

火星大気の散乱温室効果:

δ -エディントン近似および二方向近似による検討

The scattering greenhouse effect of the mars atmosphere:

The examination by the δ -Eddington approximation and the
two-stream approximation

地球惑星大気物理学研究室

小杉田 圭之

KOSUGITA Yoshiyuki

2002/01/31 提出

要旨

現在の火星は乾燥した寒冷な惑星である。しかし流水地形の存在から過去 (~ 38 億年前) の火星気候は地表面に液体の水が存在するほど温暖であったと考えられている。流水地形が形成された当時の太陽光度は現在の 0.7 倍程度であったが, Pierrehumbert and Erlick (1998) は CO_2 氷雲の散乱温室効果 (雲による赤外放射の地表への散乱量が, 太陽放射の宇宙への散乱量より多いことによる温室効果) によって火星が温暖であった可能性を示した。しかし彼らは CO_2 氷雲モデルを単純化し, 雲による放射の吸収過程を無視している。実際はこの過程によって放射のバランスは変化する可能性がある。さらにダスト層も放射場に重要な役割を果たすため温室効果に大きな影響を及ぼすかもしれない。

本研究では吸収過程を考慮した CO_2 氷雲およびダストによる温室効果について検討する。 CO_2 氷雲 (あるいはダスト) 層と大気層を考え, 各層における放射伝達方程式を解くことにより CO_2 氷雲 (ダスト層) のアルベドおよび吸収率を求める。アルベド, 吸収率を用いて温室効果の強さを表す加熱因子を求めることができる。放射伝達方程式を解く際には二方向近似および δ -エディントン近似を用いた。

CO_2 氷雲による加熱因子は CO_2 氷の粒径が小さい (~ 5 μm) 場合, 38 億年前に水が存在するために必要な値より十分大きくなりうる。一方 CO_2 氷の粒径が大きい (> 20 μm) 場合の加熱因子は, 水の存在をぎりぎり説明できる程度である。現実的な CO_2 氷の粒径が 10 ~ 100 μm と推定されることを考えると CO_2 氷雲の散乱温室効果が液体の水の存在に大きく寄与した可能性がある。

またダスト層による加熱因子は粒径が ~ 2 μm で最大となり, 層厚が適当ならば水の存在を説明できる値となる。過去の火星におけるダスト層は, 層厚が不明ではあるがダスト粒径を 1.85 μm 程度と仮定すると液体の水の存在に寄与した可能性がある。

目次

1	はじめに	1
2	モデル	4
2.1	散乱温室効果	4
2.2	放射伝達方程式	8
2.2.1	散乱の基本方程式	8
2.2.2	散乱位相関数の展開	10
2.2.3	放射輝度のフーリエ展開	11
2.2.4	放射が方位角によらない場合	11
2.3	放射伝達方程式の近似	12
2.3.1	二方向近似	12
2.3.2	δ -エディントン近似	14
2.3.3	精度の比較	15
2.4	計算の設定	17
3	結果と議論	18
3.1	吸収の無い CO_2 氷の雲による散乱温室効果	18
3.2	吸収のある CO_2 氷の雲による散乱温室効果	21
3.3	ダスト層による散乱温室効果	25
3.4	議論	28
4	まとめ	29
A	ガウスの公式	30
B	連立非同次微分方程式の解法	31
C	コアルベド比の検証	35
C.1	漸近形からもとめたコアルベド比	35
C.2	二方向近似によるコアルベド比	35

D	三一理論	38
D.1	電磁場の性質	38
D.2	ベクトルの波動方程式	38
D.3	波動方程式を解く	40
D.3.1	球座標系で表す	40
D.3.2	方位角成分	41
D.3.3	天頂角成分	41
D.3.4	動径方向成分	41
D.3.5	解の合成	42
D.4	平面波の散乱	43
D.4.1	入射波の展開	43
D.5	展開係数を求める	44
D.5.1	M, N の関係	44
D.5.2	係数 B, A の式	45
D.6	入射する電磁波	45
D.7	内部波と散乱波	48
D.7.1	内部波	48
D.7.2	散乱波	48
D.8	角度依存関数	49
D.9	散乱係数	49
D.10	断面積	51
D.11	非対称因子	53
	謝辞	56

1 はじめに

現在の火星は乾燥した寒冷な惑星である。しかし昔の火星の気候は温暖湿潤であり、地表面に液体の水が存在していたのではないかと考えられている。火星観測により流水の侵食作用によりできたと思われる地形が発見されているからである (図 1)。恒星進化の理論からそれらの地形が形成されたであろう約 38 億年前において、太陽光度は現在の 0.7 倍程度しかなかったと考えられている。それにも関わらず太古の火星が温暖であった理由は現在も不明な点が多い。

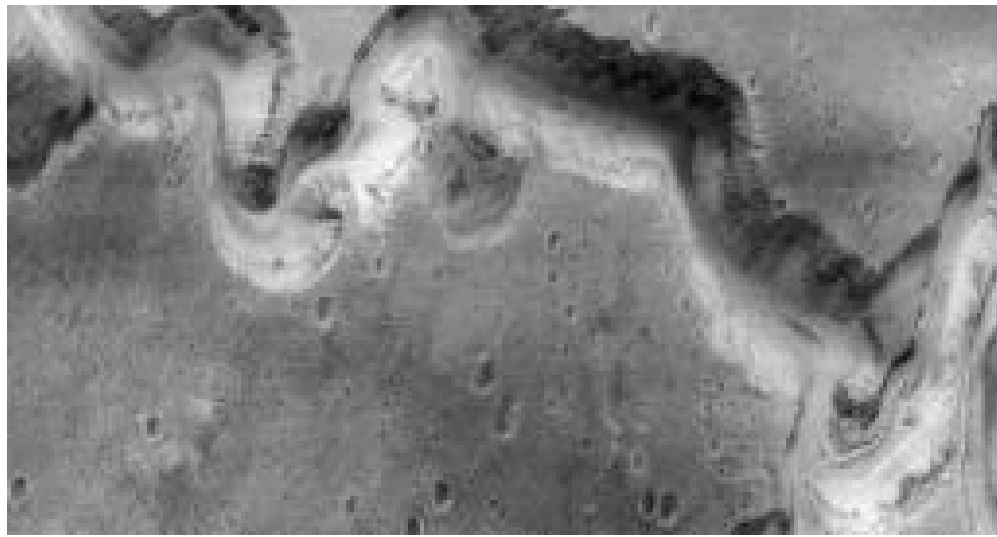


図 1: 1998 年マーズグローバルサーベイヤーにより撮像された火星における流水性の地形. (NASA <http://mars.jpl.nasa.gov/gallery/waterfeatures/PIA01170.html>)

現在より小さな太陽光度の下で火星を温暖に保つことのできる温室効果の機構について、以下のような議論がされて来た。Pollack et al. (1987) は一次元放射-対流平衡モデルにより、 CO_2 大気による対流温室効果を計算した。その結果太陽の光度が現在の 0.7 倍だったとしても、地表大気圧が 5 bar あれば地表温度は水の融点以上に保たれることが示された。しかし Kasting (1991) は Pollack et al. (1987) の放射-対流平衡モデルでは大気中の CO_2 の凝結が無視されているため温室効果を過大評価していることを指摘した。Kasting (1991) は CO_2 凝結の効果を含めたモデルを用いて再検討を行い、その結果大気が $\text{CO}_2\text{-H}_2\text{O}$ のみからなる場合には太陽光度が現在の 0.7 倍のときは火星に液体の水は

存在できず、水が存在するためには最低でも現在の 0.86 倍の太陽光度が必要であることを示した。CO₂ の凝結により温室効果が減少する理由は、凝結による潜熱の放出により大気の色度が増し、大気上端から出て行くフラックスを維持するために地表の色度は下がるからである (Haberle, 1998)。

それでは CO₂ 大気による対流温室効果以外に火星を温暖化させる機構はないのであろうか。Kasting (1991) は CO₂ 雲の散乱温室効果を示唆しているが、彼自身の温室効果の計算では無視されている。CO₂ 氷雲が地表からの外向き赤外放射を地表に反射し、赤外放射の反射率が太陽放射の反射率より大きいならば温室効果をもたらすであろう。Pierrehumbert and Erlick (1998) は CO₂ 氷雲の放射特性を計算し、CO₂ 氷雲が実際に強い温室効果をもたらす可能性があることを示した。しかし彼らのモデルでは CO₂ 氷雲を理想化しすぎており、散乱温室効果が過去の火星を温暖化させた決定的な理由であるとは言えない。

散乱温室効果をもたらす候補として CO₂ 氷雲の他に、大気中のダストがある。火星では、平時における光学的深さは 0.2、ダストストームが発生した際には 5 まで増加する (Pollack et al., 1979)。ダスト層が存在すれば、CO₂ 氷雲と同様に放射に何らかの影響を与えるはずである。

本研究では吸収のある CO₂ 氷雲およびダスト層による散乱温室効果について検討する。Pierrehumbert and Erlick (1998) のモデルでは CO₂ 氷による放射の吸収を無視しているが、吸収を考えると放射のバランスは変わる。吸収による太陽アルベドと赤外アルベドの減少により散乱温室効果は変化するのであろう。また放射を吸収した CO₂ 氷は自らも赤外放射を射出するので、その赤外放射により火星は暖まるであろう。それら吸収の有無による温室効果の違いを検討する。またダスト層についても温室効果をもたらすことが出来るかどうかを検討する。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 節でモデルの説明をする。2-1 節で散乱温室効果の考え方について述べる。ここでは温室効果を検討するためには放射伝達方程式から雲およびダスト層のアルベドや吸収率を求める必要があることが示される。そこで 2-2 節ではまず平行平面大気放射伝達方程式を導く。放射伝達方程式の計算にはダブリング法が最も精度がよいが、計算量が多くなるため本論文では使用しない。代わりに用いる近似法としてもっとも簡単で一般的な方法が二方向近似および δ -エディントン近似である。2-3 節では放射伝達方程式の二方向近似、 δ -エディントン近似による放射フラック

スを求め、それらの精度を検討する。第 3 節で吸収の無い CO_2 氷雲, 吸収のある CO_2 氷雲, ダスト層による放射・散乱の性質を求め、現実の火星を考慮に入れた際に散乱温室効果はどの程度起こり得るかを検討する。最後に第 4 節にまとめる。

2 モデル

2.1 散乱温室効果

この節では散乱温室効果とは何かを述べる。雲の無い惑星を考える (図 2 上)。太陽放射の大気-地表アルベドが α_0 の場合平衡状態にあるときは、太陽放射 S_0 に対し大気から射出される赤外放射は $I_0 = (1 - \alpha_0)S_0$ である。1 からアルベドを引いた量はコアルベドと呼ばれる。

雲のある惑星を考える (図 2 下)。仮想的に雲は十分高高度にあり、それより上空の大気による散乱や赤外放射は無視できるものとする。

まず太陽放射について考えよう。下層からの反射及び散乱が無い場合の雲の太陽アルベドを α_c 、太陽放射吸収率を β_c とする。実際には太陽放射は雲と雲の下の領域の間で多重散乱を繰り返す。このとき惑星全体の太陽アルベド α は

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_c + \alpha_0(1 - \alpha_c - \beta_c)^2 + \alpha_0^2\alpha_c(1 - \alpha_c - \beta_c)^2 + \alpha_0^3\alpha_c^2(1 - \alpha_c - \beta_c)^2 + \dots \\ &= \alpha_c + (1 - \alpha_c - \beta_c)^2\alpha_0(1 + \alpha_0\alpha_c + \alpha_0^2\alpha_c^2 + \dots) \\ &= \alpha_c + \frac{\alpha_0(1 - \alpha_c - \beta_c)^2}{1 - \alpha_0\alpha_c}\end{aligned}\quad (1)$$

である。また雲による太陽放射吸収率 β は

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_c + \alpha_0\beta_c(1 - \alpha_c - \beta_c) + \alpha_0^2\alpha_c\beta_c(1 - \alpha_c - \beta_c) + \alpha_0^3\alpha_c^2\beta_c(1 - \alpha_c - \beta_c) + \dots \\ &= \beta_c + \alpha_0\beta_c(1 - \alpha_c - \beta_c)(1 + \alpha_0\alpha_c + \alpha_0^2\alpha_c^2 + \dots) \\ &= \beta_c + \frac{\alpha_0\beta_c(1 - \alpha_c - \beta_c)}{1 - \alpha_0\alpha_c}.\end{aligned}\quad (2)$$

である。

つぎに赤外放射について考える。雲の下の大気からの上向き赤外放射を I_1 とし、雲の赤外アルベドを α_c^{IR} 、赤外放射吸収率 β_c^{IR} とする。大気は赤外放射を完全に吸収すると仮定するので、赤外放射の雲と雲の下の領域の間での多重散乱を無視する。

最後に雲からの赤外放射の射出について考える。雲は太陽放射も赤外放射も吸収するので、雲からも放射が射出される。CO₂ の凝結により鉛直温度プロファイルは等温大気に近いとして、雲からの上向き放射と下向き放射の射出量は等しく ε とする。

