへの海と核の寄与は，海に覆われた惑星による内側のポテンシャルを計算することと，密度 $\rho - \sigma$ (核と海の密度の違いと等しい) の固体の核による外側のポテンシャルを加えることによって得られる．よって， $V_{\text{os}}(r, \psi)$ は以下のように表せる．

$$V_{\text{os}}(r, \psi) = -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) - \frac{4}{3} \pi B^2 \sigma \mathcal{G} \left(1 - \frac{2}{5} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) - \frac{4}{3} \pi \frac{A^3}{B} (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left(1 - T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) + \frac{3}{5} \left(\frac{A}{B} \right)^2 S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \quad (2.17)$$

この式の ψ によらない項は，圧縮力だけを引き起こす．核と海を非圧縮としたから，これらの項は惑星の形を決めるのに何の影響も及ぼさないので，無視できる．また，海面が等ポテンシャル面なので， ψ に依存する項の足し合わせはゼロになる．よって式 (2.17) をポテンシャル $\frac{\mathcal{G} m_p}{B} = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} \rho B^2$ で割って，無次元量で整理すると S_2 と T_2 の間の関係式の1つ目は以下のように求められる．

$$\frac{\zeta_c}{A} = \left[\frac{2\sigma}{5\rho} + \left(\frac{A}{B} \right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \right] T_2 - \frac{3}{5} \left(\frac{A}{B} \right)^5 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) S_2 \quad (2.18)$$

ここで

$$\zeta_c = \frac{m_s}{m_c} \left(\frac{A}{a} \right)^3 A \quad (2.19)$$

であり， m_c は核の質量，そして

$$g_c = \frac{\mathcal{G} m_c}{A^2} \quad (2.20)$$

これは核の境界での重力である． ζ_c は海が動いたときに核の境界に生じる平衡潮汐の大きさであり，式 (2.12) の ζ と以下のような関係を持つ．

$$\zeta g A^2 = \zeta_c g_c B^2 \quad (2.21)$$

式 (2.18) は S_2 と T_2 の間にある1つ目の関係を与える．

(ii) 核の表面における力の平衡

核の平均境界における単位面積に生じる有効な外向きの垂直な力の合計は，核内の弾性力と海と核の潮汐による荷重項の和である．この荷重項の和を $X \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ と書き，ここで

$$X = \frac{2}{5} \rho g_c A \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \left(\frac{5\zeta_c}{2A} - S_2 + \frac{3\sigma}{2\rho} (T_2 - S_2) \right) \quad (2.22)$$

である．Love(1944)によると，この変形圧力による固体核の半径の変化は以下のように表せる．

$$\Delta R(\psi) = \frac{5}{19} \frac{A}{\mu} X \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (2.23)$$

これは式 (2.16) の第 2 項である固体核の半径の変化 $AS_2P_2(\cos \psi)$ と等しくなる．このことにより S_2 と T_2 の間の関係式の 2 つ目は以下のように求められる．

$$S_2 = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \left(\frac{5\zeta_c}{2A} - S_2 + \frac{3\sigma}{2\rho}(T_2 - S_2)\right) \quad (2.24)$$

ここで $\tilde{\mu}$ は固体核の有効剛性率であり，無次元の量で以下のように定義される．

$$\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g_c A} \quad (2.25)$$

これは核の境界における弾性力と重力の比である．

S_2 と T_2 の間の関係式である式 (2.18) と式 (2.24) から S_2 と T_2 をそれぞれ決めることができ，潮汐変形は一般に以下のように書ける．

$$AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}} \quad \text{および} \quad BT_2 = H \frac{5}{2}\zeta \quad (2.26)$$

ここで F は無次元の量で，核の潮汐変形に対する海の影響の大きさを表し，また H は惑星の外形の変形に対する内部構造の影響の大きさを表し，以下のように表現される．

$$F = \frac{(1 + \tilde{\mu})(1 - \sigma/\rho)(1 + 3/2\alpha)}{1 + \tilde{\mu} - \sigma/\rho + (3\sigma/2\rho)(1 - \sigma/\rho) - (9/4\alpha)(A/B)^5(1 - \sigma/\rho)^2} \quad (2.27)$$

$$H = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + \tilde{\mu} + (3/2)(A/B)^2 F \delta}{(1 + \tilde{\mu})(\delta + 2\sigma/5\rho)} \right) \quad (2.28)$$

ここで

$$\alpha = 1 + \frac{5\rho}{2\sigma} \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \quad \text{および} \quad \delta = \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \quad (2.29)$$

であり，また $\langle\rho\rangle$ は平均密度である．惑星が完全に流体なら，もしくは固体核が静水圧平衡状態にあるなら， $\tilde{\mu} = 0$ であり， H の静水値は H_h は以下のように表される．

$$H_h = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right) \quad (2.30)$$

ここで

$$\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho} \quad (2.31)$$

である (Dermott 1979a)．同期自転している衛星における H の静水値 H_h は衛星の内部構造を推定するにあたって重要な制約条件となる．

3 自転による変形

3.1 天体の自転

天体は自転軸を軸に自転している．この効果により天体には遠心力が働き変形がもたらされる．この変形を自転変形と呼ぶ．自転変形した天体の形は極方向が潰れた偏平な回転楕円体となる．自転が速いほど自転変形は大きくなり，約 10 時間で自転する木星は，見た目で見えるほどに偏平している．

2 節では，衛星によって起こる潮汐により，惑星表面がどのように変形するかを見てきた．核とマントルから成る惑星を考えることで，それぞれの変形についての式が得られる．重要なことは，変形した惑星の形 (図 2.4) は惑星と衛星を結ぶ線に沿った半長軸 a ，対称軸 (惑星と衛星を結ぶ線) と垂直に交わる円を描く半短軸 $b = c$ の回転楕円体によって見積もられる，ということである．回転楕円体は，対称軸からとった角度 ψ の 2 次のルジャンドル多項式 $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ を用いて形作られる．自転変形した惑星の形も同様に表すことができることから，自転変形に対しても潮汐変形に対して導かれた解析結果の多くが直接適用できる．

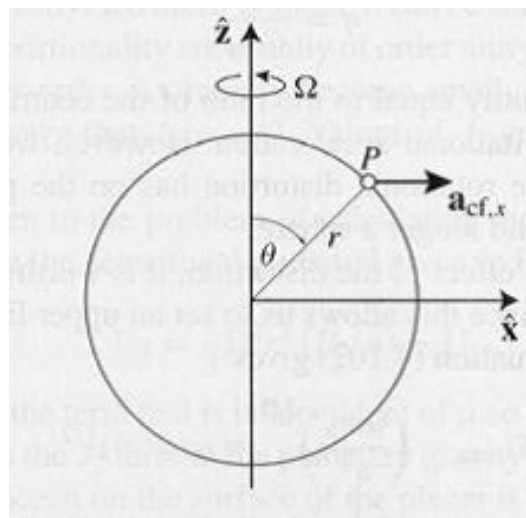


図 3.5: 加速度 Ω で自転する惑星上の点 $P(x-z$ 平面内) が受ける加速度．ここで θ は z 軸 (自転軸) からとった角度であり， r は動径方向の距離である．(MD 1999 より)

3.2 自転による遠心力

図 3.5 に表される, 角速度 Ω で自転する惑星を考えてみよう. 表面上の点 P は遠心加速度 $\mathbf{a}_{\text{cf},x} = \Omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$ を受けており $x = r \sin \theta$ なので, $\mathbf{a}_{\text{cf},x} = \Omega^2 x \hat{\mathbf{x}}$. $y - z$ 平面上の同様の点は $\mathbf{a}_{\text{cf},y} = \Omega^2 y \hat{\mathbf{y}}$ を受ける. 惑星の自転は自転軸に沿った方向には加速度を起ささない. それ故に, 表面上の任意の点 (x, y, z) は以下の遠心加速度を受ける.

$$\mathbf{a}_{\text{cf}} = \Omega^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.32)$$

よって, 点 (x, y, z) にある質量 m の天体に働く遠心力 \mathbf{F}_{cf} は以下のように書ける.

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\mathbf{a}_{\text{cf}} = m\Omega^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) \quad (3.33)$$

3.3 遠心ポテンシャル

遠心ポテンシャル V_{cf} により, 遠心加速度を表現しよう. 極からの余緯度を θ とすると, $\mathbf{a}_{\text{cf}} = -\nabla V_{\text{cf}}$ より,

$$V_{\text{cf}}(r, \theta) = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (3.34)$$

また, $\mathcal{P}_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(2 - 3 \sin^2 \theta)$ なので, 遠心ポテンシャルは以下のように書ける.

$$V_{\text{cf}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\cos \theta) - 1] \quad (3.35)$$

つまり, 潮汐ポテンシャルと同じように, 遠心ポテンシャルも 2 次のルジャンドル多項式を用いて記述される.

3.4 自転変形

次に, 遠心ポテンシャルによる自転変形について考えていこう. 惑星は自転の影響で潰れて平らになる. 変形の程度は, 惑星の偏平率 (flattening) f によって見積もることができる. f は以下のように定義される.

$$f = \frac{r_{\text{equatorial}} - r_{\text{pole}}}{r_{\text{equatorial}}} \quad (3.36)$$

ここで $r_{\text{equatorial}}$ は惑星の赤道半径, r_{pole} は惑星の極半径である.

変形による効果を見捨てた場合の偏平率 惑星の表面が密度の見捨てできる海に覆われている場合を考えてみよう．まずは海を除いた惑星本体の変形が無い場合について考える．このとき流体に働く総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} + V_{\text{cf}}(r, \theta) \quad (3.37)$$

となる．平衡状態にある場合には，流体の表面は等ポテンシャル面に一致し，局所的に重力加速度と遠心加速度の和に対して垂直になっている．海面の球体からのずれは小さいと仮定して，

$$r_{\text{ocean}} = a + \delta r(\theta) \quad (3.38)$$

と置く．ここで a は $a = r_{\text{equatorial}}$ であり，惑星の赤道半径 (equatorial radius) である．表面のポテンシャルは，式 (3.37) に式 (3.38) を代入して

$$V_{\text{total}}(\text{surface}) \approx -\frac{\mathcal{G}m_p}{a} + \frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} \delta r - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 a \sin^2 \theta \delta r \quad (3.39)$$

と書ける．ほとんどの惑星で遠心加速度より重力加速度のほうがずっと大きく， $\Omega^2 a \ll \mathcal{G}m_p/a^2$ なので，式 (3.39) の最後の項は無視できる．したがってポテンシャル一定の条件なら

$$\delta r \approx \text{constant} + \frac{\Omega^2 a^4}{2\mathcal{G}m_p} \sin^2 \theta \quad (3.40)$$

を得る．式 (3.40) からこの惑星の偏平率は $f \approx q/2$ となり，ここで無次元量

$$q = \frac{\Omega^2 a^3}{\mathcal{G}m_p} \quad (3.41)$$

は赤道での遠心加速度と重力加速度の比である．

変形による重力場の変化の効果も考えた場合の偏平率 次に，自転変形による重力場の変化の効果を取り入れた場合について考える．自転により偏平になった惑星は2つの等しい長軸 ($a = b$)，1つの短軸 (c) を持つ回転楕円体と近似して扱うことができる．対称軸を持つ天体の外側の重力ポテンシャルは以下のように書ける．

$$V_{\text{gravity}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \theta) \right] \quad (3.42)$$

ここで m は天体の総質量で， a は赤道半径， J_n は無次元の定数， $\mathcal{P}_n(\cos \theta)$ は n 次のルジャンドル多項式である．座標の原点を天体の重心にとったので， $n = 1$ の項は無い． J_n は天体の内部の質量分布を反映している． J_n の高次の項は小さく，これらの量で最も重要なのは J_2 である．主軸をそれぞれ x 軸， y 軸， z 軸 とする3つの慣性能率 A, B, C

を用いて，軸対称な惑星では $A = B$ であることに注意すると J_2 は以下のように書ける (Cook 1980) .

$$J_2 = \frac{C - A}{ma^2} \quad (3.43)$$

ここで自転する惑星の偏平率を計算する問題に戻ることができる．式 (3.35) で表される遠心ポテンシャルを考慮すると，惑星の表面の海に働く総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{Gm_p}{r} + \left[\frac{Gm_p a^2}{r^3} J_2 + \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 \right] \mathcal{P}_2(\cos \theta) - \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 \quad (3.44)$$

と表される．ここで J_n の高次の項は無視した．すでに出てきたように，表面を $r = a + \delta r(\theta)$ と書き，これを式 (3.44) に代入して展開して等ポテンシャルの条件を課すと

$$\delta r = \text{constant} - \left[J_2 + \frac{1}{3} q \right] a \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (3.45)$$

を得る．したがって偏平率は

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q \quad (3.46)$$

となる．これは以前に得た結果 $f \approx q/2$ に補正の加わった形となっている． f の計算値と観測値 (Yoder 1995) を比べると，地球では $f_{\text{calc}} = 0.003349$, $f_{\text{obs}} = 0.003353$ である．木星の場合 $f_{\text{calc}} = 0.06670$, $f_{\text{obs}} = 0.06487$ である．この比較から，式 (3.46) は偏平率のよい見積もりを与えていると言える．

偏平率 f は自転変形の程度を示し， J_2 は天体の内部の質量分布を反映している．このことから，天体の内部構造を探るのに J_2 を制約条件に用いることができることがわかる．遠心加速度と重力加速度の比 $q = \Omega^2 a^3 / Gm$ は天体の質量，自転速度，平均半径がわかれば求めることができる．

惑星の J_2 は，衛星やリング物質などの軌道天体に作用する重力場を $1/r$ ポテンシャルからわずかに変形させる．主要な結果は，軌道運動をしている天体の楕円軌道の回転，つまり空間における歳差運動である． J_2 による歳差運動の効果は，衛星の軌道，または細い偏心的なリングを監視することで直接観測することができる．それ故に， J_2 は観測可能な量であり，式 (3.43) により J_2 を慣性能率の差である $C - A$ と関連付け，内部構造を推定することができる．また，探査機による衛星の J_2 の測定方法については，5.1 節で述べる．

C と A をそれぞれ別々に計算し，内部のモデルを知るためには C と A の間の関係がさらに必要である．地球におけるひとつの方法は，自転によって偏平している地球における，太陽と月によって及ぼされるトルクの結果を観察することである．これは地球の自転軸を，地球の軌道面に対して垂直に， $(C - A)/C$ に比例した割合で回転させ (Cook

1980), この効果は月太陽歳差運動と呼ばれる。地球はコマのように首振り運動をし, その周期は 26000 年である。周期が長いので, 現在ではこの C と A を決める方法は, 地球 - 月系にのみあてはめることができるものである。期間を空けて探査機が送られた火星でも測定されているが, 他の惑星や衛星では, 他の方法を用いなければならない。

4 変形による内部構造の推定

4.1 内部構造の制約条件

内部構造の制約条件となるものを以下に整理する．

- 平均密度

核 - マントルモデルの惑星において，平均密度は以下のように表せる．

$$\langle \rho \rangle = \frac{3m}{4\pi B^3} \quad (4.47)$$

質量は各天体の軌道の解析から求めることができ，平均半径 B も天体の画像の観測などから求まる．核 - マントルモデルでの平均密度は

$$\langle \rho \rangle = \left(\frac{A}{B}\right)^3 (\rho - \sigma) + \sigma \quad (4.48)$$

となり， A/B ， σ ， ρ によって表される．

- 慣性能率

慣性能率とは半径方向の密度分布を表す指標で，球対称性を仮定し密度を重心からの距離 r の関数として $\rho(r)$ とすると

$$I = \frac{A + B + C}{3} = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr \quad (4.49)$$

と表せる．ここで A ， B は直交する 2 つの赤道軸に関する慣性能率で， C は自転軸に関する慣性能率である．半径 R ，密度が一定で ρ の均質な球では，質量 $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ となり，慣性能率は

$$I = 0.4mR^2 \quad (4.50)$$

となる．

核 - マントルモデルでは，慣性能率 C は A/B ， σ ， ρ を用いて以下のように書ける．

$$\frac{C}{mB^2} = \frac{2}{5} \left[\frac{\sigma}{\langle \rho \rangle} + \left(1 - \frac{\sigma}{\langle \rho \rangle}\right) \left(\frac{A}{B}\right)^2 \right] \quad (4.51)$$