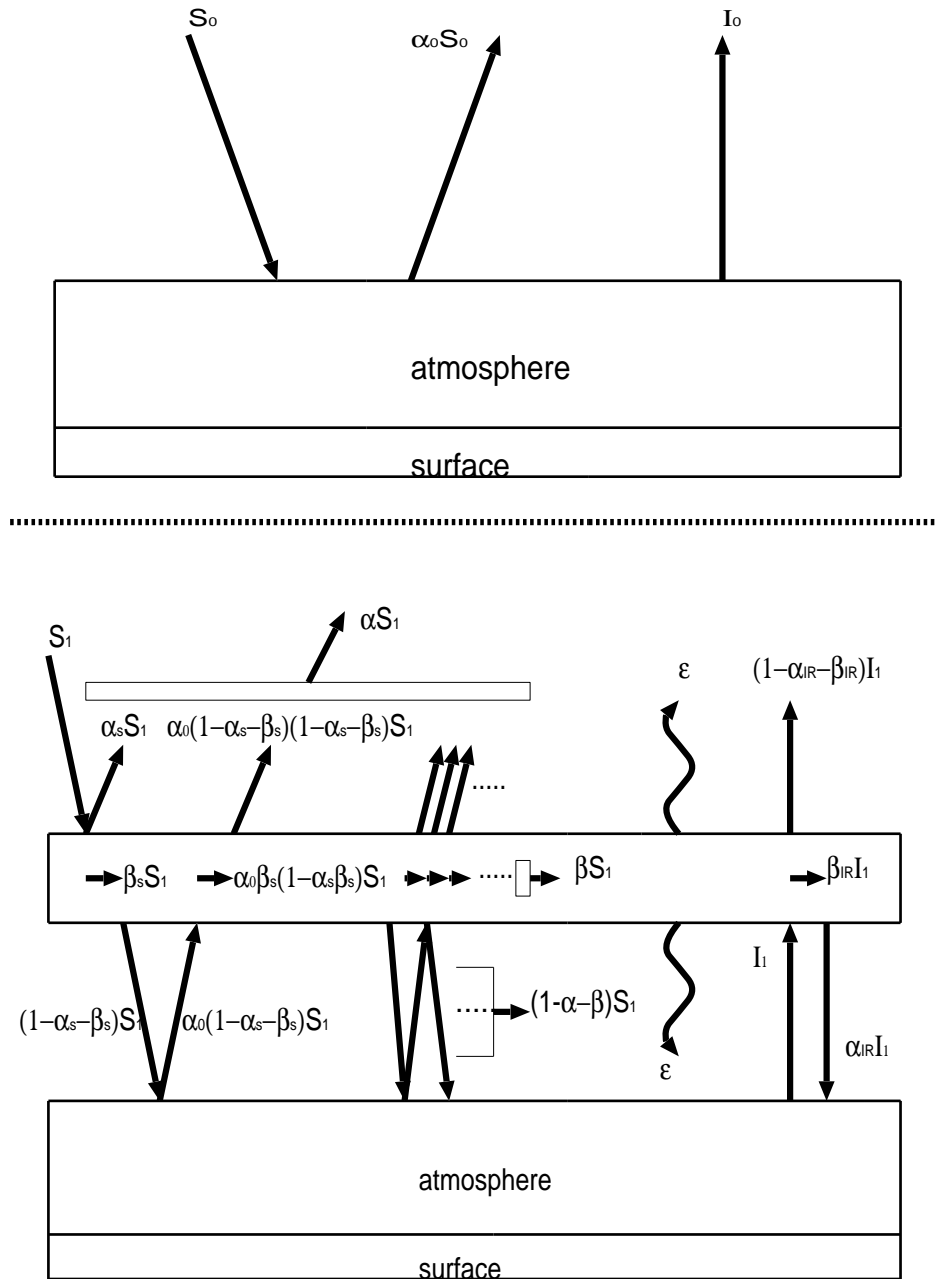


図 2: 上: 雲が無い場合の放射バランス. 下: 雲が存在する場合の放射バランス.

いま太陽放射と赤外放射が平衡状態にあるとすると、雲の上、雲層、雲の下の領域でそれぞれ次の式が成り立つ。

$$S_1 = \alpha S_1 + (1 - \alpha_c^{\text{IR}} - \beta_c^{\text{IR}})I_1 + \varepsilon \quad (3)$$

$$2\varepsilon = \beta S_1 + \beta_c^{\text{IR}}I_1 \quad (4)$$

$$I_1 = \alpha_c^{\text{IR}}I_1 + (1 - \alpha - \beta)S_1 + \varepsilon \quad (5)$$

ここでは後の議論のために太陽放射を S_1 と記した。いま雲の効果を考慮したときに大気温度をある一定値に保つ太陽放射を求めてみよう。雲が無いときと雲があるときで大気温度が同じであるとする、大気-地表からの赤外フラックスはこの二つの場合で等しくなければならない。

$$I_1 = I_0 = (1 - \alpha_0)S_0. \quad (6)$$

式 (4) を使って式 (5) から ε を消去すると

$$S_0 = \frac{(1 - \alpha - \frac{1}{2}\beta)}{(1 - \alpha_c^{\text{IR}} - \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}})(1 - \alpha_0)}S_1. \quad (7)$$

ここで加熱因子を

$$\gamma = \frac{(1 - \alpha - \frac{1}{2}\beta)}{(1 - \alpha_c^{\text{IR}} - \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}})(1 - \alpha_0)} \quad (8)$$

と定義する。つまり雲による加熱効果は雲の無い場合に太陽を γ 倍明るくした効果と同等なものとして表される。もしも γ が 1 より大きければ小さな太陽放射でも雲の存在によって大気温度を一定に保つことができる。これが散乱温室効果である。

また $\alpha_0 = 0$ のときの γ は、

$$\gamma_c = \frac{(1 - \alpha_c - \frac{1}{2}\beta_c)}{(1 - \alpha_c^{\text{IR}} - \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}})}. \quad (9)$$

以下ではこれを変形コアルベド比と呼ぶ。太陽放射および赤外放射の吸収が無い場合 ($\beta_c = \beta_c^{\text{IR}} = 0$) はそれぞれの放射に対するコアルベドの比となる。

同様の定式化をダスト層に関して適用する。ダスト粒子が大気上部で太陽放射を多く吸収すると、鉛直温度プロファイルは等温大気に近くなる (Gierasch and Goody, 1972)。したがってダスト層からの射出される上向き、下向き赤外放射も等しいと考えられる。

コアルベド比, 加熱因子を求めるためには, 放射伝達方程式を解いて雲, ダスト層のアルベドおよび吸収率を求める必要がある. 以下の節では放射伝達方程式の導出, アルベドの導出について述べる.

2.2 放射伝達方程式

2.2.1 散乱の基本方程式

図3のような系を考える.

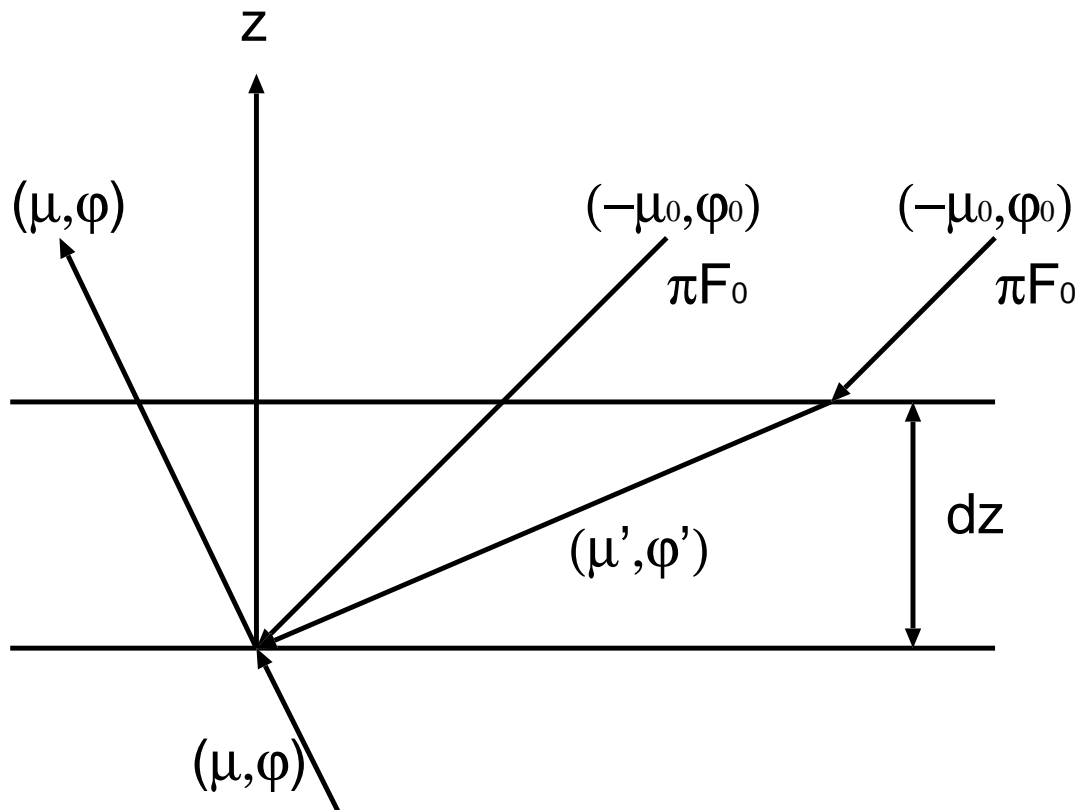


図3: 平行平面大気層における太陽放射の伝達. (μ, φ) 方向からの放射の減衰, $(-\mu_0, \varphi_0)$ からの太陽放射の (μ, φ) への散乱, (μ', φ') からの散乱光の (μ, φ) への散乱を表す.

気層の下から (μ, φ) に入射した放射 I が気層中の粒子によって吸収, 散乱されることによる放射輝度の減衰 dI_1 は,

$$dI_1(z, \mu, \varphi) = -\bar{\sigma}_e N I(z, \mu, \varphi) \frac{dz}{\cos \theta}. \quad (10)$$

ここで $\bar{\sigma}_e$ は気層内粒子一個の平均消散断面積, N は単位体積中の全粒子数, $dz/\cos \theta$ は微小通過光路である.

次に (μ', φ') から (μ, φ) 方向に散乱される全ての散乱光を考えると (μ, φ) 方向への放射輝度の増加 dI_2 は

$$dI_2(z, \mu, \varphi) = \bar{\sigma}_s N \frac{dz}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu', \varphi') \frac{p(\mu, \varphi; \mu', \varphi')}{4\pi} d\mu' d\varphi' \quad (11)$$

ここで $\bar{\sigma}_s$ は気層内粒子一個の平均散乱断面積, $p(\mu, \varphi; \mu', \varphi')/4\pi$ は (μ', φ') から (μ, φ) への散乱を示す散乱位相関数である.

入射太陽光の直達成分 $F(z)$ が (μ, φ) 方向に単一散乱されることを考えると (μ, φ) 方向への放射輝度の増加は

$$dI_3(z, \mu, \varphi) = \bar{\sigma}_s N \frac{dz}{\cos \theta} F(z) \frac{p(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0)}{4\pi} \quad (12)$$

ここで $F(z)$ は高度 z に到達した直達光であり, ランバートの法則から

$$F(z) = \pi F_0 \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta_0} \int_z^\infty \bar{\sigma}_e(z') N(z') dz'\right) \equiv \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (13)$$

である. ここで πF_0 は太陽フラックス, $\bar{\sigma}_e(z')$ は成層した大気中の平均消散断面積, $N_e(z')$ は成層した大気中の平均消散断面積である.

光学的深さを

$$\tau = \int_z^\infty \bar{\sigma}_e N dz \quad (d\tau = -\bar{\sigma}_e N dz)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} dI_1(\tau, \mu, \varphi) &= I(\tau, \mu, \varphi) \frac{d\tau}{\cos \theta} \\ dI_2(\tau, \mu, \varphi) &= -\tilde{\omega}_0 \frac{d\tau}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \varphi') \frac{p(\mu, \varphi; \mu', \varphi')}{4\pi} d\mu' d\varphi' \\ dI_3(\tau, \mu, \varphi) &= -\tilde{\omega}_0 \frac{d\tau}{\cos \theta} F(\tau) \frac{p(\mu, \varphi; \mu', \varphi')}{4\pi} \\ &= -\tilde{\omega}_0 \frac{d\tau}{\cos \theta} \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \frac{p(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0)}{4\pi} \end{aligned}$$

と書き直すことが出来る. ここで $\tilde{\omega}_0$ は単一散乱アルベドで $\bar{\sigma}_s/\bar{\sigma}_e$ で定義される. 以上の3式を足し合わせると $(dI = dI_1 + dI_2 + dI_3)$, 平面平行大気における放射の散乱の基本方程式は

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \varphi) - J(\tau, \mu, \varphi) \quad (14)$$

が得られる。また放射源関数 J は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 J(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \varphi') p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \\
 &+ \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} p(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0).
 \end{aligned} \tag{15}$$

2.2.2 散乱位相関数の展開

散乱位相関数は複雑な形をしているので、性質の分かっているルジャンドル多項式で表現する。近似する際には関数のおおまかな形 (前方散乱が卓越か、後方か) だけが分かればいいので、ルジャンドル多項式で展開した始めの数項だけをとる。

Θ の関数である散乱位相関数を有限の N の項までのルジャンドル多項式で展開して

$$p(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\cos \Theta). \tag{16}$$

とおく。ここで $\tilde{\omega}_l$ は $N+1$ 個の展開係数で、 $\tilde{\omega}_0 = 1$ である。入射光と散乱光のなす角 Θ は

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \theta(\varphi' - \varphi) \tag{17}$$

となり、ここで $\mu = \cos \theta$, $\mu' = \cos \theta'$ とおくと

$$\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos \theta(\varphi' - \varphi) \tag{18}$$

と表されることから

$$p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l[\mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos \theta(\varphi' - \varphi)] \tag{19}$$

さらに球面調和関数の加法定理を用いて展開すると、

$$p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi) \tag{20}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_l^m &= (2 - \delta_{0,m}) \tilde{\omega}_l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (l = m, \dots, N, 0 \leq m \leq N) \\
 \delta_{0,m} &= \begin{cases} 1 & (m = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.2.3 放射輝度のフーリエ展開

太陽の入射方向 $(-\mu_0, \varphi_0)$ から見ると放射場は対称. つまり I は φ に関しては φ_0 を原点として偶関数なのでフーリエ余弦展開すると

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi) \quad (21)$$

式 (20), (21) を式 (14), (15) に代入するとフーリエ展開の各展開係数について放射伝達方程式は成り立っている必要がある.

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} &= I^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\tilde{\omega}_0}{4} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (m = 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (22)$$

この式から $N + 1$ 個の $I^m(\tau, \mu)$ が別個に求まり式 (21) に代入することで $I(\tau, \mu, \varphi)$ が求まる.

2.2.4 放射が方位角によらない場合

放射が方位角によらない軸対称の項 ($m = 0$) を考えると $I^0 = I$ とみなせ

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} &= I(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}_0}{2} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0) \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる.

次節では式 (23) を二方向近似, δ -エディントン近似によって放射強度を求め, フラックスを求める.

2.3 放射伝達方程式の近似

2.3.1 二方向近似

ガウスの公式 (Appendix A) より放射伝達方程式 (23) を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dI(\tau; \mu_i)}{d\tau} &= I(\tau; \mu_i) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu_i) \sum_{j=-n}^n a_j P_l(\mu_j) I(\tau; \mu_j) \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{4} F_0 \left[\sum_{l=0}^N (-1)^l \tilde{\omega}_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_0) \right] e^{-\tau/\mu_0} \quad (i = -n, n) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで μ_i は偶数倍のルジャンドル多項式 $P_{2n}(\mu)$ のゼロ点である.

$$a_{-i} = a_i, \quad \mu_{-i} = -\mu_i, \quad \sum_{i=-n}^n a_i = 2 \quad (25)$$

ルジャンドル関数のゼロ点の一つである μ_i をとり放射の方向を代表させている.