この式において，マントルの密度が平均密度より小さいと値が 0.4 より小さくなる．つまり，この値が 0.4 より小さければ小さいほど，質量が中心に集中していると言える．

核 - マントルモデルの内部構造は，核と惑星の平均半径の比 A/B ，核の密度 σ ，マントルの密度 ρ によって表される．この 3 つの未知数を求めるための関係式を整理しよ

う．1つ目の関係式は式(4.48)で表される平均密度の式である．2つ目の関係式は，式(4.51)で表される慣性能率の式である．3.4節で述べたように， J_2/f は観測によって得られ，次節で述べる方法により慣性能率 C を近似的に求めることができる． A/B ， σ ， ρ と3つの未知数に対し，関係式は式(4.48)と式(4.51)の2つなので，3つのうち1つを仮定すれば他の2つの推定値を得ることができる．

4.2 Darwin-Radau relation による内部構造の推定

4.2.1 Darwin-Radau relation

Darwin-Radau relation は、慣性能率の係数 C/mR^2 (m は天体の質量, R は平均半径) と惑星または衛星における q, f, J_2 の値を関連付ける近似式である。基礎となる仮定は、関連する天体は静水圧平衡にあるということである。この関係はいくつもの違った形で表現できるが、ここでは Cook(1980) による形。

$$\frac{C}{mR^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5q}{2f} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (4.52)$$

を用いることにする。慣性能率の係数 \bar{C} を無次元量として以下のように定義する。

$$\bar{C} = \frac{C}{mR^2} \quad (4.53)$$

式 (3.46) で与えられた J_2, q, f の関係を用いると、式 (4.52) の Darwin-Radau relation は以下のように書くことができる。

$$\frac{J_2}{f} = -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2 \quad (4.54)$$

4.2.2 核 - マントルモデルにおける慣性能率の制約

Darwin-Radau relation によって与えられる \bar{C} と J_2/f の関係は、2 節で考えた、より現実的な惑星の変形モデルを用いて得られる、より一般的な結果の極限の場合である。

衛星の表面と核 - マントル境界面は静水圧平衡にあるとし、Dermott(1979b) は J_2/f と H_h を以下の方程式によって関連付けた。

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5H_h} \right) \quad (4.55)$$

具体的な形、式 (2.29)、式 (2.30)、式 (2.31) を代入すると¹

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} + \frac{\bar{C} - \frac{2}{5}(A/B)^2}{1 - (A/B)^2} + \frac{8 - 20(A/B)^2 + 10\bar{C}[5(A/B)^3 - 2]}{12[(A/B)^5 - 1] + 15\bar{C}[2 - 5(A/B)^3 + 3(A/B)^5]} \quad (4.56)$$

となる。この式は 2 つの極限が考えられ

¹式 (2.29) $\delta = \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)$ 式 (2.30) $H_h = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left(\frac{1+(3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta+2\sigma/5\rho-(9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2}\right)$ 式 (2.31) $\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho}$

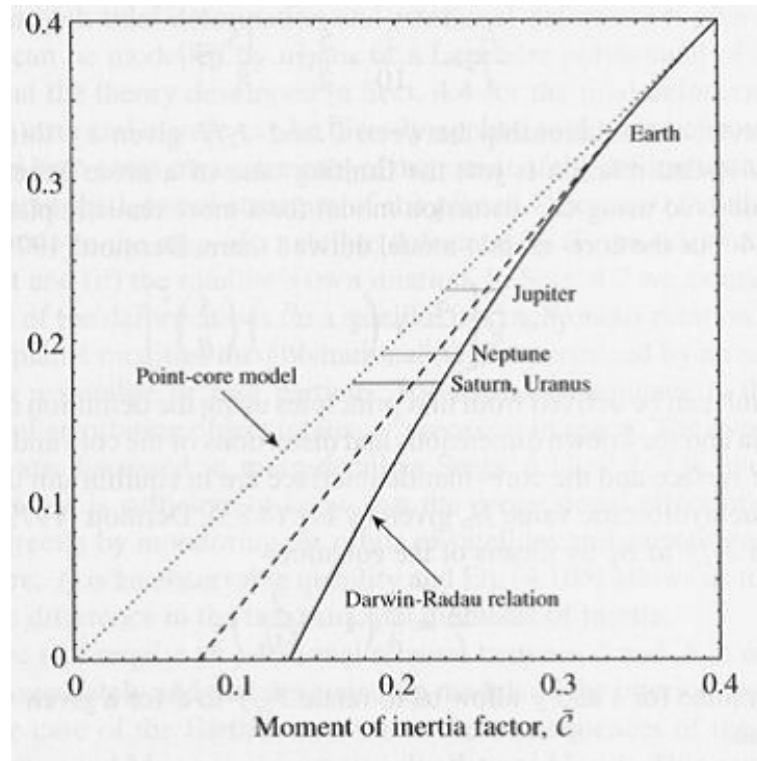


図 4.6: 慣性能率 \bar{C} の関数としての J_2/f , それぞれ (i) 核が点のモデル (点線), (ii) $A/B = 0.5$ のモデル (破線), (iii) Darwin-Radau relation の場合 (実線). 地球と巨大惑星の J_2/f の値が示してある. (MD 1999 より)

- $A/B \rightarrow 0$ の場合 (核が点)

$$J_2/f \rightarrow \bar{C} \quad (4.57)$$

- $A/B \rightarrow 1$ の場合

$$J_2/f \rightarrow -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2 \quad (4.58)$$

後者の表現は Darwin-Radau relation に一致する. 図 4.6 は, 核が点のモデル, Darwin-Radau モデル, $A/B = 0.5$ の一般的な核 - マントルのモデルにおける, \bar{C} の関数としての J_2/f をプロットしたものを示している. 地球と巨大惑星における J_2/f の観測値が水平線で示してあり, それぞれの惑星における \bar{C} の極限值も示している. J_2/f の値で与えられる \bar{C} の値の幅が, J_2/f が大きくなるにつれて小さくなっていくことに注目されたい. 重要なのは, J_2/f の値により, 慣性能率を制限することができるということである. 式 (3.43) から $C - A$ の値と, この情報を結び付けると, C と A の推定値が得られる. このような推定値は惑星内部のモデルの制約となる.

4.3 同期自転する衛星の内部構造の推定

4.3.1 同期自転する衛星の変形

今までの核 - マントル惑星モデルを用いた理論は、衛星が惑星によって起こる潮汐と衛星自身の自転、によって変形する場合にも同じように適用することができる。この節では、自転速度と公転速度が等しい、つまり同期自転する衛星における変形とその衛星の内部構造の推定について述べる。

静水圧平衡にある衛星を考えてみよう。衛星は同期自転し、惑星に対して赤道に近い軌道を取り、円に近い軌道をとると仮定する。衛星は惑星により潮汐変形を受け、同様に自転により自転変形も受ける。以上の理論と、衛星の平均運動 n が自転の角速度と等しいことから、変形の結果、衛星の形が三軸楕円体になることがわかる。実際に、静水圧平衡にある衛星では半長軸と半短軸に特有の関係があるので、衛星の形を正確に測ることにより、平衡状態にあるかどうか決めることができ、また、他のデータと結びつけることにより、衛星の内部構造の特徴を推測することができる。

衛星の自転により起こる、点 (r, θ, ψ) での遠心ポテンシャルは

$$V_{\text{rotational}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (4.59)$$

と書ける(式(3.35)参照²)。ここで θ は半径ベクトルと垂直軸の間の角度であり、 $\mathcal{P}_2(\cos \theta) = (1/4)(3 \cos 2\theta + 1)$ は2次のルジャンドル多項式である。 $V_{\text{rotational}}$ は、射影された半径ベクトルと $x - y$ 平面の間の角度 ψ から独立であることに注目されたい。これにより z 軸について等ポテンシャル面が対称であることがわかる。同じ点における惑星による潮汐ポテンシャルは

$$V_{\text{tidal}} = -\frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.60)$$

と書ける(式(2.8)参照³)。ここで m_p は惑星の質量である。 V_{tidal} は、半径ベクトルと z 軸の角度 θ から独立であることに注目されたい。これにより x 軸について等ポテンシャル面が対称であるということになる。ここで、ケプラーの第3法則を用い、 $\frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} = an^2$ であり、また同期自転なので $n = \Omega$ であることに注目すると以下のように書ける。

$$V_{\text{tidal}} = -\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (4.61)$$

したがって $V_{\text{rotational}}$ は確かに V_{tidal} と同じ形をしており、絶対値が係数3だけ違うのと、対称軸が異なるだけである。このことにより、2.4節で発展した潮汐変形の理論を、直接自転変形に適用できる。図4.7はそれぞれのタイプの変形における等ポテンシャル面

²式(3.35) $V_{\text{cf}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\cos \theta) - 1]$

³式(2.8) $V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

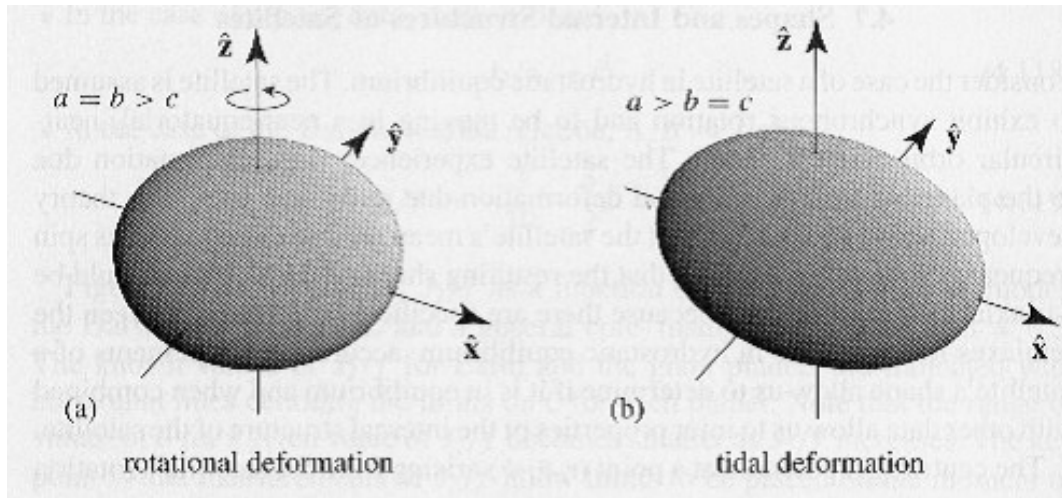


図 4.7: (a) 自転変形から生じる等ポテンシャル面の例，自転軸は z 軸 (b) 潮汐変形から生じる等ポテンシャル面の例，潮汐が起こっている天体は x 軸方向に沿っている．(MD 1999 より)

の比較を示している．自転変形の場合 (図 4.7a) は， z 軸に対して対称な形をしており，一方，潮汐変形の場合 (図 4.7b) は， x 軸 (衛星と惑星を結ぶ線に沿う) が対称軸となっている．

式 (2.16) によって与えられるマントル表面 (つまり衛星表面) の形のモデルを用いると⁴ 自転の場合に導入されねばならない，付加係数 $-1/3$ を考慮し，それぞれの変形の形を計算することができる．一般的な三軸楕円体の半軸 a, b, c (それぞれ x, y, z 軸に沿う) によって形を定義するのが最も簡単である．これらの量はそれぞれ B と T_2 のみの関数として計算することができる．

自転変形においては， a と b を与えるために $\theta = \pi/2$ での $P_2(\cos \theta)$ だけを計算すればよく， c を与えるためには $\theta = 0$ を計算すればよい．これにより以下のように書ける．

$$a_r = B(1 + T_2/6), \quad b_r = B(1 + T_2/6), \quad c_r = B(1 - T_2/3) \quad (4.62)$$

潮汐変形においては， a を与えるために $\psi = 0$ での $P_2(\cos \psi)$ だけを計算すればよく， b と c を与えるためには $\psi = \pi/2$ を計算すればよい．これにより以下のように書ける．

$$a_t = B(1 + T_2), \quad b_t = B(1 - T_2/2), \quad c_t = B(1 - T_2/2) \quad (4.63)$$

⁴式 (2.16) $R_{os}(\psi) = B[1 + T_2 P_2(\cos \psi)]$

静水圧平衡にある同期自転する衛星では、自転軸が軌道面に対して垂直だと仮定し、自転と潮汐による寄与を線形的に足し合わせることができ、結果としてできる三軸楕円体の形は以下の半軸によって与えられ以下のように書ける。

$$a = B(1 + 7T_2/6), \quad b = B(1 - T_2/3), \quad c = B(1 - 5T_2/6) \quad (4.64)$$

このことにより

$$b - c = \frac{1}{4}(a - c) \quad (4.65)$$

という結果を得る (Dermott1979b)。

4.3.2 衛星の形状を用いた内部構造の推定

衛星の内部構造も、4.1節で述べたように、核と衛星の平均半径の比 A/B 、マンツルの密度 σ 、核の密度 ρ の、3つの未知数について、2つの関係式を求め、未知数を1つ仮定することによって推定する。関係式の1つは4.2.3節で述べたように、平均密度の関係式である式 (4.48) である。以下で2つ目の関係式を求める。

惑星によって衛星に起こる平衡潮汐の式 (2.12) を適用し⁵

$$\zeta = \frac{m_p}{m_s} \left(\frac{B}{a}\right)^3 B \quad (4.66)$$

である。さらに式 (3.41) は⁶、ケプラーの第3法則から $\frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} = an^2$ で $n = \Omega$ から

$$q = \frac{\Omega^2 a^3}{\mathcal{G}m_s} = \frac{m_p}{m_s} \left(\frac{B}{a}\right)^3 \quad (4.67)$$

となる。よって

$$\zeta/B = q \quad (4.68)$$

を得る。また式 (4.64) より以下のように書ける。

$$a - c = 2BT_2 \quad (4.69)$$

ここで式 (2.26) で与えられる定義 $BT_2 = H \frac{5}{2} \zeta$ を用いると

$$H_h = \frac{a - c}{5qB} \quad (4.70)$$

⁵式 (2.12) $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a}\right)^3 R_p$

⁶式 (3.41) $q = \frac{\Omega^2 a^3}{\mathcal{G}m_p}$

であり、この式の中の、 $a - c$ 、 B 、 q は十分に解像度が高い衛星の画像から測ることができるので、 H_h を求めることができる。よって、式 (2.30) の中の係数 H_h の定義から、この式が A/B 、 σ 、 ρ の関係式となることがわかる。

これで、3つの未知数について、平均密度の式 (4.48) と、 H_h の式 (4.70) と、ふたつの関係式を求めることができた。このようにして特に同期自転し、惑星に近く、潮汐変形も自転変形も大きい衛星の内部構造を推定することができる。

4.3.3 同期自転する衛星の重力ポテンシャル

衛星の重力ポテンシャルは一般には以下のように記述される。

$$V_{\text{gravity}}(r, \theta, \psi) = \frac{Gm}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\psi + S_{nm} \sin m\psi) \mathcal{P}_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (4.71)$$

ここで重心を球座標 (r, θ, ψ) の原点にとり、 R は衛星の平均半径とする。 $\mathcal{P}_{nm}(\cos \theta)$ はルジャンドル多項式、 C_{nm} と S_{nm} は係数である。3次以上の項を無視すると

$$V_{\text{gravity}}(r, \theta, \psi) = \frac{Gm}{r} \left[1 - \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + 3C_{22} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos 2\psi \right] \quad (4.72)$$

と表される。ここで $(n, m) = (2, 1)$ の項が現れないのは、重心が座標原点にあるためである。また、 $J_2 = -C_{20}$ である。 C_{22} は慣性能率を用いて

$$C_{22} = \frac{B - A}{4mR^2} \quad (4.73)$$

と表される。ここで A, B はそれぞれ惑星と衛星を結ぶ軸と、これと自転軸に直交する軸のまわりの慣性能率である。

遠心ポテンシャルは式 (4.59) より

$$V_{\text{rotational}} = \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta)$$

と書ける。球座標での座標変換を行い、式 (4.61) で表される潮汐ポテンシャルは以下のように書ける。

$$V_{\text{tidal}} = \Omega^2 r^2 \left[\frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\cos \theta) - \frac{3}{4} (\sin^2 \theta \cos 2\psi) \right] \quad (4.74)$$

これらを足し合わせると以下ようになる。

$$V_{\text{rotational}} + V_{\text{tidal}} = \frac{5}{6} \Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) - \frac{3}{4} \sin^2 \theta \cos 2\psi \quad (4.75)$$

式(4.72)の非対称成分はこの変形ポテンシャルと線形関係にあるので, $J_2 \propto 5/6\Omega^2 r^2$, $C_{22} \propto 1/4\Omega^2 r^2$ となり, このことから衛星が静水圧平衡にある場合には, J_2 と C_{22} の間には

$$J_2 = \frac{10}{3}C_{22} \quad (4.76)$$

という関係 (Anderson et al 1996a,1998a) があることがわかる .