2方向の放射を考えると $n = 1$ ($-1, 1$ と上下に一方向ずつの放射の方向をとる). $N = 1$ (位相関数を $0, 1$ という最初の二つの項で表す). また $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$, $a_1 = a_{-1} = 1$, $I^\uparrow = I(\tau; \mu_1)$, $I^\downarrow = I(\tau; -\mu_1)$ とすると連立微分方程式が得られる.

$$\mu_1 \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}(1-b)I^\uparrow - \tilde{\omega}bI^\downarrow - S^- e^{-\tau/\mu_0} \quad (26)$$

$$-\mu_1 \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = I^\downarrow - \tilde{\omega}(1-b)I^\downarrow - \tilde{\omega}bI^\uparrow - S^+ e^{-\tau/\mu_0} \quad (27)$$

ここで

$$\begin{aligned} g &= \frac{\tilde{\omega}_1}{3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \cos \Theta d \cos \Theta = \langle \cos \theta \rangle \\ b &= \frac{1-b}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \frac{1-\cos \Theta}{2} d \cos \Theta \\ S^\pm &= \frac{F_0 \tilde{\omega}}{4} (1 \pm 3g\mu_1\mu_0) \end{aligned}$$

である. 式 (26), (27) を解くために, $M = I^\uparrow + I^\downarrow$, $N = I^\uparrow - I^\downarrow$ とすると

$$\mu_1 \frac{dM}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}g)N - (S^- - S^+) e^{-\tau/\mu_0} \quad (28)$$

$$\mu_1 \frac{dN}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})M - (S^- + S^+) e^{-\tau/\mu_0} \quad (29)$$

M だけの式, N だけの式にするためにさらに微分してそれぞれに代入すると

$$\mu_1 \frac{d^2 M}{d\tau^2} = k^2 M + Z_1 e^{-\tau/\mu_0} \quad (30)$$

$$\mu_1 \frac{d^2 N}{d\tau^2} = k^2 N + Z_2 e^{-\tau/\mu_0} \quad (31)$$

この二階非同次微分方程式を解くと

$$I^\uparrow = I(\tau, \mu_1) = K v e^{k\tau} + H u e^{-k\tau} + \varepsilon e^{-\tau/\mu_0} \quad (32)$$

$$I^\downarrow = I(\tau, -\mu_1) = K u e^{k\tau} + H v e^{-k\tau} + \gamma e^{-\tau/\mu_0}. \quad (33)$$

ここで

$$k^2 = (1 - \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega}g)/\mu_1^2$$

$$Z_1 = -\frac{(1 - \tilde{\omega}g)(S^- + S^+)}{\mu_1^2} + \frac{S^- - S^+}{\mu_1 \mu_0}$$

$$Z_2 = -\frac{(1 - \tilde{\omega})(S^- - S^+)}{\mu_1^2} + \frac{S^- + S^+}{\mu_1 \mu_0}$$

$$v = (1 + a)/2, \quad u = (1 - a)/2$$

$$a^2 = (1 - \tilde{\omega})/(1 - \tilde{\omega}g)$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta)/2, \quad \gamma = (\alpha - \beta)/2$$

$$\alpha = Z_1 \mu_0^2 / (1 - \mu_0^2 k^2), \quad \beta = Z_2 \mu_0^2 / (1 - \mu_0^2 k^2)$$

有限大気では, 大気上端で下向き, また大気下端で上向きの拡散によるフラックスはないという境界条件

$$I(0; -\mu_1) = 0 \quad I(\tau_1; \mu_1) = 0 \quad (34)$$

より

$$K = -(\varepsilon v e^{-\tau_1/\mu_0} - \gamma u e^{-k\tau_1}) / (v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1})$$

$$H = (\varepsilon u e^{-\tau_1/\mu_0} - \gamma v e^{k\tau_1}) / (v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1})$$

上向きと下向き放射強度が分かればフラックスは簡単に

$$F^\uparrow(\tau) = 2\pi \mu_1 I^\uparrow \quad (35)$$

$$F^\downarrow(\tau) = 2\pi \mu_1 I^\downarrow \quad (36)$$

2.3.2 δ -エディントン近似

ガウスの公式 (Appendix A) より放射伝達方程式 (23) を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau; \mu)}{d\tau} = I(\tau; \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) \sum_{j=-n}^n a_j P_l(\mu_j) I(\tau; \mu_j) \\ - \frac{\tilde{\omega}}{4} F_0 \left[\sum_{l=0}^N (-1)^l \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(\mu_0) \right] e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (37)$$

二方向近似ではある一つの方向 μ_1 への放射に代表させた. δ -エディントン近似では放射強度 I をルジャンドル展開し始めの数項をとり

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + I_1(\tau)\mu \quad (-1 \leq \mu \leq 1) \quad (38)$$

とおく. 式 (37) に式 (38) を代入し $N = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} \mu \frac{d(I_0 + \mu I_1)}{d\tau} &= (I_0 + \mu I_1) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \{ \tilde{\omega}_0 P_0(\mu) [a_{-1} P_0(\mu_{-1}) I(\mu_{-1}) + a_1 P_0(\mu_1) I(\mu_1)] \\ &\quad + \tilde{\omega}_1 P_1(\mu) [a_{-1} P_1(\mu_{-1}) I(\mu_{-1}) + a_1 P_1(\mu_1) I(\mu_1)] \} \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{4} F_0 \left[\sum_{l=0}^1 (-1)^l \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(\mu_0) \right] e^{-\tau/\mu_0} \\ &= (I_0 + \mu I_1) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \{ (I_0 - \mu_{-1} I_1) + (I_0 + \mu_1 I_1) \} \\ &\quad + \tilde{\omega}_1 \mu [-\mu_1 (I_0 - \mu_1 I_1) + \mu_1 (I_0 + \mu_1 I_1)] \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{4} F_0 (\tilde{\omega}_0 P_0(\mu) P_0(\mu_0) - \tilde{\omega}_1 P_1(\mu) P_1(\mu_0)) e^{-\tau/\mu_0} \\ &= (I_0 + \mu I_1) - \tilde{\omega} (I_0 + g\mu I_1) - \frac{\tilde{\omega}}{4} F_0 (1 - 3g\mu\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (39)$$

ここで利用した式は

$$\mu_{-i} = -\mu_i, \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_1 = a_{-1} = 1, \quad \tilde{\omega}_0 = 1, \quad \frac{\tilde{\omega}_1}{3} = g$$

式 (39) と式 (39) に μ を書けた式を μ ($-1 \leq \mu \leq 1$) で積分すると,

$$\frac{dI_1}{d\tau} = 3(1 - \tilde{\omega})I_0 - \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0e^{-\tau/\mu_0} \quad (40)$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}g)I_1 - \frac{3}{4}\tilde{\omega}gF_0e^{-\tau/\mu_0} \quad (41)$$

この2つの式から I_0, I_1 が求められ (Appendix B),

$$I_1 = aKe^{k\tau} - aHe^{-k\tau} + \alpha e^{-\tau/\mu_0} \quad (42)$$

$$I_0 = Ke^{k\tau} + He^{-k\tau} + \beta e^{-\tau/\mu_0} \quad (43)$$

ここで

$$K = -\frac{\varepsilon v e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma u e^{-k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}}, \quad H = \frac{\varepsilon u e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma v e^{k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}}, \quad (44)$$

$$\varepsilon = \beta + \mu\alpha, \quad \gamma = \beta - \mu\alpha, \quad (45)$$

$$u = 1 - \mu a, \quad v = 1 + \mu a \quad (46)$$

$$a^2 = \frac{3(1 - \tilde{\omega})}{1 - \tilde{\omega}g}, \quad (47)$$

$$k^2 = 3(1 - \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega}g), \quad (48)$$

$$\alpha = \frac{\mu_0^2 Z_1}{1 - \mu_0^2 k^2}, \quad \beta = \frac{\mu_0^2 Z_0}{1 - \mu_0^2 k^2}, \quad (49)$$

$$Z_0 = \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0 \left\{ -(1 - \tilde{\omega}g) - g \right\}, \quad Z_1 = \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0 \left\{ 3(1 - \tilde{\omega})g\mu_0 + \frac{1}{\mu_0} \right\}. \quad (50)$$

上向き下向きのフラックスは.

$$F^\uparrow(\tau) = 2\pi \int_0^1 [I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)] \mu d\mu = \pi [I_0(\tau) + \frac{2}{3}I_1(\tau)] \quad (51)$$

$$F^\downarrow(\tau) = 2\pi \int_0^{-1} [I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)] \mu d\mu = \pi [I_0(\tau) - \frac{2}{3}I_1(\tau)] \quad (52)$$

精度を上げるために経験的に以下の量が再定義された (Joseph 1976).

$$g' = \frac{g}{1 + g}, \quad \tilde{\omega}' = \frac{(1 - g^2)\tilde{\omega}}{1 - g^2\tilde{\omega}}, \quad \tau' = (1 - \tilde{\omega}g^2)\tau \quad (53)$$

2.3.3 精度の比較

ここまでで、拡散によるフラックスが求められた (式 (35), 式 (36), および 式 (51), 式 (52)). これら二つの近似法による精度をダブリング法による反射率と透過率と比較する. 反射率 r と透過率 t は次のように定義される.

$$r = \frac{F^\uparrow(0)}{\pi\mu_0 F_0}, \quad t = \frac{F^\downarrow(\tau_1)}{\pi\mu_0 F_0} + \exp\left(\frac{-\tau_1}{\mu_0}\right) \quad (54)$$

Liou (1980) と同じパラメータ $\tilde{\omega} = 0.95, g = 0.75$ を使って計算した数値を表 1 に示す. ダブリング法による数値は Liou (1980) の表 6.3 から用いた. μ_0 が小さいときには

表 1: 二方向近似および δ -エディントン近似による反射率と透過率をダブリング法による数値と比較. ダブリング法の数値については liou (1980) 表 6.3 から引用.

τ_1	Method	$\mu_0 :$	Reflection			Transmission		
			0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
0.25	two stream		0.38739	0.07140	-0.01258	0.55674	0.90463	0.99780
	δ -Eddington		0.28732	0.06344	0.02380	0.63102	0.91190	0.96179
	Doubling (Liou, 1980)		0.38124	0.06530	0.02055	0.54162	0.90699	0.96439
1.0	two stream		0.47866	0.20147	0.01565	0.42640	0.71177	0.91672
	δ -Eddington		0.44189	0.19208	0.08787	0.40591	0.71411	0.84958
	Doubling (Liou, 1980)		0.51164	0.20233	0.08123	0.34963	0.68629	0.85052
4.0	two stream		0.58357	0.38080	0.20120	0.20988	0.34604	0.49574
	δ -Eddington		0.52799	0.36427	0.23787	0.20279	0.33716	0.48829
	Doubling (Liou, 1980)		0.59296	0.36491	0.22942	0.16294	0.31360	0.47396
16.0	two stream		0.62095	0.44243	0.28886	0.01681	0.02772	0.03994
	δ -Eddington		0.55871	0.41604	0.30961	0.01639	0.02704	0.04242
	Doubling (Liou, 1980)		0.61961	0.41122	0.29771	0.01445	0.02767	0.04304

δ -エディントン近似の精度は良くないことが分かる. しかしこの論文において放射を考える際にあまりに横からの放射というのは考えないので μ_0 は大きい値を使う. よってその場合には δ -エディントン近似の方が精度はよいので以降の計算は δ -エディントン近似を使う.

表 2: CO₂ 氷およびダスト粒子の物性値.

	吸収の無い CO ₂ 氷雲	吸収のある CO ₂ 氷雲	ダスト層
太陽放射に対する複素屈折率	1.4 ¹⁾	1.407+ 0.00000136i ²⁾	1.51 +0.003i ³⁾
赤外放射に対する複素屈折率	1.4 ¹⁾	1.401+ 0.0000079i ²⁾	2.78+0.59i ⁴⁾
粒子密度 (g/cm ³)	1.56	1.56	3.0 ⁵⁾

¹⁾ Pierrehumbert and Erlick, 1998. ²⁾ Warren, 1986. ³⁾ Ockert-Bell et al., 1997.

⁴⁾ Toon et al., 1977. ⁵⁾ Pollack et al. 1979

2.4 計算の設定

次節から実際に加熱因子 (式 (8)), 変形コアルベド比 (式 (9)) を求めていく. 本節ではそのための計算の設定について述べる. 雲, ダスト層の中の気体の吸収と散乱は無視する. 雲粒子, ダスト粒子は球形とし, ミー理論に基づいてサイズの関数として光学定数を求める. このとき太陽放射は波長 $0.75 \mu\text{m}$, 赤外放射は波長 $10 \mu\text{m}$ とする.

ここで求めた光学定数を用いて δ -エディントン近似から雲層ないしダスト層のアルベドおよび吸収率を求める. その際太陽放射の天頂角余弦は惑星平均として典型的にとられる値である $1/2$, 赤外放射の天頂角余弦は天頂角 75° 以下の角度でフラックスで重みを付けられた平均値である $1.05 \times 2/3$ を用いる (Pierrehumbert and Erlick 1998).

雲の下の大気-地表系のアルベドは $\alpha_0 = 0.2$ とする. これは大気が無い際の地表のアルベドであり, 大気-地表系のアルベドとしてはひかえめな値である.

用いた CO₂ 氷およびダスト粒子の物性値は表 2 の通りである.