また, C_{22} は式(3.41)で表される遠心加速度と重力加速度の比 q によって以下のように書ける .

$$C_{22} = \frac{3}{4}\alpha q \quad (4.77)$$

ここで, α は衛星の質量分布に依存する無次元の係数であり, 均質な衛星だと $\alpha = 1/2$ である . α は Darwin-Radau relation によって以下のように書ける .

$$\bar{C} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \left(\frac{4 - 3\alpha}{1 + 3\alpha} \right)^{1/2} \right] \quad (4.78)$$

5 衛星の内部構造モデル

5.1 木星のガリレオ衛星

5.1.1 ガリレオ探査機による測定

ガリレオ衛星は木星のまわりを同期自転しており，潮汐変形と自転変形を起こしている．それぞれの衛星の大きさと軌道半径などから，静水圧平衡に近い状態にあると考えられる．1990年代のガリレオ探査機による木星系探査によってもたらされたデータによって，木星のガリレオ衛星の内部構造についての理解が進んだ．ガリレオ探査機は木星系を巡り，4つのガリレオ衛星全てに表面から1000 km以内まで近づいた．

ガリレオ探査機は各衛星にフライバイする際に2.3 GHzの電波を地球に送った．その際，地球で受信される電波には衛星の重力によるドップラー効果が観測された．この受信した波形をフーリエ解析し，各衛星の J_2, C_{22} の値を得た．静水圧平衡では $J_2 = \frac{10}{3}C_{22}$ となるが，得られた値はこれに近く，静水圧平衡に近い状態にあることがわかった．この値と4.3.3節で述べたDarwin-Radau relationによる内部構造の推定方法を用い，特徴的なガリレオ衛星の内部構造が明らかになってきた．その概要については表5.1と図5.10で示した(Anderson et al 1996a,1996b,1998a,1998b)．

	イオ	エウロパ	ガニメデ	カリスト
質量 m (10^{23} kg)	0.893	0.480	1.482	1.076
平均半径 B (km)	1821	1565	2634	2403
平均密度 $\langle \rho \rangle$ (g cm^{-3})	3.53	2.99	1.94	1.85
慣性能率係数 \bar{C}	0.378	0.348	0.311	0.358

表 5.1: ガリレオ衛星のデータ (Anderson et al 1996a,1996b,1998a,1998b)

5.1.2 ガリレオ衛星の内部構造モデル

イオ イオは平均密度，半径ともに月とよく似た値を持っている．ボイジャー1号の観測によって，イオは活発な火山活動を起こしていることが明らかになった．火山活動の原因は，木星の強い潮汐力による潮汐加熱であると考えられている．スペクトル分析によると表面には水は存在しておらず，固体のケイ酸塩の地殻の下には，溶融したケイ酸塩の層が予測される．ガリレオ探査機の観測によると慣性能率は $\bar{C} = 0.378 \pm 0.007$ で，中心部には純粋な金属鉄から成る核 ($A/B = 0.36$) か，金属鉄と硫化鉄からなる核 ($A/B = 0.52$) が推定される (Anderson et al 1996b)．

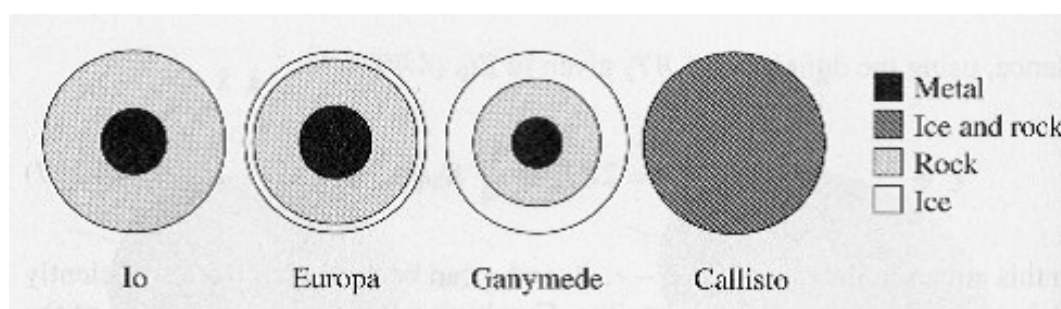


図 5.8: 探査機のデータから求めたガリレオ衛星の内部モデル．全ての衛星が同じ半径のスケールで描かれている．(MD 1999 より)

エウロパ エウロパの平均密度はイオや月よりもやや低く，表面はスペクトル分析から H_2O の氷からなると考えられ，ボイジャーの観測によって確認された．ガリレオ探査機の観測によると，慣性能率は $\bar{C} = 0.347 \pm 0.014$ で，金属核 ($A/B = 0.5$) のまわりをケイ酸塩質の岩石が覆い，そのまわりを H_2O の氷の層 (80 ~ 170 km) が取り巻いているモデルが考えられている (Anderson et al 1998b)．氷でできた殻の下では，潮汐加熱によって氷が溶けて，液体の水の海があるのではないとも言われており，生命が存在するかもしれない (R.Reynold and S.Squyres 1982)．表面地形がならされて衝突クレーターはほとんど見当たらないのは，地殻が変形しやすくなっているからと考えられる．

ガニメデ ガニメデは太陽系の衛星の中で最大の衛星であり，その半径は 2631 km で，水星の 2440 km よりも大きい．平均密度は 1.94 g cm^{-3} と，イオやエウロパに比べて低い．ガリレオ探査機によるガニメデの慣性能率の観測値は $\bar{C} = 0.311 \pm 0.003$ と，太陽系の天体の中で巨大惑星を除けば最も小さく，これはガニメデがかなり中心に凝縮していることを示している．金属の核 (~ 400 km) をケイ酸塩のマントル (~ 1300 km) が覆い，その周りを深い氷の層 (~ 800 km) が覆う，3層モデルが予測される．氷の層を除けば，イオに似た構造が残る (Anderson et al 1996a)．ガニメデが大きいのはケイ酸塩の核と氷のマントルが分化する過程で，氷が相転移により体積を増し，ガニメデ自身の膨張したためであるとも言われている (Squyres et al 1983)．この理論のように核を残してマントルが膨らめば，中心部が凝縮した構造になるだろう．

カリスト カリストの表面はスペクトル分析により氷からなると考えられる．ガリレオの最初の探査によって得られた慣性能率の推定値は $\bar{C} = 0.406 \pm 0.030$ と，カリストが未分化であることを示唆している (Anderson et al 1997b)．しかし，その後の探査により $\bar{C} = 0.358 \pm 0.004$ という値が得られ，岩石と氷の部分分別の可能性が示されている (Anderson et al 1998a)．カリストはガニメデと大きさ，密度ともに似ているが，ガリレオ衛星の中で最も外側にあり，木星による潮汐熱による効果が少なく，ガニメデのよう

には凝縮しなかったと考えられる。

5.2 土星の衛星

ミマス 土星の衛星ミマスでは、太陽系で唯一平衡な三軸楕円体が観測されている。Dermott & Thomas(1988) は、ボイジャー探査機によって得られた高解像度の画像を用い、ミマスが三軸楕円体にとてもよい近似をもつとした。式 (4.64) で予測される割合 0.25 と比べて測定値は $(b - c)(a - c) = 0.27 \pm 0.04$ であり、これはミマスが静水圧平衡に近いということを示唆している。Dermott & Thomas は、平均半径の推定値 $B = 198.8 \text{ km}$ と、Kozai(1957) によって決められたミマスの質量を結びつけて、平均密度 $\langle \rho \rangle = 1.137 \pm 0.018 \text{ g cm}^{-3}$ を得た。彼等は、未分化の衛星で予測される値 $20.3 \pm 0.3 \text{ km}$ と比べて $a - c = 16.9 \pm 0.7 \text{ km}$ であることを示した。予測されたバルジより小さいということは、中心に凝縮した衛星ということを示唆している。観測値 $a - c = 16.9 \pm 0.7 \text{ km}$ を用い、岩石コアを予測して $\sigma = 3.0 \text{ g cm}^{-3}$ として式 (4.68) を用いると、 $A/B = 0.44 \pm 0.09$ の岩石コア、密度 $\sigma = 0.96 \pm 0.08 \text{ g cm}^{-3}$ の氷のマントルというモデルが推定できる。

彼等が考えたもうひとつの可能性は、ミマスは未分化であり、多孔性の密度が低い氷でできた深い表土から成るというモデルである。このモデルだと、ミマスが形成されてから土星による潮汐により何度も熱されて、複雑な熱史を経たと考えられる。土星の共軌道衛星であるヤヌスとエピメテウスの力学的相互作用の観測により、同種の多孔性の氷組成が示唆されることに注目すると興味深い。

タイタン 土星の衛星タイタンは、太陽系でガニメデに次ぎ 2 番目に大きな衛星である。タイタンは濃い大気を持ち、地上観測によってメタンが検出されていたが、ボイジャーの観測によりその主成分は窒素であることがわかった。地表付近にはエタンなどの有機化合物の海があることが予測されており、ハッブル宇宙望遠鏡の観測によって大陸の存在も予測されている。平均密度は 1.88 g cm^{-3} であり、ガニメデとカリストの中間に近く、岩石質物質半分と氷半分から成ると考えられる。タイタンについては、慣性能率が求められておらず、詳しい内部構造についてはまだわかっていない。1997 年に打ち上げられたカッシーニ探査機が 2004 年 7 月に土星軌道に到着予定であり、タイタンの内部構造に関するデータが得られることが期待される (Rappaport et al. 1997)。

6 まとめ

本論文では、潮汐変形と自転変形による天体の変形と、それをを用いた太陽系の同期自転する衛星の内部構造の推定方法、その推定されるモデルについてまとめた。

ここまでは、衛星が円に近い軌道をもつと仮定してきたが、実際は衛星がかなり偏心軌道をまわっているため、潮汐ポテンシャルと共に衛星の形も変化する。したがって、探査機が衛星に近づいたときの衛星の場所により、得られるデータにも差が生じてくる。探査機が繰り返し衛星に近づき、その度に \bar{C} と J_2 を測定することで正確な測定値を得られ、詳細な内部構造が推定できる。惑星探査計画は現在も進められており、今後の探査によりさらなるデータが得られることが期待される。

1989年の打ち上げ以来14年間様々なデータをもたらしたガリレオ探査機は、2003年9月22日、木星の雲に突入しその役目を終えた。土星を探査をするカッシーニ探査機は1997年に打ち上げられ、木星での観測の後、2004年7月に土星軌道に到着予定であり、衛星タイタン大気圏にプローブ「ホイヘンス」を放出しての観測も行われる。木星の衛星エウロパを周回する探査機「エウロパ・オービター」は2008年に打ち上げ、2010年に木星に到達し、2011年からはエウロパを主に探査する。エウロパの地表の地図を作成、氷の厚さを測定、氷の下の「海」の存在を確認する計画である。これらの探査機によるデータにより、内部構造の理解も進んでいくだろう。

参考文献

- [1] Anderson, J. D., Lau, E. L., Sjogren, W. L., Schubert, G., and Moore, W. B. (1996a): Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede, *Nature* **384**, 541-543.
- [2] Anderson, J. D., Lau, E. L., Sjogren, W. L., Schubert, G., and Moore, W. B. (1997a): Europa's differentiated internal structure: Inferences from two Galileo experiments, *Science* **276**, 1236-1239.
- [3] Anderson, J. D., Lau, E. L., Sjogren, W. L., Schubert, G., and Moore, W. B. (1997b): Gravitational evidence for an undifferentiated Callisto, *Nature* **387**, 264-266.
- [4] Anderson, J. D., Schubert, G., Jacobson, G. A., Lau, E. L., Moore, W. B., and Sjogren, W. L. (1998a): Distribution of rock, metals and ices in Callisto, *Science* **280**, 1573-1576.
- [5] Anderson, J. D., Schubert, G., Jacobson, G. A., Lau, E. L., Moore, W. B., and Sjogren, W. L. (1998b): Europa's differentiated internal structure: Inferences from four Galileo experiments, *Science* **280**, 1573-1576.
- [6] Anderson, J. D., Sjogren, W. L., and Schubert, G. (1996b): Distribution of rock, metals and ices in Callisto, *Science* **280**, 1573-1576.
- [7] Dermott, S. F. (1979b): Shapes and gravitational moments of satellites and asteroid, *Icarus* **37**, 576-586.
- [8] Dermott, S. F. and Thomas, P. C. (1988): The Shapes and internal structure of Mimas, *Icarus* **73**, 25-65.
- [9] Jeffreys, H. (1970): *The earth* 5th ed. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 525 pp.
- [10] 小森 長生 (1992): 現代の惑星学. 東海大学出版会, 186pp.
- [11] 松井 孝典 他 (1970): 岩波講座地球惑星科学 12 比較惑星学. 岩波書店, 488pp
- [12] Murray, C. D., and Dermott, S. F. (1999): *Solar System Dynamics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 592 pp.
- [13] Rappaport, N., Bertotti, B., Giampieri, G., and Anderson, J. D. (1997): Doppler measurements of the quadrupole moments of Titan, *Icarus* **126**, 313-323.

- [14] 力武 常次 (1977): 固体地球科学入門 第2版. 共立出版, 267pp
- [15] 杉村 新, 中村 保夫, 井田 喜明 (1988): 図説地球科学. 岩波書店, 266pp
- [16] 戸田 盛和 (1982): 物理入門コース 1 力学. 岩波書店, 244pp
- [17] 横浜こども科学館 ガリレオ探査機ニュース <http://astro.ysc.go.jp/galileo.html>
- [18] The nine planets 日本語版 <http://www.cgh.ed.jp/TNPJP/nineplanets/>
- [19] 倉本 圭 (2001) 「巨大氷衛星の起源と進化」 http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~keikei/enlighten/icy_sat.html
- [20] jaxa オンラインスペースノート http://spaceinfo.jaxa.jp/note/note_j.html
- [21] Eric Weisstein, ERIC WEISSTEIN'S WORLD OF PHYSICS
<http://scienceworld.wolfram.com/physics/>
- [22] Calvin J. Hamilton , Views of the Solar System
<http://www.solarviews.com/eng/homepage.htm>

A 全訳

Murray and Dermott (1999): *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press の中の, 4 節 Tides, Rotation, and Shapes 4.1 ~ 4.7 の全訳を以下に載せる.

A.1 はじめに

今まではすべての天体を物理的次元を用いずに質点として考えてきた. しかしこれは明らかに実際の天体にはあてはまらないので, 太陽系の天体を形作る物質におよぶ万有引力の影響を考えなくてはならない. ある天体において, 潮汐 (tide) は他の天体による重力勾配や天体に働く重力の違いの影響によって引き起こされる. 例えば, 惑星のまわりをまわる衛星によって惑星に起こる潮汐を考えると, 惑星の衛星に面している側の面に働く力は衛星から遠い側の面に働く力より大きい. 太陽系を形作っている天体は完全な剛体とは言えないので, 天体はゆがみ, 潮汐バルジ (tidal bulge) が生じる.

天体における潮汐バルジの大きさはある程度は内部の密度分布によって決められる. よって, 潮汐の大きさを測定することで, 内部構造を決めることができるのである. このような測定は地球以外の太陽系の惑星では不可能である. しかしながら, 惑星の自転によって潮汐と同じように起こる変形ポテンシャルと, 自転による変形の測定によって, 内部の密度分布を決めることができる. これにより, 潮汐ポテンシャルに対する惑星の反応を見積もることができる. 同期自転する太陽系の衛星は自転による力と, 潮汐力の両方の影響で変形しており, その三軸楕円体の形を測定し, 内部構造を決定するのである.

潮汐に対する衛星の反応の結果, その系に力学的進化が引き起こされうる. 常にある程度摩擦は存在するので, 潮汐は散逸的な現象であり惑星において衛星に引き起こされる潮汐によって, 衛星の軌道進化がおこり, 惑星の自転速度の変化がおこる衛星が惑星に潮汐を引き起こすのと同じように, 惑星も衛星に潮汐を引き起こす. これは衛星の軌道が偏心的なときに特に重要になる. 衛星における潮汐散逸の影響は劇的な結果を招くことがある. 例としては, 木星の衛星イオの激しい潮汐熱があげられる.

A.2 潮汐バルジ

質量 m_p の惑星のまわりをまわる質量 m_s の衛星によって起こる潮汐を考えてみる. 天体を質点と考えると, 万有引力の法則により, 2 点間に働く力の大きさ $\langle F \rangle$ は

$$\langle F \rangle = G \frac{m_p m_s}{r^2}, \quad (\text{A.1})$$

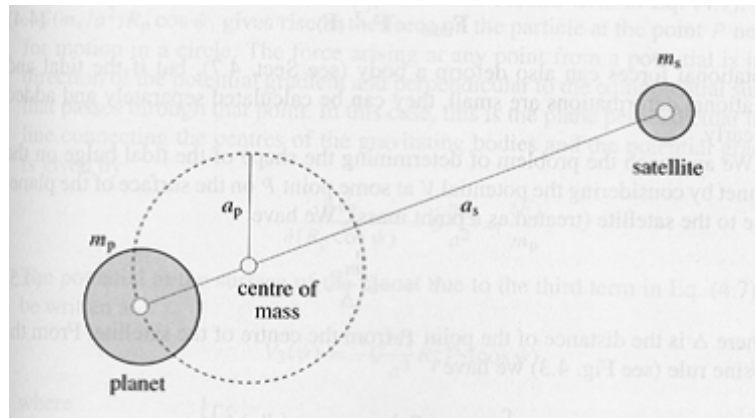


図 A.1: 惑星と衛星はその共通重心を中心に円軌道をとる．重心からとった半長軸はそれぞれ a_p, a_s であり，衛星軌道の惑星からとった半長軸は $a = a_p + a_s$ である．

ここで r は中心からの距離である．惑星と衛星がその共通の重心のまわりに回転しているとすると（図 A.1），半長軸と質量の関係は

$$a_s/a_p = m_p/m_s, \quad (\text{A.2})$$

となり，ここで常に $a = a_p + a_s$ である．惑星の中心点 P_1 の軌道は重心 C_1 を中心に半径 a_p の円軌道である．ここで自転を無視すると，つまり他の点の動きを無視すると，惑星の中の点 P_2 の描く円軌道は同じ半径だが中心点は異なり， C_1 と置き換わって C_2 となる．ここで P_1 が P_2 にずれたのと同じぶんだけ， C_1 も C_2 にずれる（図 A.2）．つまり，惑星を形作る全ての点は，大きさと方向が等しい遠心力によって運動しているのであり，衛星からの等しい引力 F によって運動しているのではないのである．共通の遠心力は万有引力 $\langle F \rangle$ に等しく

$$\langle F \rangle = \text{遠心力 (centrifugal force)} \neq F. \quad (\text{A.3})$$

となり，惑星を変形させる起潮力 F_{tidal} は次のように定義される．

$$F_{\text{tidal}} = F - \langle F \rangle. \quad (\text{A.4})$$

自転による力も天体を変形させるが（A.7 節），潮汐による変形も自転による変形も小さければ，別々に計算できて，線形的に足し合わせることができる．

惑星における潮汐バルジの形を決めるために衛星を持つ惑星の表面の点 P におけるポテンシャル V について考えてみよう．（衛星は質点として扱う）

$$V = -G \frac{m_s}{\Delta}, \quad (\text{A.5})$$

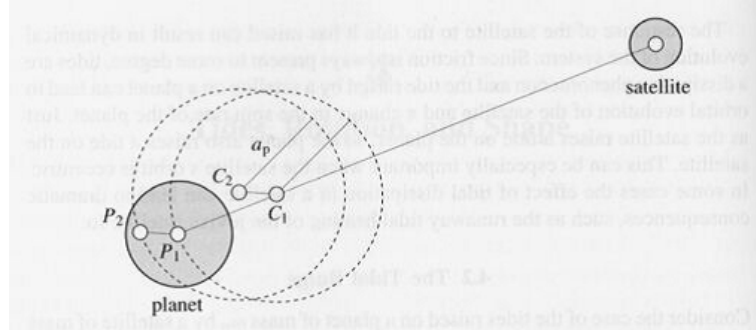


図 A.2: 惑星の全ての点は等しい半径 a_p の円を描くが、中心は異なる。 P_1, P_2 はそれぞれ C_1, C_2 を中心とした円を描く。

ここで、 Δ は P と衛星の中心との距離である（図 A.3）。余弦定理より

$$\Delta = a \left[1 - 2 \left(\frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.6})$$

となり、ここで ψ はふたつの天体の中心を結んだ線からとった角度である。ほとんどの場合 $R_p/a \ll 1$ である。例えば、地球の赤道半径は 6,378 km であり、月軌道の半長軸は 384,400 km である。したがって、式 (A.6) を展開し⁷、

$$\begin{aligned} V &= -\mathcal{G} \frac{m_s}{a} \left[1 + \left(\frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) + \dots \right] \\ &\approx V_1 + V_2 + V_3, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで高次の項は無視した。

式 (A.7) の第 1 項、 $V_1 = -\mathcal{G}(m_s/a)$ 、は定数であり、 $\mathbf{F}/m_p = -\nabla V$ 、であることから、この項は惑星に何の力も及ぼさない。式 (A.7) の第 2 項、 $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi$ 、は P 点にある粒子に円軌道を描くのに必要な力を与える。ポテンシャルによって生じる力はどの点においてもポテンシャル勾配の方向に生じ、そしてその点を通る等ポテンシ

⁷テイラー展開する。 $x = 1 - 2 \left(\frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \left(\frac{R_p}{a} \right)^2$ とおいて、

$$V = -\mathcal{G} \frac{m_s}{\Delta} = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a(1+x)^{\frac{1}{2}}} = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a} (1+x)^{(-\frac{1}{2})}$$

$$(1+x)^{(-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \dots$$

x をもとに戻し、高次（3 次以降）の項を無視すると式 (A.7) が導ける。なお、以降の脚注は訳者が加えたものである。

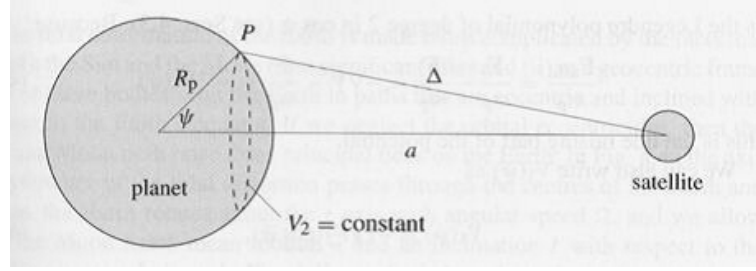


図 A.3: 惑星の半径 R_p , 衛星の半長軸 a , 惑星の表面上の点 P から衛星までの距離 Δ との関係を示す．点線は等ポテンシャル面 $V_2 = -\mathcal{G}(m_s/a^2)R_p \cos \psi = \text{constant}$ を示す．

ル面に垂直である．ここでは等ポテンシャル面は水平面であり，引き合う 2 天体の中心を結ぶ線に垂直であり，ポテンシャル勾配は以下のように与えられる．

$$-\frac{\partial V_2}{\partial(R_p \cos \psi)} = \mathcal{G} \frac{m_s}{a^2} = \frac{\langle F \rangle}{m_p}. \quad (\text{A.8})$$

式 (A.7) の第 3 項による惑星表面のポテンシャルは以下のように書け

$$V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.9})$$

ここで

$$\mathcal{P}_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) \quad (\text{A.10})$$

とは，ルジャンドル多項式の $n = 2$, $\cos \psi$ のときである (A.3 節参照)．ここで

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{tidal}}}{m_p} = \frac{\mathbf{F}}{m_p} - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} = -\nabla V - \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m_p} \approx -\nabla V_3(\psi), \quad (\text{A.11})$$

であるので，これは潮汐を引き起こすポテンシャルである．ここで， $V_3(\psi)$ を

$$V_3(\psi) = \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.12})$$

と書くことができる．ここで

$$\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a} \right)^3 R_p \quad (\text{A.13})$$

である．また，

$$g = \mathcal{G} \frac{m_p}{R_p^2} \quad (\text{A.14})$$

これは惑星における，重力加速度，表面重力である．ここでは， $\zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ は惑星表面においてあらゆる ψ 対して，平衡潮汐 (equilibrium tide) の大きさを表す．ここで $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ は $\psi = 0, \pi$ のとき最大であり， $\psi = \pi/2, 3\pi/2$ のときに最小になることに注目されたい．

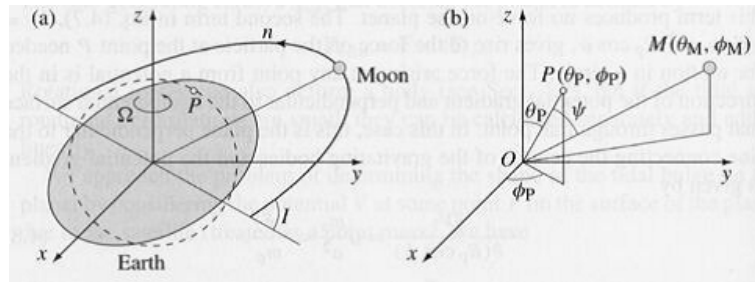


図 A.4: 重力ポテンシャルの $V_3(\psi)$ によって生じる潮汐変形の形の実線と、変形のない球の場合の点線の比較。(a) 潮汐変形の対称軸は地球と月の中心を通り、地球は z 軸を軸に角速度 Ω で自転し、月の平均運動は n であり、地球の赤道に対する軌道傾斜角は I である。(b) 月の余緯度と経度は (θ_M, ϕ_M) 、地球表面上の点 P では $P(\theta_P, \phi_P)$ である。 ϕ_P, ϕ_M は空間において固定された方向からとられており、地球と共にまわっている方向からとっているわけではないということに注意されたい。

地球は 24 時間で 1 回自転するので、このことから月によって地球にほぼ毎日満潮と干潮が 2 回起こることがわかる。

地球の潮汐変形は実際は以下の理由でもっと複雑である。() 太陽と月、両方によって潮汐が起こる、() 地球を中心に考えると、太陽も月も偏心的で、地球の赤道に対して傾いた軌道をとってまわっている。もし軌道の離心率を無視して考えると、太陽と月はそれぞれ三つの大きな潮汐を地球にもたらす。図 A.4a において、潮汐変形の対称軸は地球と月の中心を通り、地球は z 軸を軸に角速度 Ω で自転しており、月は平均運動 n をもち、地球の赤道に対する軌道傾斜角は I である。図 A.4b において、月の余緯度と経度は (θ_M, ϕ_M) 、地球表面上の点 P では $P(\theta_P, \phi_P)$ である。 ϕ_P, ϕ_M は空間において固定された座標系における値で、地球と共にまわっている座標系のものではないということに注意されたい。

余弦定理から、ベクトル OP と OM の角度 ψ は⁸

$$\cos \psi = \cos \theta_P \cos \theta_M + \sin \theta_P \sin \theta_M \cos(\phi_P - \phi_M). \quad (\text{A.15})$$

となり、したがって

⁸ 位置ベクトルを成分表示し、内積の関係から導く。 $|OM| |OP| \cos \psi = x_P x_M + y_P y_M + z_P z_M$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_P - 1) \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_M - 1) \\
&+ \frac{3}{4} \sin^2 \theta_P \sin^2 \theta_M \cos 2(\phi_P - \phi_M) \\
&+ \frac{3}{4} \sin 2\theta_P \sin 2\theta_M \cos(\phi_P - \phi_M). \tag{A.16}
\end{aligned}$$

地球上に固定された点における緯度 θ_P が与えられ、 P 点での潮汐の大きさは ϕ_P, θ_M, ϕ_M によって異なる。式 (A.16) における第 1 項の変化は、 $\cos^2 \theta_M = (1/2)(1 + \cos 2\theta_M)$ の時間による変化によって決まる。したがって、この項は $2n$ の振動によって変化し、半月周潮 (fortnightly tide) を起こす。第 2 項は $2(\Omega - n) \approx 2\Omega$ の振動によって変化し、半日周潮 (semidiurnal tide) を起こす。第 3 項は、 $(\Omega - n) \approx \Omega$ の振動によって変化し、日周潮 (diurnal tide) を起こす。第 3 項は $\sin 2\theta_M$ を含むため、日周潮は隔週で強い抑揚がある。その他の潮汐に関する項は月の軌道離心率に関係している。

太陽による半年周潮、半日周潮、日周潮に対応して、振動 $2n_{\text{Sun}}, 2(\Omega - n_{\text{Sun}}) \approx 2\Omega, (\Omega - n_{\text{Sun}}) \approx \Omega$ がある。ここで、 n_{Sun} は太陽の (地球の) 平均運動である。式 (A.13) より、太陽と月の潮汐の大きさの比率はどんな場合でも

$$\frac{m_{\text{Sun}}}{m_{\text{Moon}}} \left(\frac{a_{\text{Moon}}}{a_{\text{Sun}}} \right)^3 \approx 0.46. \tag{A.17}$$

となる。月によって地球に起こる潮汐は $\zeta = 0.36$ m、一方太陽によって起こる潮汐は $\zeta = 0.16$ m である

A.3 ポテンシャル理論

潮汐と自転による変形の計算を進める前に、ポテンシャル理論に由来するいくつかの結果を述べておこう。密度 γ 、半径 C の均質な球状の天体の重力ポテンシャルを考えるとき、半径 r 、厚さ δr 、質量 δm 、である薄い球殻の内側のポテンシャルと外側のポテンシャルを考えればよい (Ramsey 1940)。球殻の外側のある点におけるポテンシャルは、中心からの距離が r' とすると

$$V_{\text{ext}}(r') = -\frac{\mathcal{G}\delta m}{r'} \tag{A.18}$$

となり、これは球殻の中心に全ての質量が集まったと考えたときと同じである。よって均一な球の表面の外側のポテンシャルは以下のように与えられる。

$$V_{\text{ext}}(C) = -\frac{\mathcal{G} \sum \delta m}{C} = -\frac{4}{3} \pi \gamma \mathcal{G} C^2. \tag{A.19}$$

重力は逆二乗の法則⁹(inverse square law) によって記述されるので，球殻の内側の点に働く力はゼロである．したがって，球殻の内側の重力ポテンシャルは一定であり，内部のどの点においてポテンシャルを計算しても決めることができる．球殻の中心におけるポテンシャルを計算すると

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{\mathcal{G} \sum \delta m}{r} = -4\pi\gamma\mathcal{G}r\delta r. \quad (\text{A.20})$$

外半径 C ，内半径 r の均一な球殻の内側のポテンシャルは以下のように与えられる．

$$V_{\text{int}}(C, r) = -4\pi\gamma\mathcal{G} \int_r^C r dr = -2\pi\gamma\mathcal{G}(C^2 - r^2). \quad (\text{A.21})$$

したがって，均質な球状の天体における中心からの距離が r の点での内側 ($r < C$) のポテンシャル，外側 ($r > C$) のポテンシャルは以下ようになる．

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\mathcal{G}r^2 - 2\pi\gamma\mathcal{G}(C^2 - r^2) = -\frac{2}{3}\pi\gamma\mathcal{G}(3C^2 - r^2), \quad (\text{A.22})$$

$$V_{\text{ext}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\mathcal{G}\frac{C^3}{r}. \quad (\text{A.23})$$