3 結果と議論

3.1 吸収の無い CO₂ 氷の雲による散乱温室効果

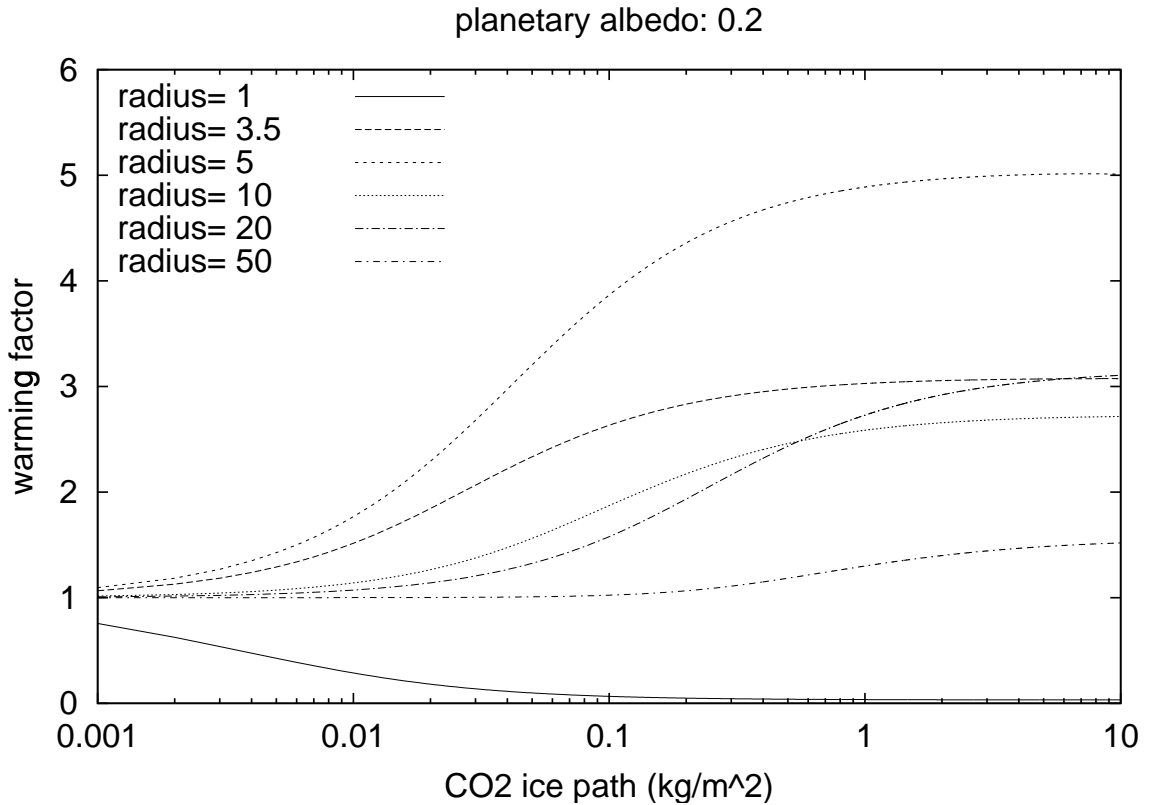


図 4: 吸収がないときの加熱因子 γ . CO₂ 氷雲の層厚 (kg/m²) と粒径 (μm) の関数. 大気-地表系のアルベド $\alpha_0 = 0.2$

図 4, 5 は雲による吸収を無視した場合の加熱因子およびコアルベド比を CO₂ 氷雲の層厚 (CO₂ ice path) の関数として表したものである. 加熱因子はコアルベド比よりも若干大きい. 粒子半径が赤外波長に比べてかなり小さい $1 \mu\text{m}$ の場合, 太陽放射の散乱に対し赤外放射の散乱が弱いため太陽アルベドのほうが大きく, 加熱因子は 1 以下になる. 粒子半径 $3.5 \sim 20 \mu\text{m}$ では太陽放射も赤外放射もミ-散乱されるが, 太陽放射の散乱の方が前方散乱が卓越するため太陽アルベドは小さくなり, 加熱因子は 1 より大きくなる. 粒子半径が大きくなるとどちらも同程度の前方散乱となるので加熱因子は 1 に近づく.

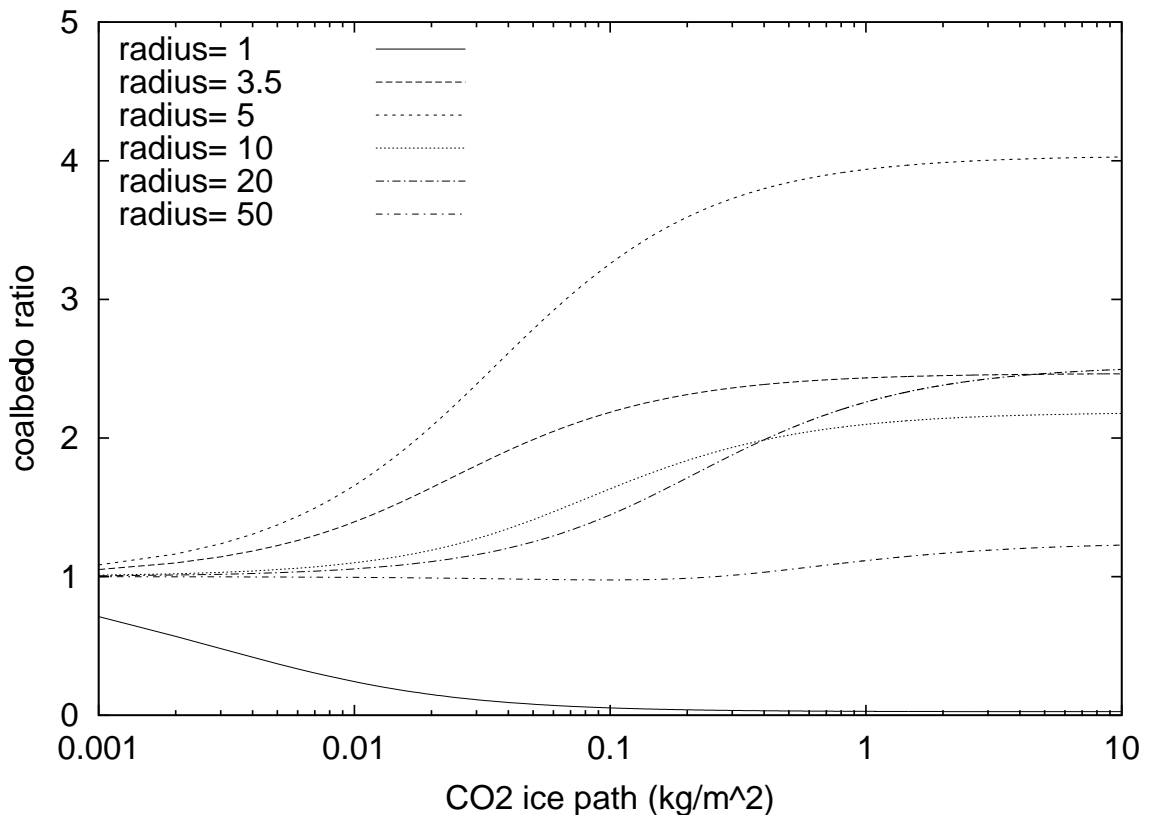


図 5: 吸収がないときの Coalbedo 比 (太陽 Coalbedo / 赤外 Coalbedo). CO₂ 氷雲の層厚 (kg/m²) と粒径 (μm) の関数.

図 4,5 では加熱因子 (Coalbedo 比) が最大になったり 1 になる境界の粒子半径が分かりにくい. Coalbedo 比が一定値に漸近する十分大きな層厚 (10 kg/m²) に対して Coalbedo 比の半径依存性を調べたものが図 6 である. この結果から Coalbedo 比が最大となる粒子半径は 5 ~ 6 μm であることが分かる. 粒子が大きくなると Coalbedo 比は 1.2 付近の値をとる. これは加熱因子にすると 1.5 程度に相当する.

以上の結果は Pierrehumbert and Erlick (1998) と同じ設定をしているが, 彼らの求めた結果とは一致していない. 我々の計算結果の妥当性については Appendix C に詳述する.

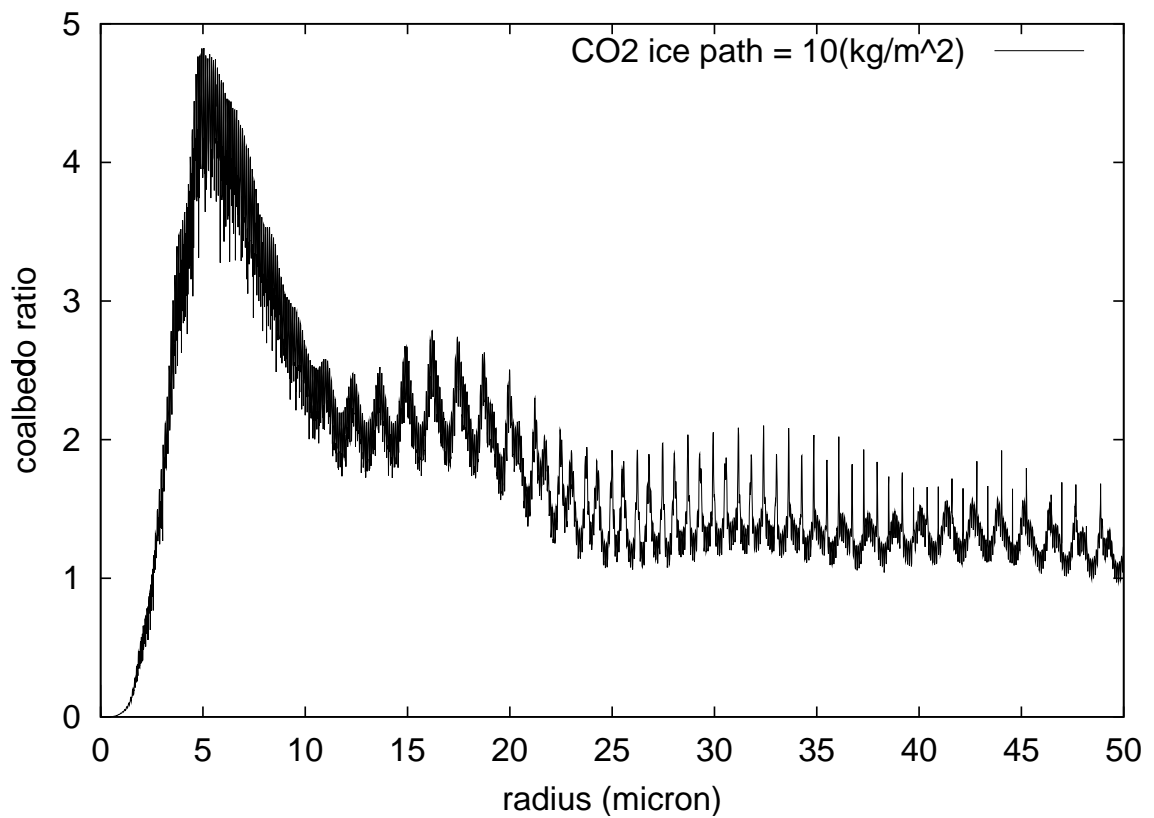


図 6: 雲粒子による吸収がなく雲が厚いとき (10 kg/m^2) のコアルベド比. 粒径 (μm) の関数.

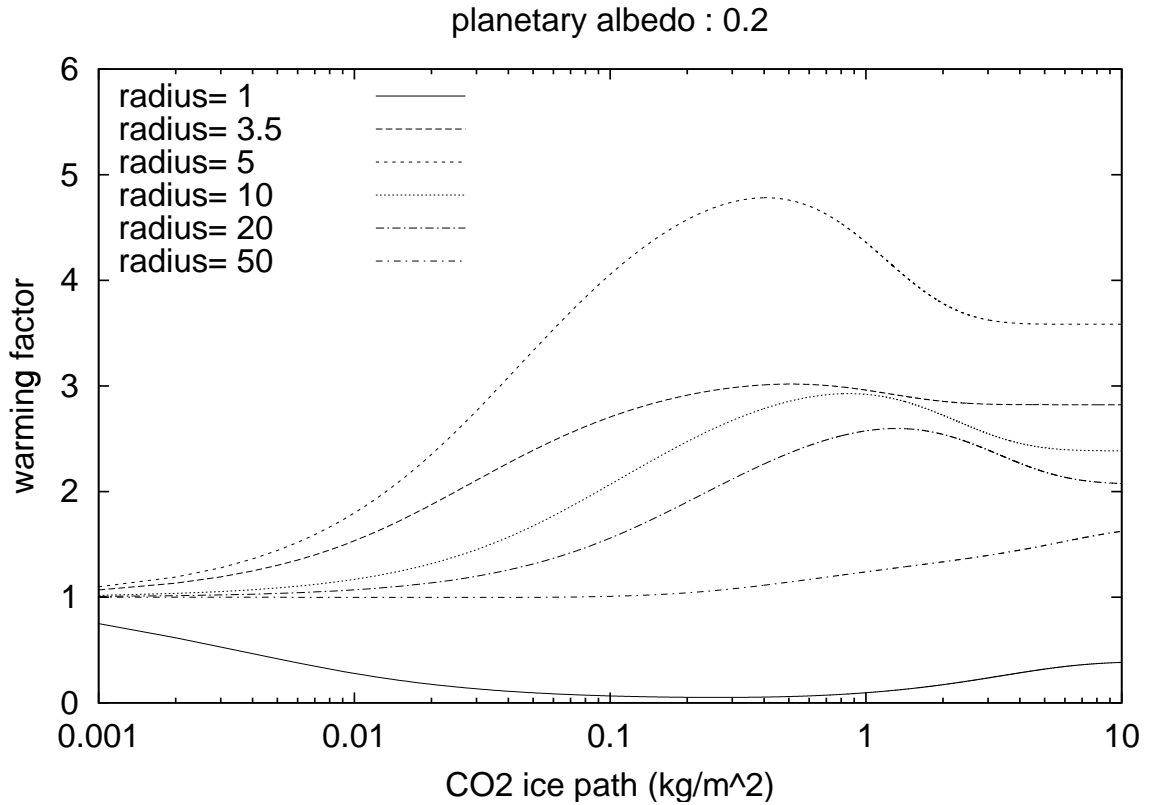
3.2 吸収のある CO₂ 氷の雲による散乱温室効果

図 7: 吸収があるときの加熱因子 γ . CO₂ 氷雲の層厚 (kg/m²) と粒径 (μm) の関数. 大気-地表系のアルベド $\alpha_0 = 0.2$

図 7, 8 は吸収がある場合の加熱因子および変形コアルベド比を CO₂ 氷雲の層厚 (CO₂ ice path) の関数として表したものである. 加熱因子がコアルベド比よりも若干大きいこと, 加熱因子および変形コアルベド比の波長依存性については吸収の無い場合と同様である. しかし吸収のある場合 (特に 5 ~ 20 μm の粒子) には一度ピークがあって一定値に漸近している.