変形した天体の内側のポテンシャル，外側のポテンシャルは球関数によって説明できる．ポテンシャル理論におけるこれらの関数を用いた以下の議論は，Ramsey(1940), MacRobert(1967), Bullen(1975), and Blakely(1995) に基づいている．

空間における重力ポテンシャル V は以下のラプラス方程式を満たす．

$$\nabla^2 V = 0. \quad (\text{A.24})$$

以下のオイラーの方程式(Euler's equation) を満たすならば， V は n 次同次式(homogeneous of degree n) である．

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = nV. \quad (\text{A.25})$$

ラプラス方程式を満たす同次の関数を，球調和関数¹⁰(spherical solid harmonics) ともいう．球座標で表すとき，これらは重要な関係を持ち，3つの関数にわけることができ，それぞれ r, θ, ϕ の3つの変数のうち1つによって変化する．(球関数については，Blakely(1995) が詳しい．)

極球座標 (r, θ, ϕ) を用いると， r は重心からの動径方向の距離であり， θ は極軸からとった余緯度であり， ϕ は任意の固定した方向からとった経度である．ラプラス方程式は以下のようになり

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0, \quad (\text{A.26})$$

⁹2つの天体に働く力がその2つの天体を結ぶ直線方向にあり，大きさが距離の2乗に反比例するという法則．

¹⁰調和関数は，例えば三角関数のように，微分したらもとに戻るような関数．

ここで $\mu = \cos \theta$ である．ラプラス方程式は $V = r^n S_n(\mu, \phi)$ と置いて式 (A.26) に入れることによって解け，ここで $S_n(\mu, \phi)$ は r によらない．このことから

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = n(n+1)r^n S_n, \quad (\text{A.27})$$

となり，式 (A.26) は

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial S_n}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)S_n = 0. \quad (\text{A.28})$$

これをルジャンドル方程式(Legendre's equation) と言い，この方程式を満たす S_n は球面調和関数(spherical surface harmonic) と呼ばれる関数である． n を $-(n+1)$ と書いたとき， $n(n+1)$ が変わらず残っているので，ラプラス方程式の一般解は以下のように書ける．

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) S_n(\mu, \phi). \quad (\text{A.29})$$

この方程式の各項はそれぞれ n 次と $n+1$ 次の体球関数(solid harmonic) と呼ばれる (Ramsey 1940)

この章で述べている変形は，潮汐によっても自転によっても軸対称であり，ルジャンドル方程式は

$$(1-\mu^2) \frac{\partial^2 \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \mathcal{P}_n(\mu)}{\partial \mu} + n(n+1)\mathcal{P}_n(\mu) = 0, \quad (\text{A.30})$$

ここでルジャンドル多項式 $\mathcal{P}_n(\mu)$ は，

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} + \dots \right] \quad (\text{A.31})$$

または，ロドリゲスの公式 (Rodrigues's formula)

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n} \quad (\text{A.32})$$

によって与えられる．余緯度 θ は変形の対称軸から測られている．ルジャンドル多項式は帯球関数(zonal harmonics) であり，最初の 5 項は以下のように与えられる．

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{P}_1(\mu) = \mu = \cos \theta, \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \quad (\text{A.35})$$

$$\mathcal{P}_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta), \quad (\text{A.36})$$

$$\mathcal{P}_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9). \quad (\text{A.37})$$

球面調和関数 (surface harmonics) は直交関数であり, 球の表面でそれらの種の二重積分は, 以下のような有用な性質を持つ. 単位球 ($r = 1$) の面積要素は $\sin \theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$. ここで $Y_m(\mu, \phi)$, $S_n(\mu, \phi)$ を, それぞれ m 次, n 次の球面調和関数だとすると ($m \neq n$)

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_m(\mu, \phi) S_n(\mu, \phi) d\mu d\phi = 0. \quad (\text{A.38})$$

ここで2つの球面調和関数において両方 n 次で, そして1つが帯球関数 $\mathcal{P}_n(\mu)$ のとき,

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\mu, \phi) \mathcal{P}_n(\mu) d\mu d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(1), \quad (\text{A.39})$$

となり, $S_n(1)$ は $\mathcal{P}_n(\mu)$ の極での $S_n(\mu, \phi)$ の値である.

単位球における2つの点について考えてみる. 変化する点 (θ', ϕ') 固定された点 (θ, ϕ) の2点である. 球の中心でこれらの点に挟まれた角を ψ とし, 積分を考えると

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\theta', \phi') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi'. \quad (\text{A.40})$$

変化する点の座標軸を動かし, 変化する余緯度を定める新しい軸が固定点 (θ, ϕ) を通るようにとり, 変化する点の新しい角座標を (Θ', Φ') , ここで $\Theta' = \psi$ とする. 同様に $S_n(\theta', \phi')$ を $Y_n(\Theta', \Phi')$ とする. ここで式 (A.39) より

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_n(\Theta', \Phi') \mathcal{P}_n(\cos \Theta') d(\cos \Theta') d\Phi' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(1). \quad (\text{A.41})$$

しかしながら,

$$Y_n(1) = S_n(\theta, \phi). \quad (\text{A.42})$$

このことから

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\mu', \phi') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi' = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(\mu, \phi) \quad (\text{A.43})$$

ここで, $S_n(\mu, \phi)$ は (μ, ϕ) について, $S_n(\mu'$ は $\phi')$ は (μ', ϕ') について同じ形をした関数である (MacRobert 1967).

固定された点 P での, 均質で球に近い形状をした天体によるポテンシャルについて考える. この天体の表面は以下のように定義され

$$R(\theta') = C \left[1 + \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta') \right], \quad (\text{A.44})$$

ここで $\epsilon_2 (\ll 1)$ は定数であり, C は平均の半径を表す. P 点は内部 ($r < C$), 外部 ($r > C$) どちらにでもとれ, 球座標は (r, μ, ϕ) であり, $\mu = \cos \theta$, 余緯度 θ は潮汐バルジの対称軸

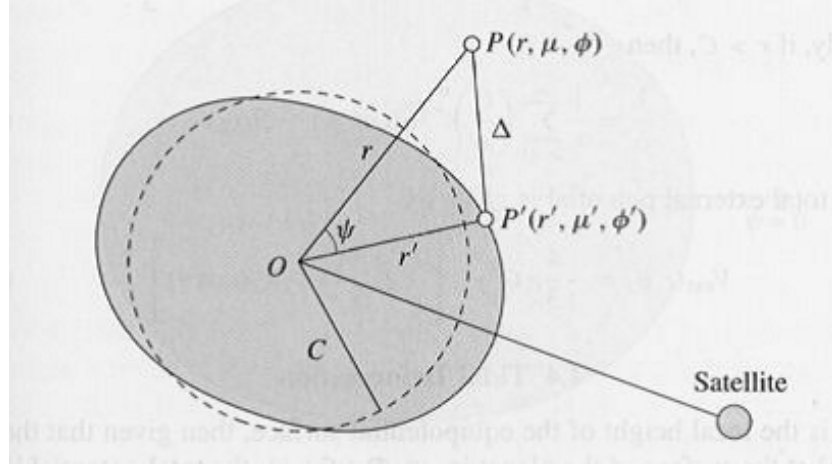


図 A.5: 点 P においての, 平均半径 C の球体から生じた, 変形した惑星によるポテンシャルと, 潮汐バルジによる物質の移動.

からとったものである (図 A.5). P 点での重力ポテンシャルは 2 つの部分に分けることができる. 1 つは球状の天体によるもので, 式 (A.22) と式 (A.23) によって与えられる. もうひとつは主なものではないが, 変形した天体と理想的な球体との間のわずかな物質の移動によるものである. ある点 $P'(r', \mu', \phi')$ において, 物質の薄い層の厚さは $\epsilon_2 C P_2(\mu')$ であり, 体積要素は $\epsilon_2 C^3 P_2(\mu') d\mu' d\phi'$ である. P 点での質量要素によるポテンシャルは距離 $PP' = \Delta$ によって決まり, ここで

$$\frac{1}{\Delta} = (C^2 + r^2 - 2Cr \cos \psi)^{-1/2}. \quad (\text{A.45})$$

である. $r < C$ ならば

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \left[1 + \left(\frac{r}{C}\right)^2 - 2\mu \left(\frac{r}{C}\right) \right]^{-1/2}, \quad (\text{A.46})$$

テイラー展開し r/C の次数で昇べきの順に項を並べると

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \left[1 + \left(\frac{r}{C}\right)\mu + \left(\frac{r}{C}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu^2\right) + \left(\frac{r}{C}\right)^3 \left(-\frac{3}{2}\mu + \frac{5}{2}\mu^3\right) + \dots \right], \quad (\text{A.47})$$

式 (A.34) から式 (A.37) をよく見てみると, 式 (A.47) は以下のように書け

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\epsilon_2). \quad (\text{A.48})$$

したがって, P 点における総ポテンシャルへの非中心のポテンシャルの大きさは

$$V_{\text{nc,int}} = -\gamma \mathcal{G} C^2 \epsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^2 \int \int \mathcal{P}_2(\mu') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi'. \quad (\text{A.49})$$

式 (A.43) より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^n \int \int \mathcal{P}_2(\mu') \mathcal{P}_n(\cos \psi) d\mu' d\phi' = \frac{4\pi}{5} \left(\frac{r}{C}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (\text{A.50})$$

したがって, 内部において P 点における総ポテンシャルへの非中心のポテンシャルの大きさは

$$V_{\text{nc,int}} = -\frac{4\pi}{5} \gamma \mathcal{G} r^2 \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta), \quad (\text{A.51})$$

そして, P 点における内部の総ポテンシャルはこの項と式 (A.22) によって得られる結果の和であり,

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = -\frac{4}{3} \pi C^3 \gamma \mathcal{G} \left[\frac{3C^2 - r^2}{2C^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{C^3} \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \right]. \quad (\text{A.52})$$

同様に, ($r > C$) ならば

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\epsilon_2) \quad (\text{A.53})$$

であり, 外部の総ポテンシャルは

$$V_{\text{ext}}(r, \theta) = -\frac{4}{3} \pi C^3 \gamma \mathcal{G} \left[\frac{1}{r} + \frac{3}{5} \frac{C^2}{r^3} \epsilon_2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \right]. \quad (\text{A.54})$$

A.4 潮汐による変形

$h(\psi)$ を等ポテンシャル面の局所的な高さ (local height) とし, 惑星表面の潮汐ポテンシャルが $-\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ で与えられたとき, 総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \psi) = -\frac{\mathcal{G} m_p}{B} + gh(\psi) - \zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.55})$$

ここで B は惑星の平均半径である. これは惑星表面上では ψ によらず, したがって, $h(\psi) = \zeta \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ であり, ψ は潮汐バルジの対称軸からとった. 平衡潮汐は堅く変形しない球状の惑星を覆う, 密度ゼロの浅い海の形を決める. もちろん, 実際は密度がゼロの流体も無いし, 曲がらない固体も無い. 我々は実際の固体物質, 流体物質の潮汐変形を理解する必要がある.

関連する要素を挙げるために, 単純な場合を考えてみると, 2つの部分から成る平均半径が B の惑星を考える. この惑星は均質で非圧縮な密度 σ の流体の海と, 均質で非圧縮な平均半径 A , 密度 ρ , 剛性率が μ の固体の核から成る (Street 1925, Dermott 1979a, 図 A.6). 剛性率 μ とは弾性体をせん断変形させるのに必要な単位せん断歪みあたりの応力の大きさである.

平衡潮汐は2次の球面調和関数 (second-order surface harmonic) で記述され、これは海が無く、遠くに1つ衛星が回っているような剛体球の惑星の表面付近での等ポテンシャル面を決める。惑星が完全な剛体でなく、海を持っているとしたら、海面と平衡潮汐が一致することはないだろう。これは海流の運動エネルギーによる効果を見捨てた場合でさえそうである。衛星の重力場に対する海や核の反応を計算するために、潮汐バルジそのものによる重力場 (self gravitation) の効果と、固体内部の弾性力の効果を考えなくてはならない。核と海の両方で起こる全ての力の振る舞いのもとでの、核の弾性変形も考えなくてはならない。それはつまり、惑星の様々な部分に生じる潮汐の効果を考えているということで、変形した核のポテンシャルと、海の潮汐そのものを考えるということである (Street 1925)。

潮汐を引き起こすポテンシャルは2次の球調和関数なので、惑星の変形は同じ2次の調和関数によって記述されねばならない (Love 1911)。そうでないと、例えば海面が等ポテンシャル面にならなくなってしまう。A.2節ですで見られたように、潮汐ポテンシャルは角度 ψ にのみ依存し、これは2つの中心点を結んだ線について軸対称であることを意味する。したがって、核の境界 (core boundary) と海面 (ocean surface) の変形した形は以下のように表せて

$$R_{cb}(\psi) = A[1 + S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)] \quad (\text{A.56})$$

$$R_{os}(\psi) = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)] \quad (\text{A.57})$$

ここでそれぞれ、 S_2, T_2 は定数である。 S_2 と T_2 を決めるのに (i) 静的な海の表面は等ポテンシャル面であるということ (ii) 平均的な核の境界に生じる全ての力の平衡を考えること、を用いる。

海の中のポテンシャル $V_o(r, \psi)$ は三つのポテンシャルの足し合わせであり、(i) ひとつめは衛星による潮汐ポテンシャル

$$V_3(r, \psi) = -\frac{\mathcal{G}m_s}{a^3} r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) = -\zeta g \left(\frac{r}{B}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.58})$$

これは式 (A.9)¹¹ と式 (A.12)¹² を一般化したものであり、(ii) ふたつめは海による $V_{int}(r, \psi)$ 、(iii) みつつめは核による $V_{ext}(r, \psi)$ である。よって、海の内部の総ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_o(r, \psi) = & -\zeta g \left(\frac{r}{B}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \\ & -\frac{4}{3} \pi B^3 \sigma \mathcal{G} \left(\frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{B^3} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \\ & -\frac{4}{3} \pi A^3 (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{5} \frac{A^2}{r^3} S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

¹¹ 式 (A.9) : $V_3(\psi) = -\frac{\mathcal{G}m_s}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

¹² 式 (A.12) : $V_3(\psi) = -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

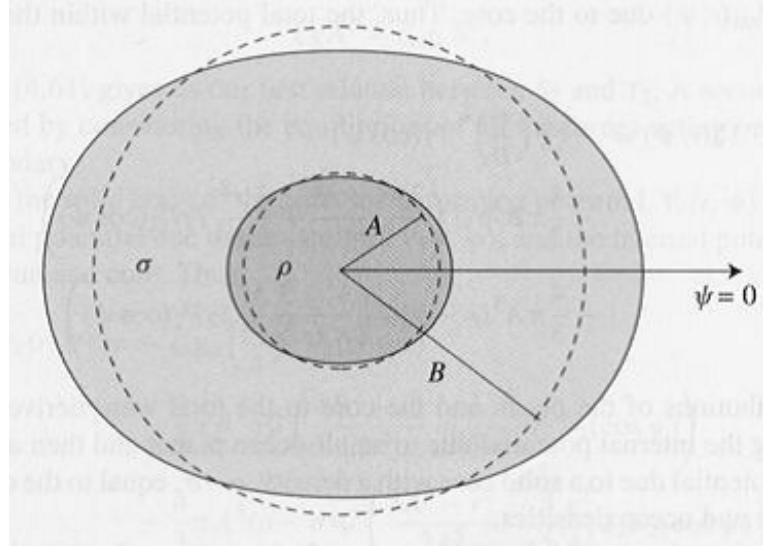


図 A.6: 平均半径 A , 密度 ρ の変形した核と, それを覆う平均半径 B , 密度 σ の変形した海をを持つ惑星のモデル. 半径 A, B の円は点線で表されている.

総ポテンシャルへの海と核の寄与は, 海に覆われた惑星による内側のポテンシャルを計算することと, 密度 $\rho - \sigma$ (核と海の密度の違いと等しい) の固体の核による外側のポテンシャルを加えることによって得られる.

海面のポテンシャル $V_{\text{os}}(r, \psi)$ を計算するために, 表面の式を $r = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)]$ として式 (A.59) に入れ, その結果を展開し, $\zeta/B, S_2, T_2$ の 2 次以上の項を無視すると¹³

$$V_{\text{os}}(r, \psi) = -\zeta g \mathcal{P}_2(\cos \psi) - \frac{4}{3} \pi B^2 \sigma \mathcal{G} \left(1 - \frac{2}{5} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) - \frac{4}{3} \pi \frac{A^3}{B} (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left(1 - T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) + \frac{3}{5} \left(\frac{A}{B} \right)^2 S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \quad (\text{A.60})$$

この式の ψ によらない項は, 圧縮力だけを引き起こす. 核と海を非圧縮としたから, これらの項は惑星の形を決めるのに何の影響も及ぼさないので, 無視できる. 海面が等ポテンシャル面なので, ψ に依存する項の足し合わせはゼロになる. したがって¹⁴

$$\frac{\zeta_c}{A} = \left[\frac{2\sigma}{5\rho} + \left(\frac{A}{B} \right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \right] T_2 - \frac{3}{5} \left(\frac{A}{B} \right)^5 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) S_2. \quad (\text{A.61})$$

¹³テキストの第 2 項は誤植 $-\frac{4}{3} \pi B^2 \sigma \mathcal{G} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right)$

¹⁴ポテンシャル $\frac{Gm_p}{B} = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} \rho B^2$ で割って, 無次元の量で整理.

ここで

$$\zeta_c = \frac{m_s}{m_c} \left(\frac{A}{a} \right)^3 A, \quad (\text{A.62})$$

であり, m_c は核の質量, そして

$$g_c = \frac{\mathcal{G}m_c}{A^2} \quad (\text{A.63})$$

これは核の境界での重力である. ζ_c は核の境界に生じる“平衡潮汐”の大きさであり, 式 (A.13)¹⁵ の ζ と以下のような関係を持つ

$$\zeta g A^2 = \zeta_c g_c B^2. \quad (\text{A.64})$$

式 (A.61) は S_2 と T_2 の間にある 1 つ目の関係を与える. 2 つ目の関係は平均の核の境界に働く全ての力の平衡を考えることにより得られる.

固体である核の内部では, 変形ポテンシャル $V_c(r, \psi)$ は衛星による潮汐ポテンシャル $V_3(r, \psi)$ と, 核と海による内部ポテンシャルの和である. よって

$$\begin{aligned} V_c(r, \psi) = & -\zeta_c g_c \left(\frac{r}{A} \right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \\ & - \frac{4}{3} \pi B^3 \sigma \mathcal{G} \left(\frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{B^3} T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right) \\ & - \frac{4}{3} \pi A^3 (\rho - \sigma) \mathcal{G} \left(\frac{3A^2 - r^2}{2A^3} + \frac{3}{5} \frac{r^2}{A^3} S_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

惑星の中心と同じ中心を持つ核の中の球体を考える. r は変化しないので, 有効な変形ポテンシャルは $V_c(r, \psi)$ の中の $\mathcal{P}_2(\cos \psi)$ だけに依存する項によって与えられる. その他の項は圧縮力を引き起こす項なので無視できる. したがって有効な変形ポテンシャルは以下のように書け

$$V_c(r, \psi) = -Z r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.66})$$

ここで,

$$Z = \frac{g_c}{A} \left(\frac{\zeta_c}{A} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2) + \frac{3}{5} S_2 \right). \quad (\text{A.67})$$

Chree(1896a)によると, このような変形ポテンシャルによる力のもとでの核の歪み (yielding) は, 平均の核の境界 $r = A$ で単位面積に働く, 大きさ $\rho Z A^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ の外向きの垂直の力によって起こる歪みと同じである.

他の圧力もこの境界で働く. それらは, 海の静水圧と固体核の潮汐による荷重項から生じるものである. 例えば, $(B - A) \ll B$ であるような浅い海では, 海の中で g の変化が無く, これらの圧力が生じる原因は (i) ψ による海の深さの変化, (ii) ψ による惑星の

¹⁵式 (A.13) : $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$

中心からの核の境界までの距離の変化, の2つである. これらの圧力は, 重力加速度と密度と潮汐の高さの積によって得られ以下のように書け,

$$P_o(\psi) = g\sigma B(T_2 - S_2)\mathcal{P}_2(\cos\psi) \quad (\text{A.68})$$

$$P_c(\psi) = g_c\rho AS_2\mathcal{P}_2(\cos\psi). \quad (\text{A.69})$$

深い海では g は一定でなく, そして核の中の潮汐による荷重項はそのまま変わらず残っているが, 核における静水圧の角変化は, もはや海の潮汐の高さのみによっては決められない. 海の中での重力加速度の角変化も利用せねばならない.

一般に深い海では海による核の境界での圧力は以下のように与えられ¹⁶,

$$P_o(\psi) = \int_{R_{cb}}^{R_{os}} \sigma(r) \frac{\partial V_o(r, \psi)}{\partial r} dr, \quad (\text{A.70})$$

ここで, 核の境界から海面まで積分した. 今のモデルでの海は非圧縮で密度が一定なので,

$$P_o(\psi) = \sigma[V_o(R_{os}, \psi) - V_o(R_{cb}, \psi)]. \quad (\text{A.71})$$

さらに, ポテンシャルの変化する部分だけが変形を起こす力(ここでは圧縮を考えない)に寄与するのであり, そして海面は等ポテンシャル面なので, $V_o(R_{os}, \psi)$ は一定であり, 無視できる.

核の境界でのポテンシャル $V_{cb}(\psi)$ は, 核の境界での式 $R_{cb} = A[1 + S_2\mathcal{P}_2(\cos\psi)]$ を式 (A.59) か式 (A.65) に入れることで得られ, 結果を展開し ζ/B , S_2 , T_2 の2次以上の項を無視すると

$$V_{cb}(\psi) = \text{constant} - Ag_c \left(\frac{\zeta_c}{A} + \frac{3\sigma}{5\rho}(T_2 - S_2) - \frac{2}{5}S_2 \right) \mathcal{P}_2(\cos\psi), \quad (\text{A.72})$$

ここで ψ は第2項, 式の右手側にある方に依存しており, これは核の境界の圧力の変化する部分 $P_o(\psi)_\psi$ に寄与する. したがって

$$P_o(\psi)_\psi = \sigma Ag_c \left(\frac{\zeta_c}{A} + \frac{3\sigma}{5\rho}(T_2 - S_2) - \frac{2}{5}S_2 \right) \mathcal{P}_2(\cos\psi). \quad (\text{A.73})$$

平均の核の境界における単位面積に生じる有効な外向きの垂直な力の合計は, 核内の弾性力と海と核の潮汐による荷重項の和である. これを $X\mathcal{P}_2(\cos\psi)$ と書き, ここで¹⁷

$$\begin{aligned} X &= \rho A^2 Z - P_o(\psi)_\psi - \rho g_c A S_2 \\ &= \frac{2}{5} \rho g_c A \left(1 - \frac{\sigma}{\rho} \right) \left(\frac{5}{2} \frac{\zeta_c}{A} - S_2 + \frac{3\sigma}{2\rho} (T_2 - S_2) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

¹⁶ 静水圧平衡の式の積分形. 微分形は $\frac{dP}{dr} = -\rho g$.

¹⁷ 第1項 $\rho A^2 Z$ は, Chree(1896a) による関係より, 変形ポテンシャルよる力を弾性力として考えた.

$\sigma \rightarrow \rho$ となると, $X \rightarrow 0$ となり, 海が静水圧平衡となっている場合はこれは必ず実現する.

Love(1944) によると, この変形圧力による固体核の半径の変化は

$$\Delta R(\psi) = \frac{5}{19} \frac{A}{\mu} X \mathcal{P}_2(\cos \psi), \quad (\text{A.75})$$

これは $AS_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$ と等しくなっている. これにより S_2 と T_2 の2つ目の関係がわかり,

$$S_2 = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \left(\frac{5}{2} \frac{\zeta_c}{A} - S_2 + \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\rho} (T_2 - S_2)\right) \quad (\text{A.76})$$

ここで $\tilde{\mu}$ は固体核の有効剛性率(effective rigidity)であり, 無次元の量で以下のように定義される

$$\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g_c A}. \quad (\text{A.77})$$

これは核の境界における弾性力と重力の比である.

$\tilde{\mu} \ll 1$ ならば, 核は流体として振る舞い, 一方 $\tilde{\mu} \gg 1$ では核内での弾性力が優位である. $\sigma = \rho$ ならば $S_2 = 0$ で, 弾性核は変形しない. 惑星に海がなかったら, $\sigma = 0$ であり, 式 (A.76) から孤立した核での潮汐の大きさは

$$AS_2 = \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}}. \quad (\text{A.78})$$

一般に以下のように書け

$$AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}} \quad \text{および} \quad BT_2 = H \frac{5}{2} \zeta, \quad (\text{A.79})$$

ここで F は無次元の量で, 核の潮汐の大きさにおける海の影響の大きさであり, H は惑星の外形における内部構造の影響の大きさである. 式 (A.61) と式 (A.76) から T_2 を削除すると,

$$F = \frac{(1 + \tilde{\mu})(1 - \sigma/\rho)(1 + 3/2\alpha)}{1 + \tilde{\mu} - \sigma/\rho + (3\sigma/2\rho)(1 - \sigma/\rho) - (9/4\alpha)(A/B)^5(1 - \sigma/\rho)^2} \quad (\text{A.80})$$

$$H = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + \tilde{\mu} + (3/2)(A/B)^2 F \delta}{(1 + \tilde{\mu})(\delta + 2\sigma/5\rho)} \right) \quad (\text{A.81})$$

ここで

$$\alpha = 1 + \frac{5}{2} \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \quad \text{および} \quad \delta = \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \quad (\text{A.82})$$

また $\langle\rho\rangle$ は平均密度である. 惑星が完全に流体なら, もしくは熱による流動によって固体核が静水圧平衡になると (衛星の自転速度が軌道の平均運動と等しい, つまり同

期(synchronous)の衛星における潮汐バルジへの応用がある), $\tilde{\mu} = 0$ であり, H の静水値は¹⁸

$$H_h = \frac{2\langle\rho\rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right), \quad (\text{A.83})$$

ここで

$$\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho} \quad (\text{A.84})$$

(Dermott 1979a) .

これらの結果を用いて, 浅く均一な海を持つ惑星における潮汐の大きさを決める. $A = B$, $\zeta_c = \zeta$, $\langle\rho\rangle = \rho$ ならば, 海面は等ポテンシャル面になり, 式 (A.61) は

$$\frac{\zeta}{A} = \frac{2}{5}S_2 + \left(1 - \frac{3\sigma}{5\rho}\right)(T_2 - S_2). \quad (\text{A.85})$$

式 (A.61) と式 (A.76) から S_2 のみを含む項を削除すると

$$A(T_2 - S_2) = \frac{\zeta\tilde{\mu}}{1 - \sigma/\rho + \tilde{\mu}(1 - 3\sigma/5\rho)} \quad (\text{A.86})$$

これは海の潮汐の大きさである (Chree 1896b) . $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ とすると $A(T_2 - S_2) \rightarrow 0$ である. さらに, $\sigma = \rho$ ならば

$$A(T_2 - S_2) = \frac{5}{2}\zeta \quad (\text{A.87})$$

であり, $\tilde{\mu}$ に依存しない. したがって, 核と海が同じ密度を持つとき, 核は変形せず, 海の潮汐の大きさは式 (A.13)¹⁹で与えられる“平衡”潮汐よりも 5/2 倍大きい.

浅い海の場合, 固体潮汐の大きさは式 (A.86) の $T_2 - S_2$ を式 (A.61) に入れることによりわかる. このことにより

$$AS_2 = \frac{5}{2}\zeta \left[\frac{(1 - \sigma/\rho)}{1 - \sigma/\rho + \tilde{\mu}(1 - 3\sigma/5\rho)} \right]. \quad (\text{A.88})$$

海の無い惑星では, $\sigma = 0$ となり

$$AS_2 = \frac{(5/2)\zeta}{1 + \tilde{\mu}}, \quad (\text{A.89})$$

これは Lord Kelvin (Thompson 1863) による. Kelvin はこの結果を $AS_2 \approx 0.6 \zeta$ の半月周潮の場合に適用し, 地球の剛性は $\sim 1.2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ であり, 未圧縮の鋼より $\sim 50\%$ 大きな剛性をもつことがわかった. 当時は地球の中はどろどろに融けていると思われていたので (Bullen 1975), この結果は驚きであった.

¹⁸テキスト $\frac{2\langle\rho\rangle}{5\sigma}$ は誤植

¹⁹式 (A.13) : $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a}\right)^3 R_p$

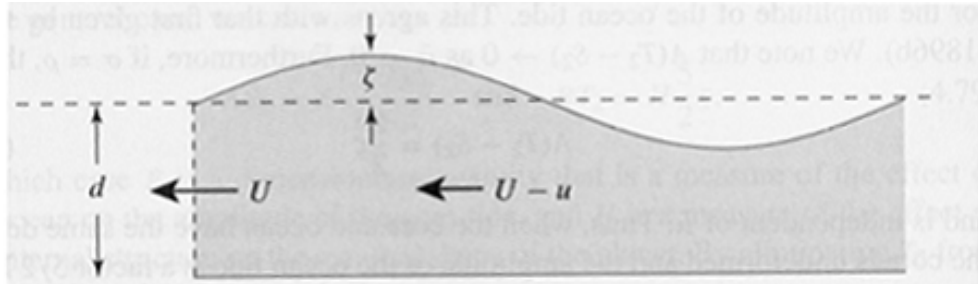


図 A.7: 均一で深さが d で 2 本の平行な緯度線に仕切られた赤道の運河での津波 (tidal wave) の図．地球を中心に，月と共に自転している基準の座標においては，潮汐バルジは変動しない．固体地球に対するバルジの速度は U である．しかしながら，潮汐バルジにある流体は，海の深さについて均一な速度 u の波によって与えられる．

地球の場合，より現実的には，密度 ρ で剛性が μ の固体核を持ち，密度 σ の浅い海で覆われている考えられている．この場合，海の中と固体核の潮汐の大きさは式 (A.86) と式 (A.88) によって得られる．しかしながら，これらの大きさは，海は静水圧平衡であるとして計算しており，海での潮流は海面の形を決めるのに関係ないとしている．地球では，これは良い想定とは言えない．

海流の影響は海盆 (ocean basin) の自由振動周波数に依存し，これは海盆の大きさ，形，深さ，によって決まる．具体的に考えるために，Proudman(1953) によると，均一で深さが d で 2 本の平行な緯度線に仕切られた赤道の運河を考える．地球を中心に，月の平均運動と共に自転している基準の座標においては，潮汐バルジは変動しない．したがって地球表面に対するバルジの速度は $U = 2\pi A/T_E \approx 500 \text{ m s}^{-1}$ ここで T_E は地球の自転周期である．しかしながら U は海での潮流の速度ではない．潮汐バルジにある流体は海の深さについて均一に速度 u で流れる (図 A.7)．与えられた緯度で， ζ が平均海面の上の高さを表しているならば，連続の方程式から

$$(U - u)(d + \zeta) = Ud \quad (\text{A.90})$$

となり， $\zeta \ll d$ ならば

$$u = \frac{\zeta}{d}U \quad (\text{A.91})$$

が得られる．地球の海の深さの平均は $\sim 4 \text{ km}$ であり， $u \sim 0.1 \text{ m s}^{-1}$ である．ベルヌーイの定理より，静水圧による仕事を，流線に沿った流れでの流体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーと関連づけて

$$\frac{1}{2}(U - u)^2 + g\zeta + \Psi = \text{constant}, \quad (\text{A.92})$$

ここで Ψ は潮汐ポテンシャルである．運河の表面で $\Psi = -g\bar{\zeta}$ とすると， U^2 は一定で， $u^2 \ll uU$ であり

$$Uu = g(\zeta - \bar{\zeta}). \quad (\text{A.93})$$

式 (A.91) から u を置き換えると

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{1 - U^2/gd}. \quad (\text{A.94})$$