図 9 から 5 μm の粒子の場合, 太陽コアルベドは光学的深さ約 600, 赤外コアルベドは約 100 で漸近することが分かる. 太陽放射に対して光学的深さ 600 になる CO₂ 氷経路は 3, 赤外放射に対して光学的深さ 100 になる CO₂ 氷経路は 0.5 である. よって先に赤外コアルベドが CO₂ 氷経路 0.5 で一定値になってしまい, その後太陽コアルベドだけが

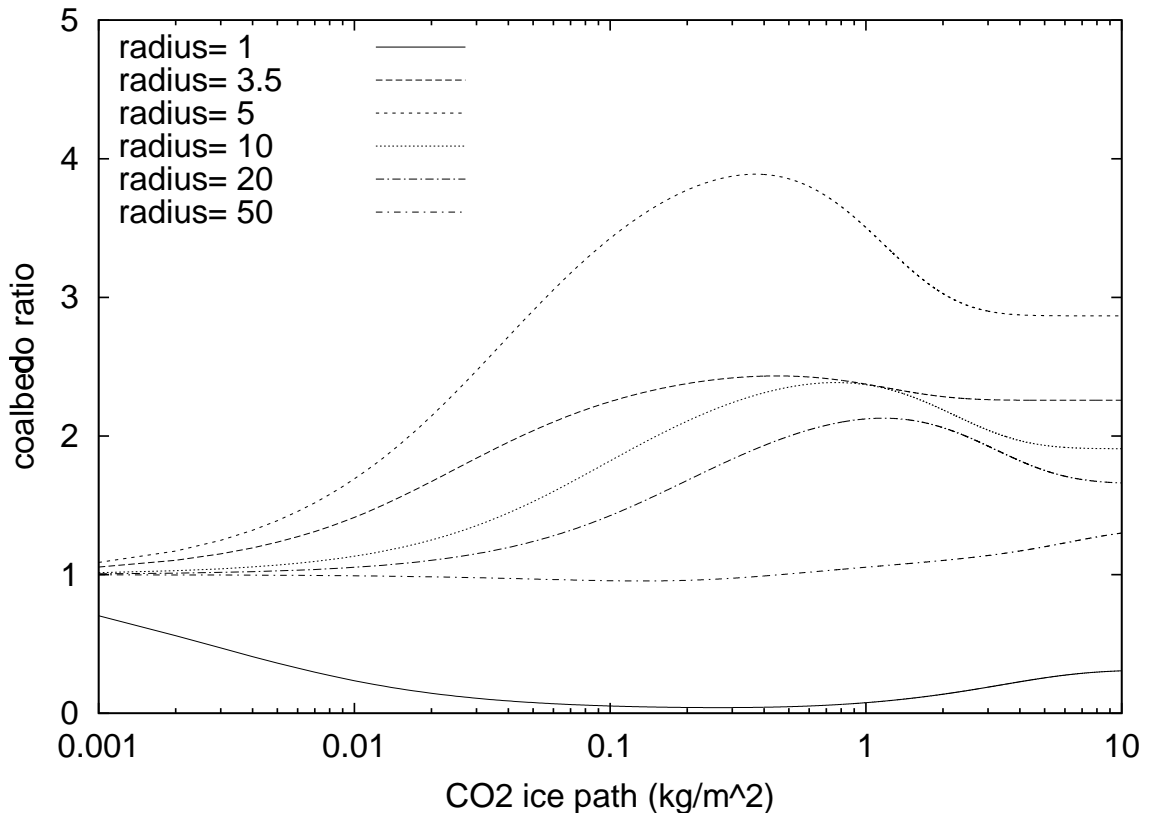


図 8: 吸収がある場合の変形コアルベド比. CO_2 氷雲の層厚 (kg/m^2) と粒径 (μm) の関数.

CO_2 氷経路 3 まで減少したために、ピークができる.

加熱因子および変形コアルベド比に影響を与える要素は、散乱か吸収かを知りたい. α_c, β_c が大きいと冷却, $\alpha_c^{\text{IR}}, \beta_c^{\text{IR}}$ が大きいと加熱に効くことが分かる. そこで半径 $5 \mu\text{m}$ の雲粒子における $\alpha_c + \frac{1}{2}\beta_c, \alpha_c^{\text{IR}} + \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}}, \alpha_c, \alpha_c^{\text{IR}}$ を図 10 に示す. これによると CO_2 の雲は反射による効果が大きく、吸収による効果は雲が厚くなったときにわずかに現われることが分かる.

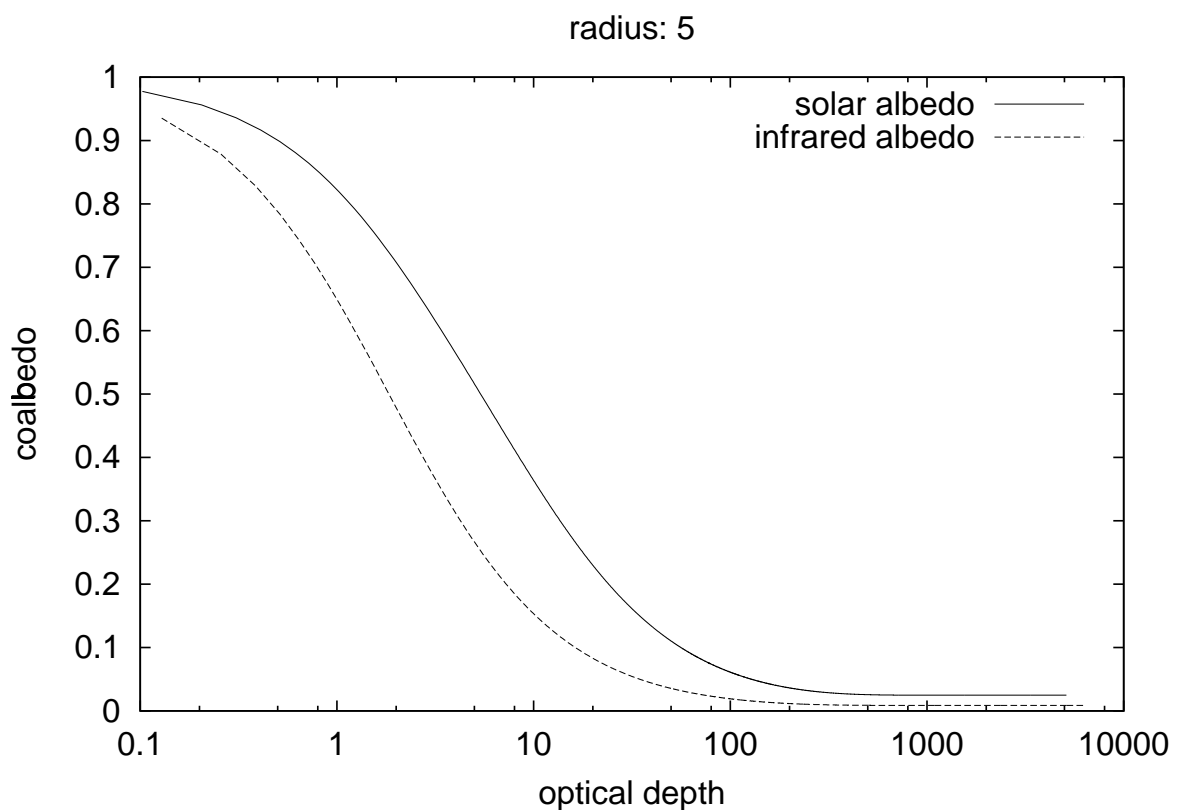


図 9: 粒径 $5 \mu\text{m}$ からなる CO_2 氷雲の赤外コアルbedoと太陽コアルbedo. 光学的深さの関数.

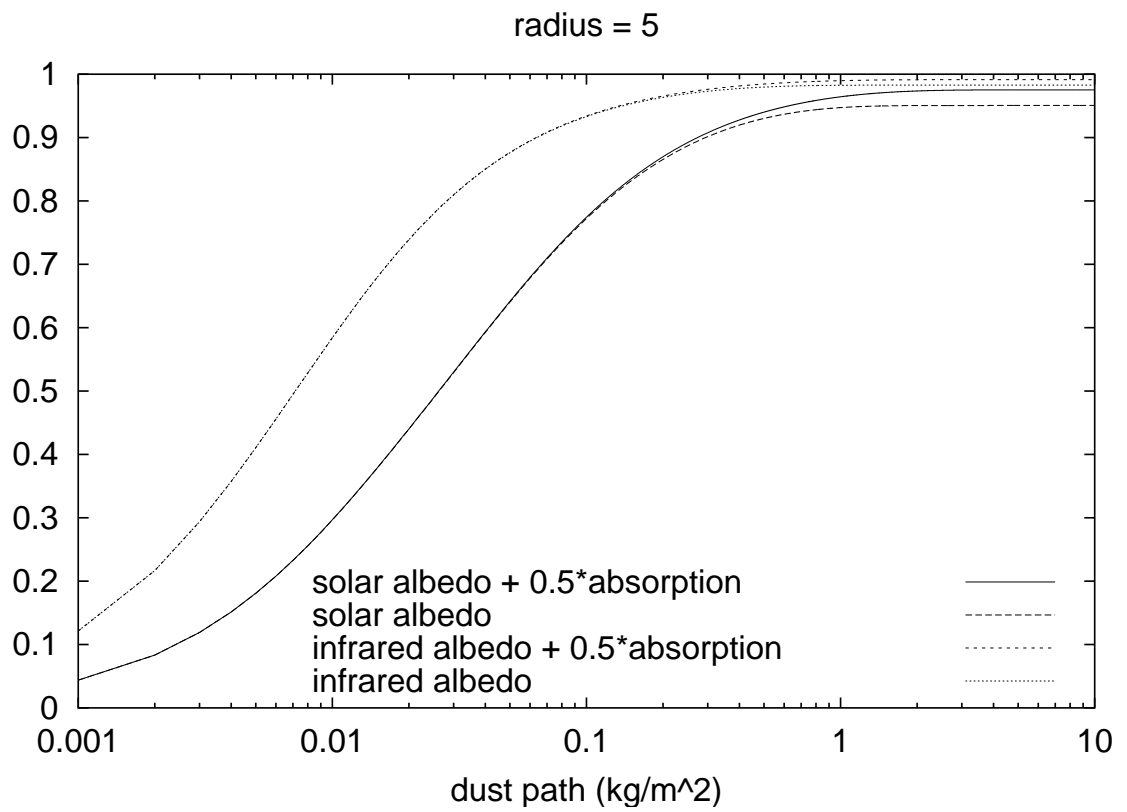


図 10: 半径 5 μm の雲粒子における $\alpha_c + \frac{1}{2}\beta_c$, $\alpha_c^{\text{IR}} + \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}}$, α_c , α_c^{IR}

3.3 ダスト層による散乱温室効果

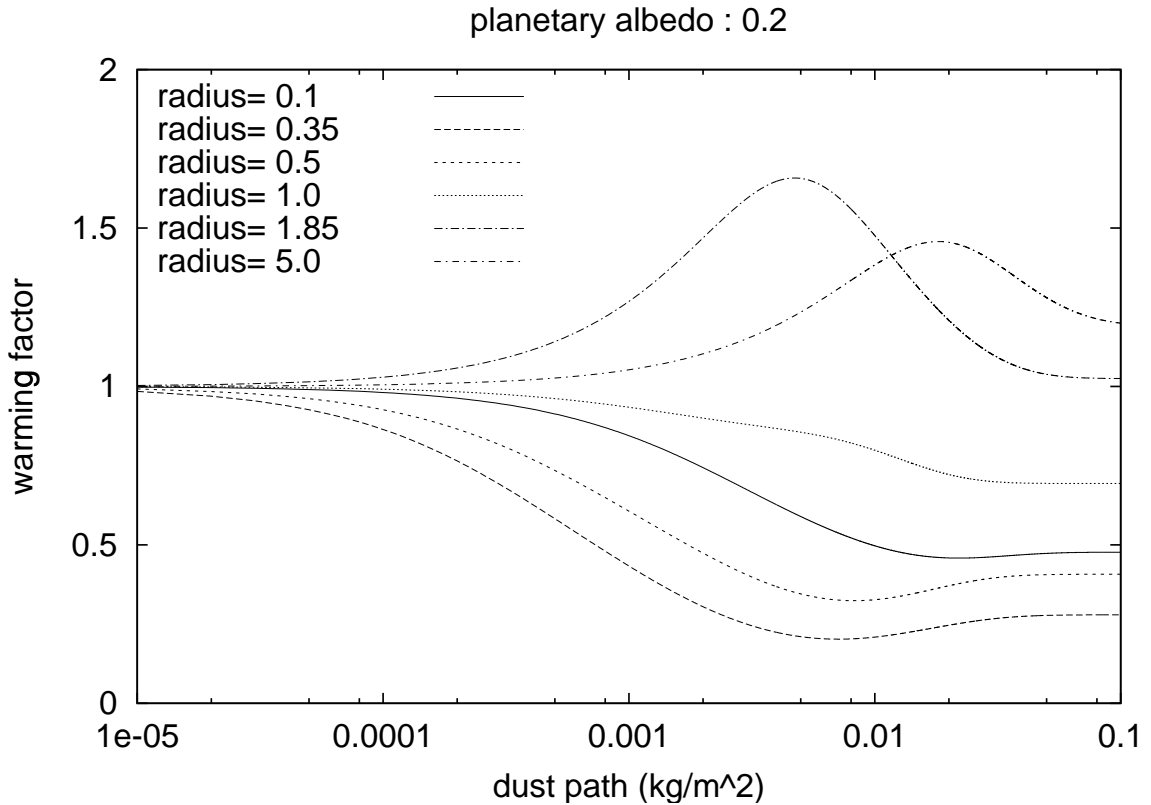


図 11: 加熱因子 γ . ダスト層の層厚 (kg/m^2) と粒径 (μm) の関数. 大気-地表系のアルベド $\alpha_0 = 0.2$

図 11, 12 はダスト層の加熱因子およびコアルベド比をダスト層の層厚 (dust path) の関数として表したものである. ダスト粒子は小さく太陽放射の散乱に対し赤外放射の散乱が弱いため太陽アルベドのほうが大きくなるため, 加熱因子は 1 以下である. 粒子半径が $1.85 \mu\text{m}$ 以上ではダスト層が薄いときは 1 以上であるが, 厚くなると 1 に近い一定値に漸近する.

図 13 から加熱因子および変形コアルベド比に影響を与える要素は, 散乱か吸収かが分かる. 経路が小さいときはダスト層は加熱に効くが, 経路が大きくなると赤外アルベドと赤外吸収率は先に飽和してしまうので逆転されて冷却に効いて来る. ダスト層においては反射による効果は小さく, 吸収の効果大きい.

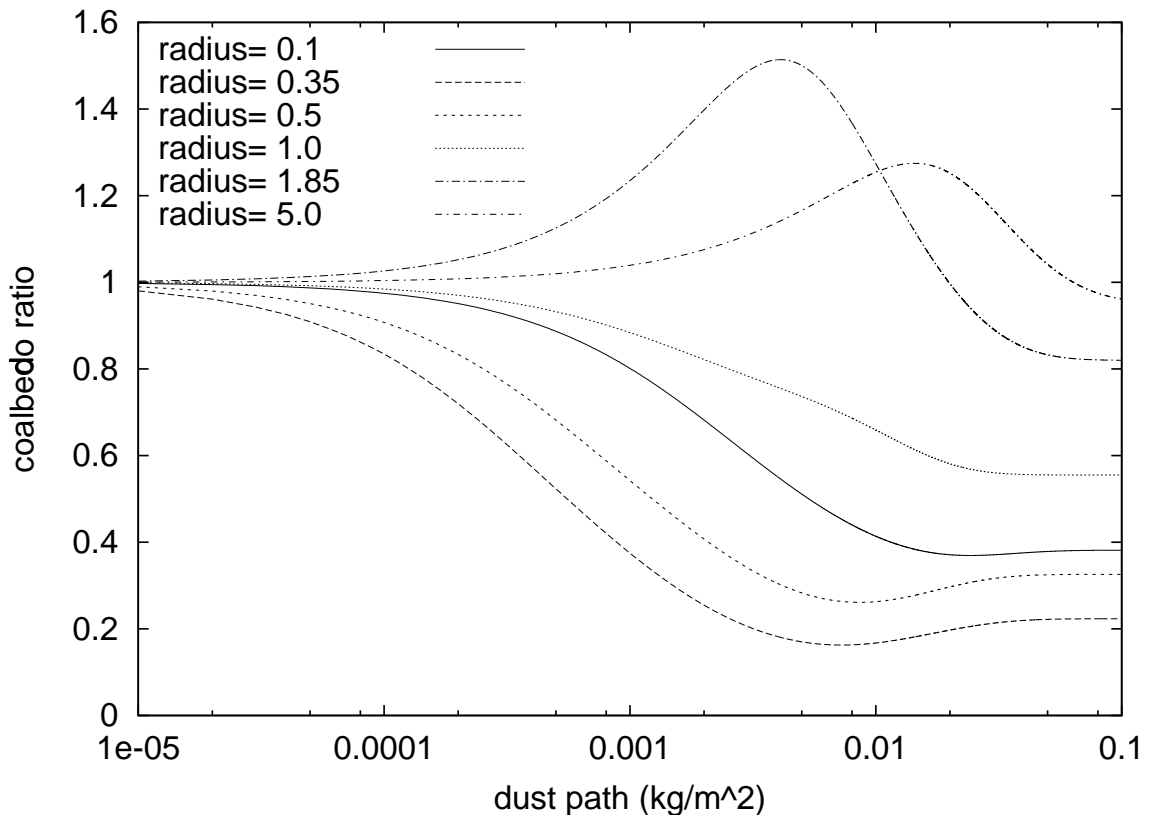


図 12: 変形コアルベド比. ダスト層の層厚 (kg/m²) と粒径 (μm) の関数.

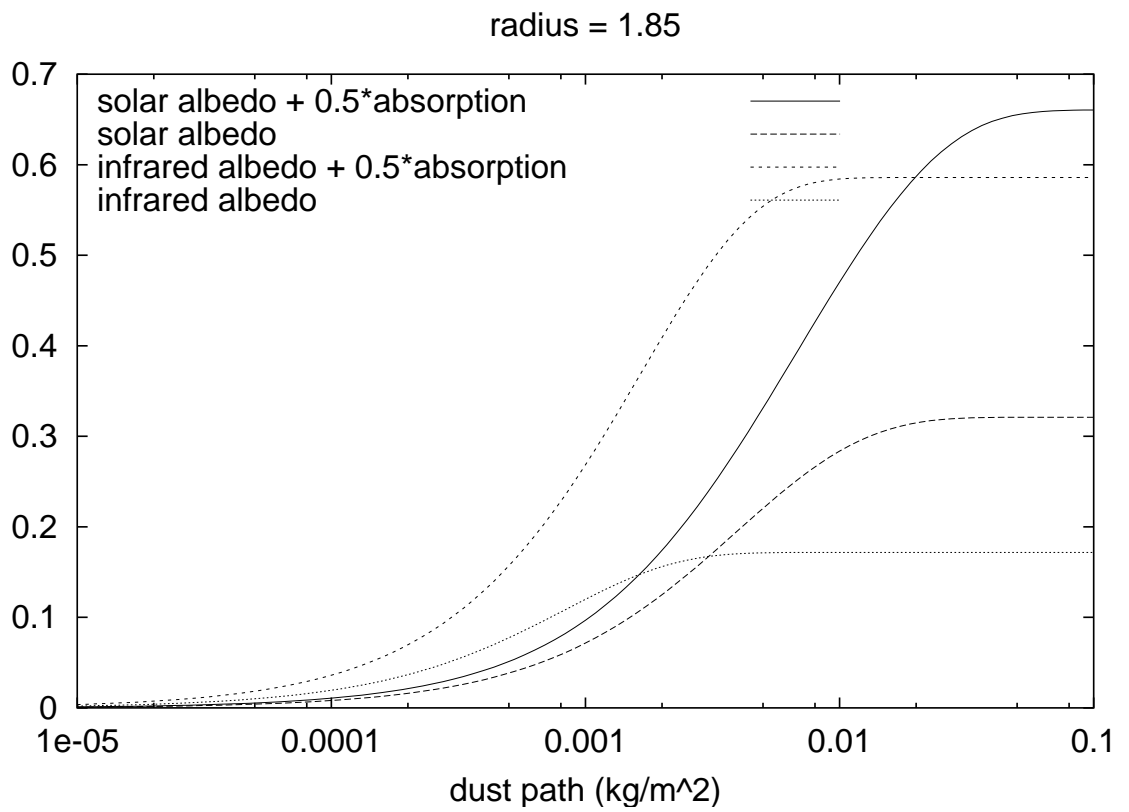


図 13: 半径 1.85 μm のダスト粒子の $\alpha_c + \frac{1}{2}\beta_c, \alpha_c^{\text{IR}} + \frac{1}{2}\beta_c^{\text{IR}}, \alpha_c, \alpha_c^{\text{IR}}$

3.4 議論

昔の火星における CO_2 氷雲およびダスト層の層厚と粒子の大きさを見積もり理にかなった加熱因子を検討する. 5 bar の $\text{CO}_2\text{-H}_2\text{O}$ 大気において, 地表に液体の水の存在が可能となる太陽光度は現在の 0.86 倍以上である (Kasting, 1991). 恒星進化の理論から 38 億年前の太陽光度は現在の 0.7 倍であったと考えられる. よって火星に液体の水が存在できる条件は加熱因子 $\gamma > 1.23$ である.

CO_2 氷雲の場合を考える. 粒径は粒子が落下して過飽和層から出るまでにかかる時間と, 粒子の成長にかかる時間から決定される. 過去の火星では CO_2 氷が 841 m の過飽和層を落下する際に 1280 秒かかるならば粒径は $100 \mu\text{m}$ まで達する (Pierrehumbert and Erlick, 1998) と推測されることから粒子は十分に大きかったと思われる. 観測からも小さい粒子は少なく, $10 \sim 100 \mu\text{m}$ の粒子が多いことが分かっている (Forget et al., 1995). ただしこの観測は現在の火星の観測であり, 大気の厚い過去の火星では粒子はより大きかったと思われる. 層厚は雲の厚さを 1 km と仮定して考える. CO_2 氷の層厚 10 kg/m^2 は密度にして 0.01 kg/m^3 である. 地表大気圧が 5 bar の場合雲の真ん中における CO_2 氷の密度は約 0.75 kg/m^3 である. CO_2 氷は沈降により減少するが, 雲の中たった 1.3 % でも残っていれば層厚 10 kg/m^2 という厚い雲の生成は可能である (Pierrehumbert and Erlick, 1998). これらのことから過去の火星において加熱因子は ~ 1.5 であり, 液体の水の存在は可能であったと考えられる.

ダスト層の場合を考える. 観測から得られた値として太陽放射に対する光学的深さは $0.2 \sim 5$ (層厚 $0.001 \sim 0.02 \text{ kg/m}^2$) (Pollack et al., 1979), ダスト粒子の有効半径は $1.85 \mu\text{m}$ (Pollack et al., 1995) である. その際の加熱因子は $1.2 \sim 1.5$ であり, ダスト層は散乱温室効果があることが分かる. ただしこの値は現在の火星の場合であり, 過去の火星のダスト層の層厚は不明である.

4 まとめ

本研究では吸収のある CO_2 氷雲およびダスト層の散乱温室効果を検討した。 CO_2 氷雲 (あるいはダスト) 層と大気層を考え、各層における放射伝達方程式を解くことにより CO_2 氷雲 (ダスト層) のアルベドおよび吸収率を求める。アルベド, 吸収率を用いて温室効果の強さを表す加熱因子を求めることができる。

放射伝達方程式を解く際の一般的な近似法は、二方向近似および δ -エディントン近似である。入射する太陽放射および赤外放射の天頂角が小さい場合には δ -エディントン近似の精度がよいことから、本研究では δ -エディントン近似を用いた。

過去の火星大気を 5 bar の CO_2 - H_2O 大気とすると、加熱因子 $\gamma > 1.23$ ならば地表に液体の水の存在が可能と考えられる。

CO_2 氷雲の場合、粒径は $\sim 5 \mu\text{m}$ で加熱因子が最大となり液体の水の存在は十分可能である。層厚が厚く粒径が大きい場合も液体の水の存在はぎりぎり可能である。昔の火星における CO_2 氷雲の層厚は厚く ($> 10 \text{ kg/m}^2$), CO_2 氷の粒径は大きかった ($10 \sim 100 \mu\text{m}$, もしくはそれ以上) と考えられる。そのとき加熱因子は 1.5 程度となり, CO_2 氷雲の散乱温室効果により液体の水の存在が可能であったと考えられる。

ダスト層の場合粒径は $\sim 2 \mu\text{m}$ で加熱因子が最大となり, 層厚が適当ならば液体の水の存在はぎりぎり可能である。過去の火星におけるダスト粒径を現在のダストの有効半径 $1.85 \mu\text{m}$ (Pollack et al., 1995) と同程度であったと仮定すると, ダスト層も散乱温室効果をもたらす。過去の火星におけるダスト層は, 層厚が不明ではあるが液体の水の存在に寄与した可能性がある。

A ガウスの公式

放射伝達方程式を近似するため、積分を和の形に書き直した。その際にこのガウスの公式を使ったので、公式の導出を行う。

偶数次のルジャンドル関数 P_{2n} は $2n$ 次の多項式なので、ルジャンドル関数の零点 x_j ($\pm j = 1, 2, 3, \dots, n$) を使って

$$P_{2n}(x) = k_n \prod_{j=-n}^n (x - x_j) \quad (55)$$

と書く。ルジャンドル関数の性質から $x_{-j} = -x_j$ である。

また $P_{2n}(x)$ をある零点の値 x_i を含む項で割った値を

$$p_{2n,i}(x) = \frac{P_{2n}}{x - x_i} = k_n \prod_{j \neq i} (x - x_j) \quad (56)$$

$$\begin{cases} p_{2n,i}(x_j) \neq 0 \\ p_{2n,i}(x_i) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

とおく。

$f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{j=-n}^n \omega_j p_{2n,j} \quad (58)$$

とすると、 x_j を代入した値は

$$f(x_j) = \omega_j p_{2n,j}(x_j) \quad (59)$$

$$\omega_j = \frac{f(x_j)}{p_{2n,j}(x_j)} \quad (60)$$

となるので

$$f(x) = \sum_{j=-n}^n \frac{f(x_j)}{p_{2n,j}(x_j)} p_{2n,j}(x) \simeq \sum_{j=-n}^n \frac{f(x_j)}{P'_{2n}(x_j)} p_{2n,j}(x). \quad (61)$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow x_j} p_{2n,j}(x) = \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{P_{2n}(x) - P_{2n}(x_j)}{x - x_j} = P'_{2n}(x_j) \quad (62)$$

を用いた. 積分すると

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \sum_{j=-n}^n \frac{f(x_j)}{P'_{2n}(x_j)} \int_{-1}^1 p_{2n,j}(x)dx \quad (63)$$

$$= \sum_{j=-n}^n \frac{f(x_j)}{P'_{2n}(x_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(x)}{x - x_j} dx \quad (64)$$

よって, 定積分 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ の近似値は

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \sum_{j=-n}^n a_j f(x_j), \quad a_j = \frac{1}{P'_{2n}(x_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(x)}{x - x_j} dx \quad (65)$$

で与えられる.

B 連立非同次微分方程式の解法

二方向近似と δ -エディントン近似の際に連立非同次微分方程式を解いて放射強度を導出する. その計算過程が多いので本文中ではなくこちらに書く. ここでは δ -エディントン近似の際に連立非同次微分方程式を解いてみるが, 二方向近似でも同じ方法で解ける.

式 (39) と式 (39) に μ を書けた式を μ ($-1 \leq \mu \leq 1$) で積分すると,

$$\frac{dI_1}{d\tau} = 3(1 - \tilde{\omega})I_0 - \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0e^{-\tau/\mu_0} \quad (66)$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}g)I_1 + \frac{3}{4}\tilde{\omega}g\mu_0F_0e^{-\tau/\mu_0} \quad (67)$$

を τ で微分すると

$$\frac{d^2I_1}{d\tau^2} = 3(1 - \tilde{\omega})\frac{dI_0}{d\tau} - \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0\left(-\frac{1}{\mu_0}\right)e^{-\tau/\mu_0} \quad (68)$$

$$\frac{d^2I_0}{d\tau^2} = (1 - \tilde{\omega}g)\frac{dI_1}{d\tau} + \frac{3}{4}\tilde{\omega}g\mu_0F_0\left(-\frac{1}{\mu_0}\right)e^{-\tau/\mu_0}. \quad (69)$$

式 (67) を式 (68) に, 式 (66) を式 (69) に代入すると

$$\frac{d^2I_1}{d\tau^2} = 3(1 - \tilde{\omega})\left\{(1 - \tilde{\omega}g)I_1 + \frac{3}{4}\tilde{\omega}g\mu_0F_0e^{-\tau/\mu_0}\right\} + \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0\frac{1}{\mu_0}e^{-\tau/\mu_0} \quad (70)$$

$$= 3(1 - \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega}g)I_1 + \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0\left\{3(1 - \tilde{\omega})g\mu_0 + \frac{1}{\mu_0}\right\}e^{-\tau/\mu_0} \quad (71)$$

$$\frac{d^2I_0}{d\tau^2} = (1 - \tilde{\omega}g)\left\{3(1 - \tilde{\omega})I_0 - \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0e^{-\tau/\mu_0}\right\} - \frac{3}{4}\tilde{\omega}gF_0e^{-\tau/\mu_0} \quad (72)$$

$$= 3(1 - \tilde{\omega}g)(1 - \tilde{\omega})I_0 + \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0\left\{-(1 - \tilde{\omega}g) - g\right\}e^{-\tau/\mu_0}. \quad (73)$$

ここで簡単のために

$$k^2 = 3(1 - \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega}g) \quad (74)$$

$$Z_1 = \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0 \left\{ 3(1 - \tilde{\omega})g\mu_0 + \frac{1}{\mu_0} \right\} \quad (75)$$

$$Z_0 = \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0 \left\{ -(1 - \tilde{\omega}g) - g \right\} \quad (76)$$