深さ $d_{\text{res}} = U^2/g \approx 22$ km の赤道の運河で地球に対して共鳴が起こり，海の深さの平均は d_{res} より小さいので，潮汐はひっくり返る．この考え方は地球には完全にはあてはめられず，なぜならほぼ全球を覆う海のため，総潮汐ポテンシャルが潮流から分かれていると考えることができないからである．しかしながら式 (A.94) よって，地球の海の形を計算するとき，海流による影響を含め，様々な海盆の共鳴の可能性を考えなくてはならないということがわかる．

A.5 自転による変形

A.4 節では，惑星のまわりをまわる衛星によって起こる潮汐により，惑星表面がどのように変形するかを見てきた．核とマントルによって成る惑星を考えることで，それぞれの変形についての式が得られる．最も重要なことは，変形した惑星の形 (図 A.6) は惑星と衛星を結ぶ線に沿った半長軸 a ，対称軸 (惑星と衛星を結ぶ線) と垂直に交わる円を描く半短軸 $b = c$ の偏心回転楕円体によって見積もられる，ということである．回転楕円体は，対称軸からとった角度 ψ の 2 次のルジャンドル多項式 $P_2(\cos \psi)$ を用いて形作られる．この節では，潮汐変形によって導かれた解析結果の多くが，自転変形に直接適用できるということを見ていく．

角速度 Ω で自転する剛体の惑星の回転楕円体を考えてみよう (図 A.8)．表面上の点 P は遠心加速度 $\mathbf{a}_{\text{cf},x} = \Omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$ を受けており $x = r \sin \theta$ なので， $\mathbf{a}_{\text{cf},x} = \Omega^2 x \hat{\mathbf{x}}$ ．対称による $y - z$ 平面上の同様の点は $\mathbf{a}_{\text{cf},y} = \Omega^2 y \hat{\mathbf{y}}$ を受ける．惑星の自転は自転軸に沿った方向には加速度を起こさない．それ故に，表面上の任意の点 (x, y, z) は以下の加速度を受ける

$$\mathbf{a}_{\text{cf}} = \Omega^2 (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}). \quad (\text{A.95})$$

遠心ポテンシャル V_{cf} により，この遠心加速度を考えることができ， $\mathbf{a}_{\text{cf}} = -\nabla V_{\text{cf}}$ で，極からの余緯度で

$$V_{\text{cf}}(r, \theta) = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.96})$$

ここで惑星の表面を覆う海を考えてみよう．流体のうける総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} + V_{\text{cf}}(r, \theta). \quad (\text{A.97})$$

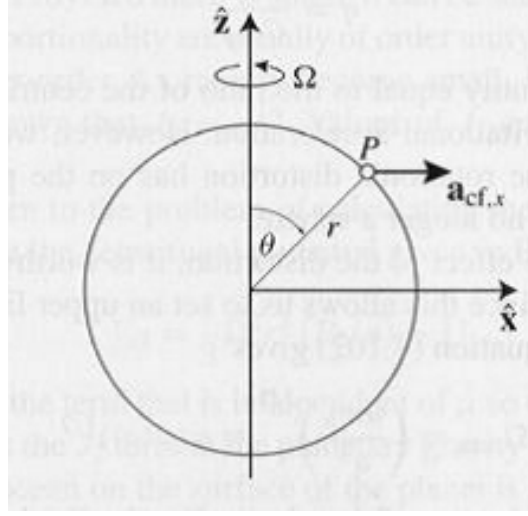


図 A.8: 加速度 Ω で自転する惑星上の点 $P(x-z$ 平面内) が受ける加速度．ここで θ は z 軸 (自転軸) からとった角度であり, r は動径方向の距離である．

平衡ならば, 流体の表面は等ポテンシャル面になり, 局所的に重力加速度と遠心加速度の和に対して垂直になっている．海面の球体からのずれは小さいと仮定して,

$$r_{\text{ocean}} = a + \delta r(\theta) \quad (\text{A.98})$$

ここで $a = r_{\text{equatorial}}$ であり, 惑星の赤道半径 (equatorial radius) である．よって表面のポテンシャルは一定であり

$$V_{\text{total}}(\text{surface}) \approx -\frac{\mathcal{G}m_p}{a} + \frac{\mathcal{G}m_p}{a^2}\delta r - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \sin^2 \theta - \Omega^2 a \sin^2 \theta \delta r. \quad (\text{A.99})$$

ほとんどの惑星で $\Omega^2 a \ll \mathcal{G}m_p/a^2$ なので (以下で述べる), 式 (A.99) の最後の項は無視できる．したがって

$$\delta r \approx \text{constant} + \frac{\Omega^2 a^4}{2\mathcal{G}m_p} \sin^2 \theta. \quad (\text{A.100})$$

これらのことから, 極において, 自転の影響によって平らになると考えられる．変形の程度は, 惑星の偏平性 (oblateness), もしくは偏平率 (flattening) によって見積もることができる．

$$f = \frac{r_{\text{equatorial}} - r_{\text{pole}}}{r_{\text{equatorial}}}. \quad (\text{A.101})$$

以上のことから, 惑星において $f \approx q/2$ となり, ここで

$$q = \frac{\Omega^2 a^3}{\mathcal{G}m_p} \quad (\text{A.102})$$

これは無次元の量で赤道での遠心加速度と重力加速度の比と等しい．しかしながら，惑星の重力場において，惑星がもはや球体から変形しているということを考えると，自転による変形がもつフィードバックの効果をここでは無視している．

変形による効果を取り入れる前に，極端な場合を考えてみるとよい． $q \rightarrow 1$ とすると，惑星の自転速度の上限が得られる．式 (A.102) より²⁰

$$\Omega_{\max} \approx \left(\frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} \right)^{1/2} \approx 2(\mathcal{G}\langle\rho\rangle)^{1/2}, \quad (\text{A.103})$$

ここで $\langle\rho\rangle$ は惑星の平均密度である．地球では $\langle\rho\rangle = 5.52 \text{ g cm}^{-3}$ であり， $\Omega_{\max} \approx 1.2 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ そのとき自転周期は $P_{\min} = 1.4 \text{ h}$ である．木星では $P_{\min} \approx 2.9 \text{ h}$ ，実際の自転周期は 9.9 h である．

自転による偏平により，ほとんどの惑星は（しかしながら衛星ではほとんどあてはまらないが）偏心回転楕円体と近似して扱うことができる（つまり，2つの等しい長軸 ($a = b$) と，1つの短軸 (c) を持つ3軸楕円体）．ポテンシャル理論から得られる基本的な結果により，対称軸を持つ天体の，外側の重力ポテンシャルは以下のように書け²¹

$$V_{\text{gravity}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \mathcal{P}_n(\cos \theta) \right], \quad (\text{A.104})$$

ここで m は総質量で， $R(= a$ 自転変形の場合の a と等しい) は赤道半径， J_n は無次元の定数，A.3節で見られたように， $\mathcal{P}_n(\cos \theta)$ は n 次のルジャンドル多項式である．座標の原点を天体の重心にとったので， $n = 1$ の項が無いことに注目されたい． J_n は天体の内部の質量分布を反映しており，ひとつの惑星について実験によって決められなくてはならない．これらの量で，最も重要なのは J_2 であり，主軸まわりの3つの慣性能率 A, B, C についての単純な物理的解釈をすることができる．MacCullagh's 定理²²，により以下のように書け (Cook 1980)

$$J_2 = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{ma^2} \approx \frac{C - A}{ma^2}, \quad (\text{A.105})$$

ここで自転による歪みのように $A \approx B$ のとき，近似ができる．一般的に， J_n は積分によって与えられ

$$J_n = +\frac{1}{mR^n} \int_0^R \int_{-1}^{+1} r^n \mathcal{P}_n(\mu) \rho(r, \mu) 2\pi r^2 d\mu dr, \quad (\text{A.106})$$

²⁰式 (A.103) の右側 $a(\mathcal{G}\langle\rho\rangle)^{1/2}$ は誤植．

²¹式 (A.104) で，テキスト $\mathcal{P}_2(\cos \theta)$ は誤植

²² $I = \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta$

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_s}{r} - \frac{\mathcal{G}(A + B + C - 3I)}{2r^3}$$

ここで $\mu = \cos \theta$, $\rho(r, \mu)$ は内部の密度分布である. $\mathcal{P}_n(\mu)$ は奇関数なので, 奇数の n のとき, $J_3 = J_5 = J_7 = \dots = 0$ となり, 惑星において北半球と南半球は対称である. 実際は, ゼロでない J_3 の値が測られているのは地球だけである. q は小さい場合, $J_n \propto q^{n/2}$ と書け, ここで比例定数は普通 1 のオーダーである. それ故に, 一般に $q \ll 1$ なので, J_n の高次の項は急速に小さくなる. 均一な密度を持つ惑星では, $J_2 = q/2$ である.

ここで自転する惑星の偏平率を計算する問題に戻ることができる. 式 (A.96) で与えられた遠心ポテンシャルを以下のように書け

$$V_{cf} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\mu) - 1]. \quad (\text{A.107})$$

ここで μ に依存しない項は無視できる. これにより, 惑星の重力場において V_{cf} が J_2 の項と同じ角依存性を持つように表現することができる. 今, 惑星の表面の海による総ポテンシャルは

$$V_{\text{total}}(r, \theta) = -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} + \left[\frac{\mathcal{G}m_p a^2}{r^3} J_2 + \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 \right] \mathcal{P}_2(\mu), \quad (\text{A.108})$$

ここで J_4, J_6 などは無視した. すでに出てきたように, 表面を等ポテンシャルとして $r = a + \delta r(\theta)$ と書く. 式 (A.108) に代入して展開すると

$$\delta r = \text{constant} - \left[J_2 + \frac{1}{3}q \right] R \mathcal{P}_2(\mu). \quad (\text{A.109})$$

次の式を得るために, この δr の新しい表現に式 (A.101) における f の定義を用いることができる.

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}q, \quad (\text{A.110})$$

以前に得た結果 $f \approx q/2$ を置き換えている. Yoder(1995) を用いると, f の計算値と観測値を比べることができる. 地球では $f_{\text{calc}} = 0.003349$, $f_{\text{obs}} = 0.003353$ である. 木星の場合 $f_{\text{calc}} = 0.06670$, $f_{\text{obs}} = 0.06487$ である. この値は木星の円盤像において極が平らになっているのを目で確認できるほど大きいものである. この比較から, 式 (A.110) は明らかに偏平率のよい見積もりを与えていると言える.

潮汐変形も自転変形も両方, 表面を持ち上げて, 2 次のルジャンドル多項式の関係によって形作られるという事実は, 核とマントルによって成る惑星の潮汐変形について述べた A.4 節の中で発展した理論は, 自転変形においても直接適用できるといことを意味する. どちらの場合においても変形の程度を測ることで, 惑星の内部構造についての情報を明らかにすることができる. もちろんその理論は, 衛星が (i) 惑星によって起こる潮汐, (ii) 衛星自身の自転, によって変形する場合にも同じように適用することができる. A.7 節では, 同期自転する衛星における変形という特別な場合について述べる.

惑星の J_2 は、衛星やリング物質などの軌道天体に作用する重力場に修正を加える。主要な結果は、軌道運動をしている天体の楕円の軌道が回転する、つまり空間における歳差運動である。力学的な結果については、この後の節でより詳しく議論されている。今の目的のためには、以下のことを知っていれば十分であり、 J_2 による歳差運動の効果は、衛星の軌道、または細い偏心的なリングを監視することで直接観測することができる。それ故に、 J_2 は観測可能な量であり、式 (A.105) により、 J_2 を、2つの主慣性能率の差である $C - A$ と関連付けることができる。

しかしながら、それぞれ別々に計算するために、それによって内部のモデルを知るために、 C と A の間の関係がさらに必要である。地球におけるひとつの方法は、自転によって偏平している地球における、太陽と月によって及ぼされるトルクの結果を観察することである。これは地球の自転軸を、地球の軌道面に対して垂直に、 $(C - A)/C$ に比例した割合で回転させ (Cook 1980)、この効果は月太陽歳差運動 (luni-solar precession) と呼ばれる。現在では、この C と A を決める方法は、地球 - 月系にのみあてはめることができるものである。他の惑星では、他の方法を用いなければならない。

A.6 Darwin-Radau Relation

Darwin-Radau relation (参照例 Cook 1980) は、慣性能率の係数 C/mR^2 (m は天体の質量、 R は平均半径) を惑星または衛星における q , f , J_2 の値と関連付ける近似式である。この関係は、Clairaut (1743) に基づいた Radau (1885) によって最初に見出され、Darwin (1899) もこの問題に寄与している。基礎となる仮定は、関連する天体は静水圧平衡にあるということである。この関係はいくつもの違った形で表現できるが、ここでは Cook (1980) による形を適用し

$$\frac{C}{mR^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5q}{2f} - 1 \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{A.112})$$

慣性能率の係数 \bar{C} を無次元の量として以下のように定義し

$$\bar{C} = \frac{C}{mR^2} \quad (\text{A.113})$$

式 (A.110) で与えられた J_2 , q , f の関係を用いると、式 (A.112) の Darwin-Radau relation は以下のように書くことができ

$$\frac{J_2}{f} = -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2. \quad (\text{A.114})$$

しかしながら，この形の Darwin-Radau relation によって与えられる \bar{C} と J_2/f の関係は，A.4 節で考えた，より現実的な惑星の変形モデルを用いて得られる，より一般的な結果の極限の場合である．核 - マントルモデルにより，Dermott(1979b) は以下を得た

$$\bar{C} = \frac{2}{5} \left[\frac{\sigma}{\langle \rho \rangle} + \left(1 - \frac{\sigma}{\langle \rho \rangle} \right) \left(\frac{A}{B} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.115})$$

慣性能率の定義と，知られている核とマントルの大きさと変形を用いて，第一原理からこの結果が得られる．衛星の表面と核 - マントル境界面は平衡であるとする，式 (A.79)²³ で用いられた係数 H は式 (A.83)²⁴ で与えられる静水値 H_h を持つ．Dermott(1979b) は J_2/f の値と H_h を以下の方程式によって関連付けた

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5H_h} \right). \quad (\text{A.116})$$

δ と γ の式によって²⁵，与えられた値 A/B で， J_2/f を H_h に関連付けることができ

$$\frac{J_2}{f} = \frac{2}{3} + \frac{\bar{C} - \frac{2}{5}(A/B)^2}{1 - (A/B)^2} + \frac{8 - 20(A/B)^2 + 10\bar{C}[5(A/B)^3 - 2]}{12[(A/B)^5 - 1] + 15\bar{C}[2 - 5(A/B)^3 + 3(A/B)^5]}. \quad (\text{A.117})$$

この式は2つの極限が考えられ

- 核が点の場合 $A/B \rightarrow 0$ で

$$J_2/f \rightarrow \bar{C}. \quad (\text{A.118})$$

- Darwin-Radau relation の場合 $A/B \rightarrow 1$ で

$$J_2/f \rightarrow -\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\bar{C} - \frac{15}{8}\bar{C}^2. \quad (\text{A.119})$$

図 A.9 は，核が点のモデル，Darwin-Radau モデル， $A/B = 0.5$ の一般的な核 - マントルのモデルにおける， \bar{C} の関数としての J_2/f をプロットしたものを示している．地

²³式 (A.79) $AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1+\tilde{\mu}}$ および $BT_2 = H \frac{5}{2}\zeta$

$$H = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + \tilde{\mu} + (3/2)(A/B)^2 F \delta}{(1 + \tilde{\mu})(\delta + 2\sigma/5\rho)} \right)$$

²⁴式 (A.83)

$$H_h = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right)$$

²⁵式 (A.82) $\delta = \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)$ ，式 (A.84) $\gamma = \frac{2}{5} + \frac{3\sigma}{5\rho}$

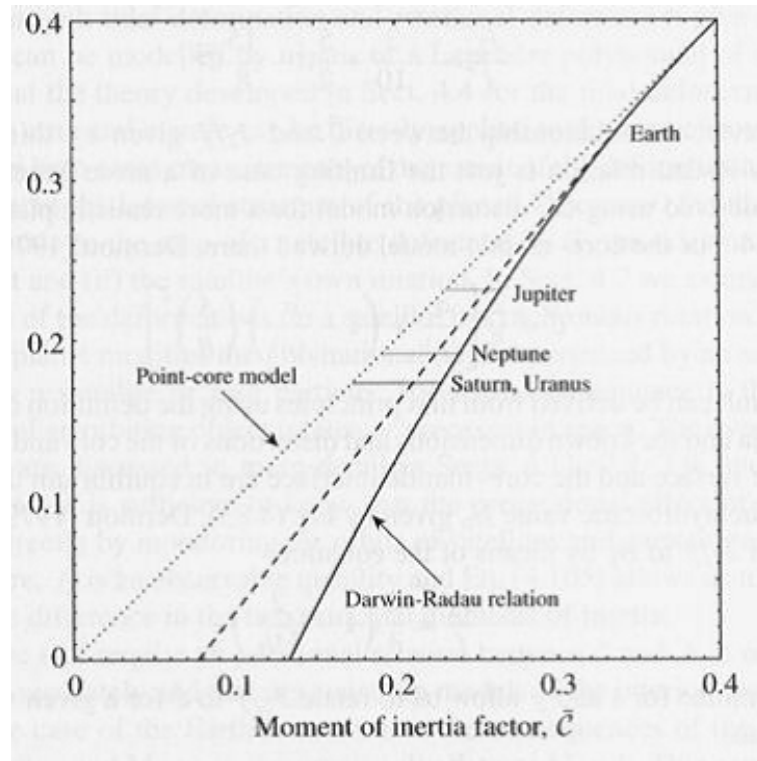


図 A.9: 慣性能率 \bar{C} の関数としての J_2/f , それぞれ (i) 核が点のモデル (点線), (ii) $A/B = 0.5$ のモデル (破線) , (iii) Darwin-Radau relation の場合 (実線) . 地球と巨大惑星の J_2/f の値が示してある .