とおくと二階非同次微分方程式

$$\frac{d^2 I_1}{d\tau^2} = k^2 I_1 + Z_1 e^{-\tau/\mu_0} \quad (77)$$

$$\frac{d^2 I_0}{d\tau^2} = k^2 I_0 + Z_0 e^{-\tau/\mu_0}. \quad (78)$$

式 (77) を解く際、同次方程式 $\frac{d^2 I_1}{d\tau^2} = k^2 I_1$ の線形独立な解は $I_{11} = e^{k\tau}$, $I_{12} = e^{-k\tau}$ であるのでロンスキアンは $W = I_{11}I'_{12} - I_{12}I'_{11} = -2k$. クラメルの公式より

$$c'_1 = -\frac{Z_1 e^{-\tau/\mu_0} e^{-k\tau}}{-2k} = \frac{Z_1 e^{-(\tau/\mu_0 + k\tau)}}{2k} \quad (79)$$

$$c'_2 = -\frac{Z_1 e^{-\tau/\mu_0} e^{k\tau}}{-2k} = -\frac{Z_1 e^{-(\tau/\mu_0 - k\tau)}}{2k}. \quad (80)$$

上式を τ で積分して、 c_1, c_2 を $I_1 = c_1 I_{11} + c_2 I_{12}$ に代入すると

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{ -\frac{Z_1}{2k} \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + k} e^{-(\frac{1}{\mu_0} + k)\tau} + a_1 \right\} e^{k\tau} + \left\{ \frac{Z_1}{2k} \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} - k} e^{-(\frac{1}{\mu_0} - k)\tau} + a_2 \right\} e^{-k\tau} \\ &= a_1 e^{k\tau} + a_2 e^{-k\tau} + \frac{Z_1}{2k} \left\{ \frac{-1}{\frac{1}{\mu_0} + k} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} - k} \right\} e^{-\tau/\mu_0} \\ &= a_1 e^{k\tau} + a_2 e^{-k\tau} + \frac{\mu_0^2 Z_1}{1 - \mu_0^2 k^2} e^{-\tau/\mu_0} \\ &= a_1 e^{k\tau} + a_2 e^{-k\tau} + \alpha e^{-\tau/\mu_0} \quad \left(a_1, a_2 \text{は定数}, \alpha = \frac{\mu_0^2 Z_1}{1 - \mu_0^2 k^2} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

定数 a_1, a_2 を含んだ 2 つの項は同次方程式の一般解であり $\alpha e^{-\tau/\mu_0}$ の項が特解である。

式 (78) も同様の方法で解,

$$I_0 = a_3 e^{k\tau} + a_4 e^{-k\tau} + \beta e^{-\tau/\mu_0} \quad \left(a_3, a_4 \text{は定数}, \beta = \frac{\mu_0^2 Z_0}{1 - \mu_0^2 k^2} \right) \quad (82)$$

が得られる。

式 (81), 式 (82) において定数が a_1, a_2, a_3, a_4 の 4 つあるが, 式 (66), 式 (67) を使うと定数は 2 つになる. 上で求めた解のうち同次方程式の一般解の項

$$I_1 = a_1 e^{k\tau} + a_2 e^{-k\tau} \quad (83)$$

$$I_0 = a_3 e^{k\tau} + a_4 e^{-k\tau} \quad (84)$$

は一階同次微分方程式

$$\frac{dI_1}{d\tau} = 3(1 - \tilde{\omega})I_0 \quad (85)$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}g)I_1 \quad (86)$$

も満たすことから, それぞれ代入すると

$$ke^{k\tau}a_1 - ke^{-k\tau}a_2 - 3(1 - \tilde{\omega})e^{k\tau}a_3 - 3(1 - \tilde{\omega})e^{-k\tau}a_4 = 0 \quad (87)$$

$$(1 - \tilde{\omega}g)e^{k\tau}a_1 + (1 - \tilde{\omega}g)e^{-k\tau}a_2 - ke^{k\tau}a_3 + ke^{-k\tau}a_4 = 0 \quad (88)$$

が得られ,

$$a_1 = aa_3, \quad a_2 = -aa_4 \quad \left(a = \sqrt{\frac{3(1 - \tilde{\omega})}{1 - \tilde{\omega}g}} \right) \quad (89)$$

となる.

よって

$$I_1 = aa_3 e^{k\tau} - aa_4 e^{-k\tau} + \alpha e^{-\tau/\mu_0} \quad (90)$$

$$I_0 = a_3 e^{k\tau} + a_4 e^{-k\tau} + \beta e^{-\tau/\mu_0} \quad (91)$$

ここで有限大気では, 大気上端で下向き, また大気下端で上向きの拡散によるフラックスはないという境界条件

$$I(0; -\mu) = I_0(0) - \mu I_1(0) = 0 \quad (92)$$

$$I(\tau_1; \mu) = I_0(\tau_1) + \mu I_1(\tau_1) = 0 \quad (93)$$

を使うと

$$\begin{aligned} I(0; -\mu) &= a_3 + a_4 + \beta - \mu\{aa_3 - aa_4 + \alpha\} \\ &= (1 - \mu a)a_3 + (1 + \mu a)a_4 + \beta - \mu\alpha = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} I(\tau_1; \mu) &= a_3 e^{k\tau_1} + a_4 e^{-k\tau_1} + \beta e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \mu\{aa_3 e^{k\tau_1} - aa_4 e^{-k\tau_1} + \alpha e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}}\} \\ &= (1 + \mu a)a_3 e^{k\tau_1} + (1 - \mu a)a_4 e^{-k\tau_1} + (\beta + \mu\alpha)e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

ここで

$$1 - \mu a = u, \quad 1 + \mu a = v, \quad \beta - \mu\alpha = \gamma, \quad \beta + \mu\alpha = \varepsilon \quad (96)$$

とおいて a_3, a_4 を求めると (見やすいように $a_3 = K, a_4 = H$ とする),

$$K = a_3 = -\frac{\varepsilon v e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma u e^{-k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}} \quad (97)$$

$$H = a_4 = \frac{\varepsilon u e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma v e^{k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}}. \quad (98)$$

式 (90), 式 (91) に代入すると

$$I_1 = aK e^{k\tau} - aH e^{-k\tau} + \alpha e^{-\tau/\mu_0} \quad (99)$$

$$I_0 = K e^{k\tau} + H e^{-k\tau} + \beta e^{-\tau/\mu_0} \quad (100)$$

係数をまとめてもう一度書くと

$$K = -\frac{\varepsilon v e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma u e^{-k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}}, \quad H = \frac{\varepsilon u e^{-\frac{\tau_1}{\mu_0}} - \gamma v e^{k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}}, \quad (101)$$

$$\varepsilon = \beta + \mu\alpha, \quad \gamma = \beta - \mu\alpha, \quad (102)$$

$$u = 1 - \mu a, \quad v = 1 + \mu a \quad (103)$$

$$a^2 = \frac{3(1 - \tilde{\omega})}{1 - \tilde{\omega}g}, \quad (104)$$

$$k^2 = 3(1 - \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega}g), \quad (105)$$

$$\alpha = \frac{\mu_0^2 Z_1}{1 - \mu_0^2 k^2}, \quad \beta = \frac{\mu_0^2 Z_0}{1 - \mu_0^2 k^2}, \quad (106)$$

$$Z_0 = \frac{3}{4} \tilde{\omega} F_0 \left\{ -(1 - \tilde{\omega}g) - g \right\}, \quad Z_1 = \frac{3}{4} \tilde{\omega} F_0 \left\{ 3(1 - \tilde{\omega})g\mu_0 + \frac{1}{\mu_0} \right\}. \quad (107)$$

以上のことから上向き放射強度, 下向き放射強度はそれぞれ

$$I^\uparrow = I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau) = K v e^{k\tau} + H u e^{-k\tau} + \varepsilon e^{-\tau/\mu_0} \quad (108)$$

$$I^\downarrow = I(\tau, -\mu) = I_0(\tau) - \mu I_1(\tau) = K u e^{k\tau} + H v e^{-k\tau} + \gamma e^{-\tau/\mu_0} \quad (109)$$

C コアルベド比の検証

本研究によるコアルベド比の結果は, Pierrehumbert and Erlick (1998) の結果とは異なる.

C.1 漸近形からもとめたコアルベド比

Pierrehumbert and Erlick (1998) によると吸収のない厚い雲の場合は, コアルベドは

$$1 - \alpha_c = \left(\mu_0 + \frac{2 + 3g\mu_0}{3(1-g)} \right) \frac{1}{\tau_1} \quad (110)$$

と簡単な表現になり, 一次散乱係数の影響を量的に明らかにするのに役立つ.

しかし Pierrehumbert and Erlick (1998) の図 3 ではコアルベド比が 1 を超える半径は $5 \mu\text{m}$, 最大になる半径は $20 \mu\text{m}$ である. 雲が厚い場合のコアルベドを求める式 (110) からコアルベド比を求めると図 14 となる. 図 6 とほぼ一致することから, 本研究は正しいとして以降の議論も進めていく.

C.2 二方向近似によるコアルベド比

δ -エディントン近似によるバグではないことを確かめるために, 二方向近似でも同じ図を求める.

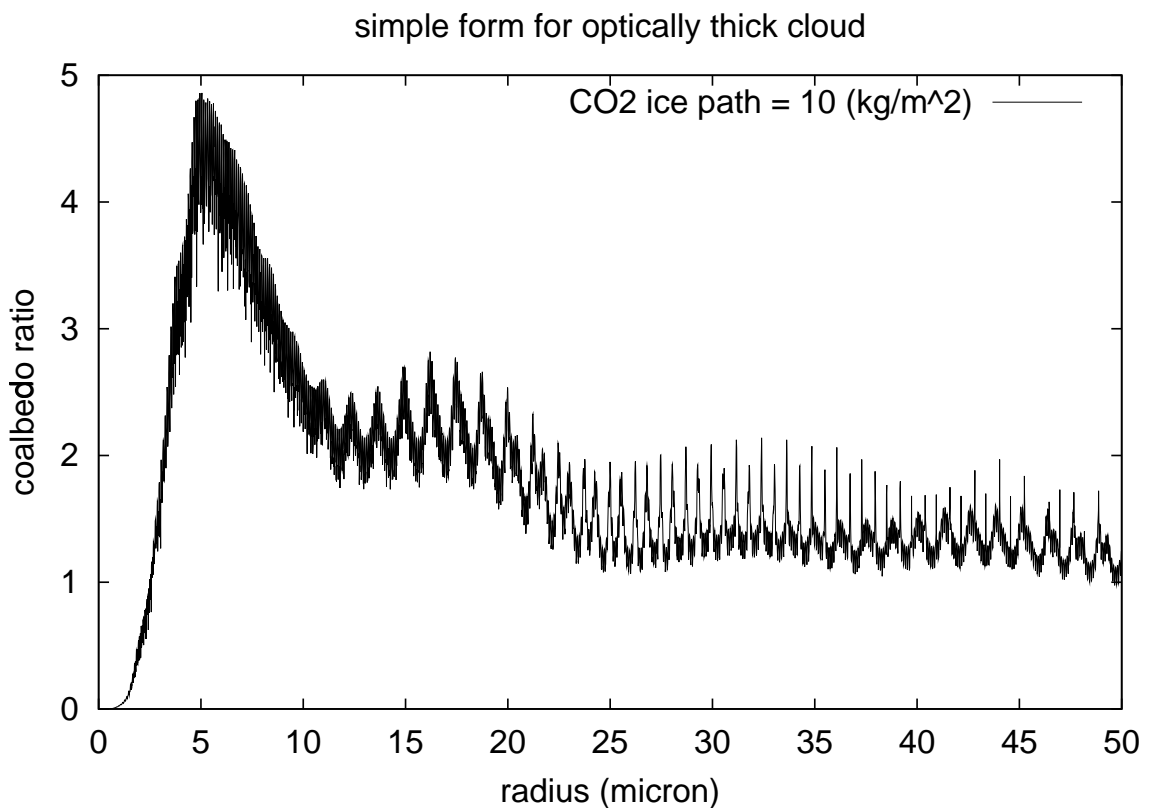


図 14: 雲粒子による吸収がなく雲が厚いとき (10 kg/m^2) の漸近形の式 (110) から求めたコアルベド比. 粒径 (μm) の関数.

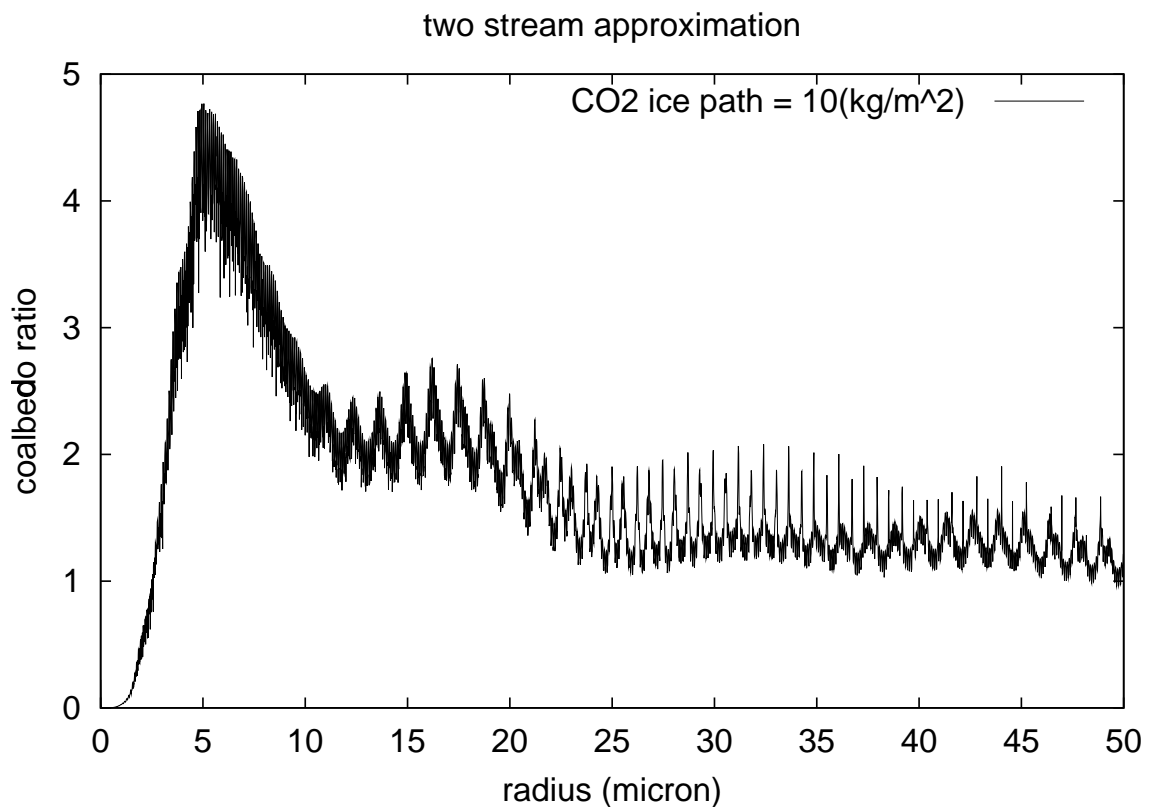


図 15: 雲粒子による吸収がなく雲が厚いとき (10 kg/m^2) のコアルベド比. 粒径 (μm) の関数. 二方向近似による

D ミー理論

本研究では雲粒子およびダスト粒子の光学定数を求める際に、ミー理論から求めた。ここではミー理論とは何かについて書く (Bohren and Huffman, 1980 参照)。

D.1 電磁場の性質

均質で等方的な媒質中のマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (111)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (112)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (113)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\mu\mathbf{E} \quad (114)$$

である。

それぞれの回転をとると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E} \quad (115)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{E} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H} \quad (116)$$

ここで

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) \quad (117)$$

を使った。

以上のことから

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (k^2 = \omega^2\varepsilon\mu) \quad (118)$$

が得られ、 \mathbf{E} , \mathbf{H} はベクトルの波動方程式を満たすことが分かる。

D.2 ベクトルの波動方程式

スカラー関数 ψ , 任意の定ベクトル \mathbf{c} から

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi). \quad (119)$$

というベクトル関数をおく. あらゆるベクトル関数の回転の発散はゼロになるので

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (120)$$

である.