球と巨大惑星における J_2/f の知られている値が平線で示してあり, それぞれの惑星における \bar{C} の極限值も示している . J_2/f の値で与えられる \bar{C} の値の幅が, J_2/f が大きくなるにつれて小さくなっていくことに注目されたい . キーポイントは, J_2/f の値により, 慣性能率を制約することができるということである . 式 (A.105) から²⁶ $C - A$ の値と, この情報を結び付けると, C と A の推定値が得られる . このような推定値は惑星内部のモデルの制約となる .

²⁶式 (A.105)

$$J_2 = \frac{C - \frac{1}{2}(A+B)}{ma^2} \approx \frac{C - A}{ma^2}$$

A.7 衛星の形と内部構造

静水圧平衡にある衛星を考えてみよう．衛星は同期自転し，惑星に対して赤道に近い軌道を取り，円に近い軌道をとると仮定する．衛星は惑星により潮汐変形を受け，同様に自転により自転変形も受ける．以上の理論と，衛星の平均運動 n が自転の角速度と等しいことから，変形の結果，衛星の形が三軸楕円体になることがわかる．実際に，静水圧平衡にある衛星では半長軸と半短軸に特有の関係があるので，衛星の形を正確に測ることにより，平衡かどうか決めることができ，また，他のデータと結びつけることにより，衛星の内部構造の特徴を推測することができる．

衛星の自転により起こる，点 (r, θ, ψ) での遠心ポテンシャルは

$$V_{\text{rotational}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) \quad (\text{A.120})$$

(式 (A.107) 参照²⁷)，ここで θ は半径ベクトルと垂直軸の間の角度であり， $\mathcal{P}_2(\cos \theta) = (1/4)(3 \cos 2\theta + 1)$ は 2 次のルジャンドル多項式である． $V_{\text{rotational}}$ は，斜影された半径ベクトルと $x - y$ 平面の間の角度 ψ から独立であることに注目されたい．これにより z 軸について等ポテンシャル面が対称であることがわかる．同じ点における惑星による潮汐ポテンシャルは

$$V_{\text{tidal}} = -\frac{\mathcal{G}m_p}{a^3} r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (\text{A.121})$$

(式 (A.9) 参照²⁸)，ここで m_p は惑星の質量である． V_{tidal} は，半径ベクトルと z 軸の角度 θ から独立であることに注目されたい．これにより x 軸について等ポテンシャル面が対称であるということになる．しかしながら，ケプラーの第 3 法則を用い $\frac{\mathcal{G}m_p}{a^2} = an^2$ ，また $n = \Omega$ であることに注目すると以下のように書け

$$V_{\text{tidal}} = -\Omega^2 r^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi) \quad (\text{A.122})$$

したがって $V_{\text{rotational}}$ は確かに V_{tidal} と同じ形をしており，絶対値が係数 3 だけ違うのと，対称軸が異なるだけである．このことにより，A.4 節で発展した潮汐変形の理論を，直接自転変形に適用できる．図 A.10 はそれぞれのタイプの変形における等ポテンシャル面の比較を示している．自転変形の場合 (図 A.10a) は， z 軸に対して対称な形をしており，一方，潮汐変形の場合 (図 A.10b) は， x 軸 (衛星と惑星を結ぶ線に沿う) が対称軸となっている．

式 (A.57) によって与えられるマントル表面 (つまり衛星表面) の形のモデルを用いると²⁹ 自転の場合に導入されねばならない，付加係数 $-1/3$ を考慮し，それぞれの変形の

²⁷式 (A.107) $V_{\text{cf}} = \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 [\mathcal{P}_2(\mu) - 1]$

²⁸式 (A.9) $V_3(\psi) = -\mathcal{G} \frac{m_p}{a^3} R_p^2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)$

²⁹式 (A.57) $R_{\text{os}}(\psi) = B[1 + T_2 \mathcal{P}_2(\cos \psi)]$

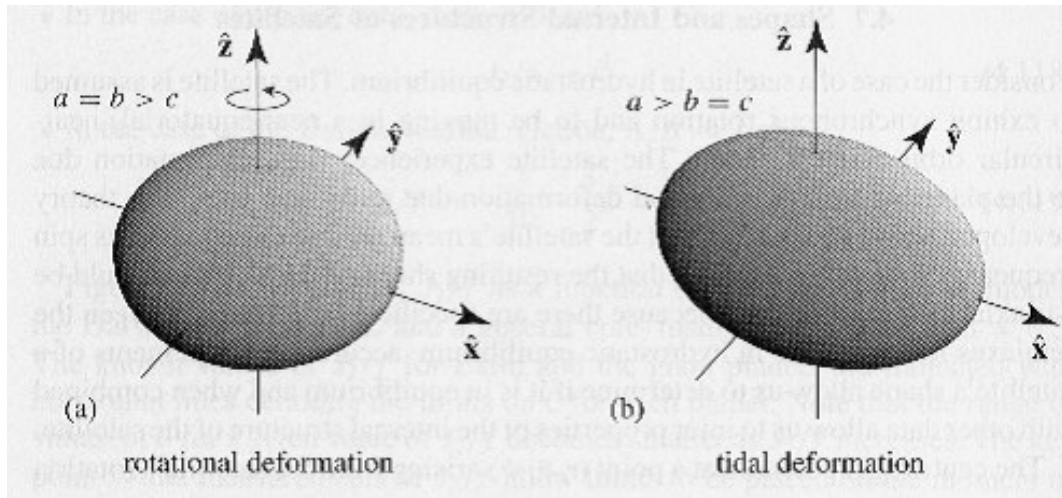


図 A.10: (a) 自転変形から生じる等ポテンシャル面の例，自転軸は z 軸 (b) 潮汐変形から生じる等ポテンシャル面の例，潮汐が起こっている天体は x 軸方向に沿っている．

形を計算することができる．一般的な三軸楕円体の半軸 a, b, c (それぞれ x, y, z 軸に沿う) によって形を定義するのが最も簡単である．ルジャンドル多項式の θ と ψ の適切な値を求めることによってこれらの量はそれぞれ B と T_2 のみの関数として計算することができる．

自転変形においては， a と b を与えるために $\theta = \pi/2$ での $P_2(\cos \theta)$ だけを計算すればよく， c を与えるためには $\theta = 0$ を計算すればよい．これにより

$$a_r = B(1 + T_2/6), \quad b_r = B(1 + T_2/6), \quad c_r = B(1 - T_2/3). \quad (\text{A.123})$$

潮汐変形においては， a を与えるために $\psi = 0$ での $P_2(\cos \psi)$ だけを計算すればよく， b と c を与えるためには $\psi = \pi/2$ を計算すればよい．これにより

$$a_t = B(1 + T_2), \quad b_t = B(1 - T_2/2), \quad c_t = B(1 - T_2/2). \quad (\text{A.124})$$

自転軸が軌道面に対して垂直だと仮定し，さらに自転と潮汐による寄与を線形的に足し合わせることができると仮定すると，結果としてできる三軸楕円体の形は以下の半軸によって与えられ

$$a = B(1 + 7T_2/6), \quad b = B(1 - T_2/3), \quad c = B(1 - 5T_2/6). \quad (\text{A.125})$$

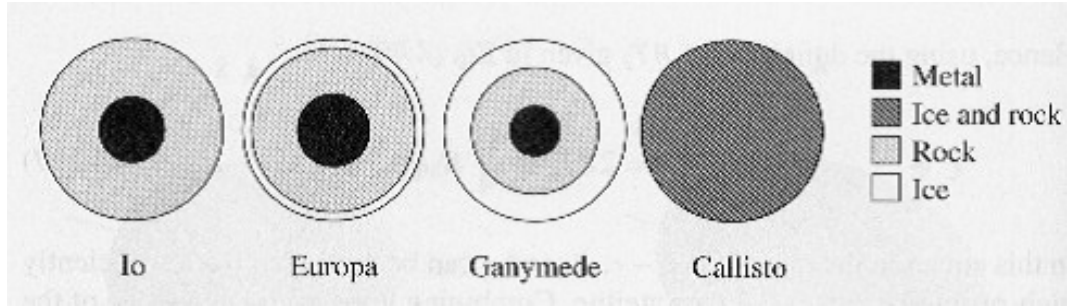


図 A.11: 探査機のデータから求めたガリレオ衛星の内部モデル．全ての衛星が同じ半径のスケールで描かれている．データは Anderson et al.(1996a,1996b,1997a,1997b) ．

特に，静水圧平衡にある同期自転する衛星の形は，自転変形と潮汐変形によって支配され，

$$b - c = \frac{1}{4}(a - c) \quad (\text{A.126})$$

という結果を得る (Dermott1979b) ．さらに，惑星によって衛星に起こる潮汐の場合の式 (A.13) を適応し³⁰，式 (A.102) と結びつけることにより³¹， $\zeta/B = q$ を得る³² ．したがって，式 (A.79) で与えられる BT_2 の定義を用いると³³

$$a - c = 2BT_2 = 5H_h q B. \quad (\text{A.127})$$

この式の中の， $a - c$ ， B ， q は十分に解像度が高い衛星の画像から測ることができる．これらを衛星の質量に関する知識と結びつけることにより，平均密度 $\langle \rho \rangle$ を得る．式 (A.83) の中の係数 H_h の定義³⁴ から，これが A/B (A は核の平均半径)， σ ， ρ (それぞれ核とマントルの密度) の値を制約することがわかる．これは，特に惑星に近く，潮汐変形も自転変形も大きい衛星の内部構造を決めるために用いることができるテクニックの基礎である．

Dermott(1979b) は，ここで示された理論と，A.5 節，A.6 節の中での理論を用い，探査機による (a) イオ，ガニメデ，タイタンのような衛星の重力モーメント，(b) ミマス，テ

³⁰式 (A.13) $\zeta = \frac{m_s}{m_p} \left(\frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$

³¹式 (A.102) $q = \frac{\Omega^2 a^3}{9m_p}$

³²テキスト $\zeta/B = 3q/4$ は誤植．よって式 (A.127) の $\frac{15}{4}H_h q B$ も誤植．

³³式 (A.79) $AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta c}{1+\mu}$ および $BT_2 = H \frac{5}{2}\zeta$

³⁴式 (A.83)

$$H_h = \frac{2\langle \rho \rangle}{5\rho} \left(\frac{1 + (3\delta/5\gamma)(A/B)^2}{\delta + 2\sigma/5\rho - (9\delta\sigma/25\gamma\rho)(A/B)^2} \right)$$

チスのような衛星の形の測定により、内部分化の証拠を得ることができるのではないかと、ということを示唆した。Dermott & Thomas(1988)は、ボイジャー探査機によって得られた高解像度の画像を用い、2次精度版の形状決定法 (a second-order version of the shape technique) をミマスに適用した。彼等は、ミマスが三軸楕円体にとてもよい近似をもつとし、式 (A.126) で予測される割合 0.25 と比べて測定値は $(b-c)(a-c) = 0.27 \pm 0.04$ であり、これはミマスが静水圧平衡に近いということを示唆している。Dermott & Thomas は、平均半径の推定値 $B = 198.8 \text{ km}$ と、Kozai(1957) によって決められたミマスの質量を結びつけて、平均密度 $\langle \rho \rangle = 1.137 \pm 0.018 \text{ g cm}^{-3}$ を得た。彼等は、未分化の衛星で予測される値 $20.3 \pm 0.3 \text{ km}$ と比べて $a-c = 16.9 \pm 0.7 \text{ km}$ であることを示した。予測されたバルジより小さいということは、中心に凝縮した衛星ということを示唆している。その内部モデルのひとつは観測と一致し、 $A/B = 0.44 \pm 0.09$ の岩石コア、密度 $\sigma = 0.96 \pm 0.08 \text{ g cm}^{-3}$ の氷のマントルが予測される³⁵。もうひとつの可能性はミマスに多孔性の (したがってかなり密度が低い) 氷でできた深い表土があるかもしれないということだ。土星の共軌道衛星であるヤヌスとエピメテウスの力学的相互作用の観測により、同種の多孔性の氷組成が示唆されることに注目すると興味深い。

ガリレオ探査機は木星系を巡り、四つのガリレオ衛星全てに表面から 1000 km 以内まで近づいた。Anderson et al(1996a,1996b,1997b) は探査機が得たデータを用い、イオ ($\bar{C} = 0.378 \pm 0.007$)、エウロパ ($\bar{C} = 0.347 \pm 0.014$)、ガニメデ ($\bar{C} = 0.311 \pm 0.003$)、カリスト ($\bar{C} = 0.406 \pm 0.030$) の慣性能率の推定値を得た。静水圧平衡にある衛星が均質であるとすると、 $\bar{C} = 0.4$ であろう、ということを示唆してほしい。それ故に、イオ、エウロパ、ガニメデは全て中心に凝縮している。実際に、太陽系の天体の中でガニメデ \bar{C} の計測値は最も小さい。しかしながら、カリストの最初のデータ (Anderson et al. 1997b) は、カリストが未分化であることを示唆しており、さらなる探査により岩石と氷の部分別の可能性が示されている (Anderson et al. 1998)。衛星の平均密度のデータと結びつけると、内部のモデルを求めることができる。これらは図 A.11 で概要が示されている。イオの潮汐熱は A.11 節で議論されているが、ここでガリレオ探査機のデータの解釈から生じる、より興味深い可能性のひとつに注目されたく、エウロパは水の氷でできた殻の下に、液体の水の海があるかもしれない。

ここまでは、衛星が円に近い軌道をもつと仮定してきたが、実際は衛星がかなり偏心軌道をまわっているため、潮汐ポテンシャルと共に衛星の形も変化する。探査機が繰り返し衛星に近づき、その度に \bar{C} と J_2 の測定値を得ることができるという状況において、衛星の剛性のような物性についての情報と同様に非常に正確なモーメントの測定値を得ることができる。カッシーニ探査機は、土星の衛星タイタンから繰り返される重力補助を利用し、内部構造についての今までにない情報を与えてくれるであろう (Rappaport et al. 1997)。

³⁵テキストでは $\rho = 0.96 \pm 0.08 \text{ g cm}^{-3}$ となっているが、マントルの密度なので σ の誤植。

謝辞

本論文の作成にあたり，倉本 圭 助教授には右も左もわからない状態の私を丁寧に指導していただきました．橋元 明彦 助教授には，セミナーでの指導をはじめ，研究において叱咤激励していただきました．心から感謝致します．

惑星物理学研究室，地球流体力学研究室，太陽系物理学グループ，EPnetFaN，そして特に同じ4年目の仲間達には日頃からお世話になりました．併せて感謝致します．