\mathbf{M} の回転の回転をとると

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\nabla \cdot \nabla) + (\mathbf{M} \cdot \nabla)\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{M} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{M} \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \nabla \times (\mathbf{c}\psi)) &= \nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{c}\psi)) - \nabla \times (\mathbf{c}\psi)(\nabla \cdot \nabla) \\ &\quad + (\nabla \times (\mathbf{c}\psi) \cdot \nabla)\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) \\ &= \nabla \times (-\nabla^2(\mathbf{c}\psi)) \end{aligned} \quad (122)$$

となる. また \mathbf{M} に k^2 を掛けると

$$k^2 \mathbf{M} = k^2 (\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) \quad (123)$$

なのでこれら 2 つの式を足し合わせると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} &= \nabla \times (\nabla^2(\mathbf{c}\psi)) + k^2 (\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) \\ &= \nabla \times (\mathbf{c}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)) \end{aligned} \quad (124)$$

ψ がスカラーの波動方程式

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (125)$$

を満たすなら, \mathbf{M} はベクトルの波動方程式を満たす.

いまもう一つのベクトル関数を

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \quad (126)$$

とおくと, \mathbf{N} もベクトルの波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0 \quad (127)$$

を満たす. また

$$\nabla \times \mathbf{N} = k \mathbf{M} \quad (128)$$

という関係もある.

\mathbf{M}, \mathbf{N} は

- 発散がゼロ
- M の回転が N に比例, N の回転が M に比例

ということから, 電磁場を表すのに必要な性質を全て持っている.

ここでスカラーの波動方程式の話に戻る. 球による散乱の様子を知りたいので, 球座標系での波動方程式を考える. 半径ベクトル \boldsymbol{r} を使って

$$\boldsymbol{M} = \nabla \times (\boldsymbol{r}\psi) \quad (129)$$

とすると, \boldsymbol{M} は球座標系でのベクトル波動方程式の解となる. 球対称の問題の場合, \boldsymbol{M} は $|\boldsymbol{r}| = \text{一定}$ とあらゆる場所で垂直である.

D.3 波動方程式を解く

D.3.1 球座標系で表す

波動方程式

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (130)$$

を球座標系で表すと

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (131)$$

である. いま

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (132)$$

で変数分離すると

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (133)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (134)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0 \quad (135)$$

ここで m, n は分離定数である.

D.3.2 方位角成分

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (136)$$

の解は

$$\Phi_e = \cos m\phi, \quad \Phi_o = \sin m\phi \quad (137)$$

の線形結合で表される.

ψ は方位角に対して一つの値しか持たないとするので

$$\lim_{\nu \rightarrow 2\pi} \psi(\phi + \nu) = \psi(\phi) \quad (138)$$

を満たすためには $m \geq 0$.

D.3.3 天頂角成分

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0 \quad (139)$$

$\mu = \cos\theta$ とすると

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] \Theta = 0 \quad (140)$$

この式はルジャンドルの陪微分方程式として知られ, 解は第一種ルジャンドル陪関数 P_n^m である. ロドリゲの公式より

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{2^n n!} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2-1)^n \quad (141)$$

と表すことが出来る. $(\mu^2-1)^n$ は μ の $2n$ 次の多項式なので P_n^m が恒等的にゼロにならないためには $2n \geq n+m$ すなわち $n \geq m$ でなければならない. これが $\theta=0, \theta=\pi$ で有限な値である為の条件である.

D.3.4 動径方向成分

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0 \quad (142)$$

変数を $\rho = kr$ として関数 $Z = R\sqrt{\rho}$ を定義すると

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[\rho^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0 \quad (143)$$

この二階常微分方程式はベッセルの微分方程式という。この線形独立な解はベッセル関数 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 、ノイマン関数 $N_{n+\frac{1}{2}}$ 、それらの線形結合であるハンケル関数 $H_{n+\frac{1}{2}}$ で表される。これら半奇数次の円柱関数は、球ベッセル関数として次のように定義される。

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (144)$$

$$n_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (145)$$

$$h_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + in_n(\rho) \quad (146)$$

$$h_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho) = j_n(\rho) - in_n(\rho) \quad (147)$$

またこれら 4 つの球ベッセル関数のどれかを表すために $z_n(\rho)$ とおく。 $R \propto \frac{Z}{\sqrt{\rho}}$ ということから、動径成分の解は球ベッセル関数で表される。

D.3.5 解の合成

以上のことからスカラーの波動方程式の解は

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr) \quad (148)$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr) \quad (149)$$

を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{emn} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{emn}), & \mathbf{M}_{omn} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{omn}), \\ \mathbf{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{emn}}{k}, & \mathbf{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{omn}}{k} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{emn} &= \frac{-m}{\sin\theta} \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{omn} &= \frac{m}{\sin \theta} \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(\rho) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{emn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos m\phi n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - m \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{omn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin m\phi n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - m \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (153)$$

電磁場はこれらの関数の無限級数として表すことが出来る。

D.4 平面波の散乱

D.4.1 入射波の展開

x 方向に偏光された入射波を球座標系で表すと

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{ikr \cos \theta} \mathbf{e}_x \quad (154)$$

ここで任意の球において

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (155)$$

である。

入射波を M, N を使って表すと

$$\mathbf{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} \mathbf{M}_{emn} + B_{omn} \mathbf{M}_{omn} + A_{emn} \mathbf{N}_{emn} + A_{omn} \mathbf{N}_{omn}) \quad (156)$$

となる。

D.5 展開係数を求める

式 (49) と M, N の内積を立体角積分する.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi, & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{om'n'} \sin \theta d\theta d\phi, \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi, & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{om'n'} \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

E_i にも M, N が含まれているのでそれぞれの関係を先に求める.

D.5.1 M, N の関係

$\sin m\phi, \cos m\phi$ の直交性から

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{omn} \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (\text{for all } m, m', n, n') \quad (157)$$

また以下の組 $(\mathbf{N}_{emn}, \mathbf{M}_{emn}), (\mathbf{N}_{omn}, \mathbf{M}_{omn}), (\mathbf{N}_{omn}, \mathbf{N}_{emn})$ も同様である.

次に $(\mathbf{M}_{emn}, \mathbf{N}_{omn}), (\mathbf{M}_{omn}, \mathbf{N}_{emn})$ の組を計算する. $m \neq m'$ の場合は $\sin m\phi, \cos m\phi$ の直交性からゼロになる. $m = m'$ のとき全ての n, n' において

$$m \int_0^\pi \left(P_n^m \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + P_{n'}^m \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) = m [P_n^m P_{n'}^m]_0^\pi = 0 \quad (158)$$

これはルジャンドル陪関数とルジャンドル関数の関係が

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \quad (159)$$

であり, $\mu = \cos \theta$ とおくと $m = 0$ の場合を除いて $\theta = 0, \theta = \pi$ で $P_n^m = 0$ となることから得られる. 以上のことから全ての m, n, n' で成立.

最後は $(\mathbf{M}_{emn}, \mathbf{M}_{emn}), (\mathbf{N}_{emn}, \mathbf{N}_{emn}), (\mathbf{M}_{omn}, \mathbf{M}_{omn}), (\mathbf{N}_{omn}, \mathbf{N}_{emn})$ である. $m \neq m'$ のときは $\sin m\phi, \cos m\phi$ の直交性からゼロ. $m = m'$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ 2n(n+1) P_n^m P_{n'}^m \sin \theta + \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} P_n^m + \sin \theta \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{n'}^m \right) \right\} d\theta \\ &= n(n+1) \int_0^\pi P_n^m P_{n'}^m \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \left[\sin \theta \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} P_n^m + \sin \theta \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{n'}^m \right]_0^\pi \\ &= n(n+1) \int_0^\pi P_n^m P_{n'}^m \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+m)!}{2n+1(n-m)!} & n = n' \\ 0 & n \neq n' \end{cases} \quad (160) \end{aligned}$$

の関係から, $m \neq 0, n \neq n'$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{emn} \cdot \mathbf{M}_{emn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (161)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{omn} \cdot \mathbf{M}_{omn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (162)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{emn} \cdot \mathbf{N}_{emn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (163)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{omn} \cdot \mathbf{N}_{omn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (164)$$

また $m = 0$ のときは $\mathbf{M}_{omn}, \mathbf{N}_{omn}$ はゼロ.

D.5.2 係数 B, A の式

以上のことから

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi \quad (165)$$

を計算することによって

$$B_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (166)$$

という式が得られる. 同様に $B_{omn}, A_{emn}, A_{omn}$ も得られる.

$$B_{omn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi}, \quad (167)$$

$$A_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi}, \quad (168)$$

$$A_{omn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (169)$$

D.6 入射する電磁波

また球座標系の入射波の式 (154) を式 (166) ~ (169) の \mathbf{E}_i に代入すると, $\sin m\phi, \cos m\phi$ の直交性により全ての m, n において $B_{emn} = A_{omn} = 0$ である. また $B_{omn} = A_{emn}$ は $m = 1$ 以外の項もまた 0 となる. これらのことから,

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} (B_{o1n} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} + A_{e1n} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \quad (170)$$

である. 上付き文字 (1) というのは入射波の性質から, 原点で有限の値をもつ球ベッセル関数の性質を採用したことを示す.

実際に展開係数を求めてみる. 始めに B_{o1n} を求める. B_{o1n} の分母は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}|^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\sin^2 \phi \frac{P_n^1 P_n^1}{\sin^2 \theta} + \cos^2 \phi \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) j_n^2(\rho) \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \pi j_n^2(\rho) \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1 P_n^1}{\sin^2 \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \sin \theta d\theta \\
&= \pi j_n^2(\rho) \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}
\end{aligned} \tag{171}$$

B_{o1n} の分子は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_0 e^{i\rho \cos \theta} \left(\cos^2 \phi P_n^1 j_n(\rho) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sin^2 \phi \frac{dP_n^1}{d\theta} j_n(\rho) \right) \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^\pi \pi j_n(\rho) E_0 e^{i\rho \cos \theta} \left(P_n^1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \sin \theta d\theta \\
&= \pi j_n(\rho) E_0 \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P_n^1) e^{i\rho \cos \theta} d\theta \\
&= \pi j_n(\rho) E_0 \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \left(-\frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \right) e^{i\rho \cos \theta} d\theta \\
&= \pi j_n(\rho) E_0 \int_0^\pi n(n+1) P_n \sin \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta \\
&= \pi j_n(\rho) E_0 n(n+1) 2j_n(\rho) i^n
\end{aligned} \tag{172}$$

最後の変形はポアソン積分のゲーゲンバウエルの方法

$$j_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi P_n \sin \theta e^{i\rho \cos \theta} d\theta \tag{173}$$

を使った. よって展開係数

$$B_{o1n} = i^n E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \tag{174}$$

次に A_{e1n} を求める. 分母は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}|^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{j_n(\rho)}{\rho} \right)^2 \cos^2 \phi n^2 (n+1)^2 P_n^1 P_n^1 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos^2 \phi}{\rho^2} \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho)) \right)^2 + \frac{\sin^2 \phi}{\rho^2} \frac{P_n^1 P_n^1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho)) \right)^2 \} \sin \theta d\theta d\phi \\
= & \pi \frac{j_n^2(\rho)}{\rho^2} n^2 (n+1)^2 \int_0^{2\pi} P_n^1 P_n^1 \sin \theta d\theta \\
& + \pi \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho)) \right)^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} + \frac{P_n^1 P_n^1}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta d\phi \\
= & \pi \frac{j_n^2(\rho)}{\rho^2} n^2 (n+1)^2 \frac{2n(n+1)}{2n+1} + \pi \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho)) \right)^2 n(n+1) \frac{2n(n+1)}{2n+1} \\
= & \pi \frac{1}{\rho^2} \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \left\{ j_n^2(\rho) n(n+1) + \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n(\rho)) \right)^2 \right\} \quad (175)
\end{aligned}$$

分子は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_0 e^{i\rho \cos \theta} \left(\frac{j_n}{\rho} n(n+1) P_n^1 \sin \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \cos^2 \phi \cos \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \sin^2 \phi \frac{P_n^1}{\sin \theta} \right) \sin \theta d\theta d\phi \\
= & E_0 \frac{j_n}{\rho} n(n+1) \pi \int_0^\pi e^{i\rho \cos \theta} P_n^1 \sin \theta \sin \theta d\theta \\
& + E_0 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \pi \int_0^\pi \left(\cos \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \right) e^{i\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta \\
= & E_0 \frac{j_n}{\rho} n(n+1) \pi \frac{2n(n+1) j_n i^n}{i\rho} + E_0 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \pi \frac{2n(n+1) i^n}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \\
= & E_0 \frac{1}{\rho^2} i^n 2n(n+1) \pi \left\{ \frac{j_n^2 n(n+1)}{i} + \left(\frac{d}{d\rho}(\rho j_n) \right)^2 \right\} \quad (176)
\end{aligned}$$

よって展開係数は

$$A_{e1n} = -i E_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (177)$$

これらのことから平面波の入射波は

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \quad (178)$$

電場の回転をとると磁場なので

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k}{\omega \mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + i \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}) \quad (179)$$

D.7 内部波と散乱波

散乱電磁場 ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) と内部電磁場 ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) も同じように展開できる. 球と媒質との境界条件

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{e}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{e}_r = 0, \quad (180)$$

は電磁波は球表面で連続ということなので, 入射波の展開の形から散乱波と内部波の展開の形も決まる.

D.7.1 内部波

内部波は原点で発散するのはおかしいので, 球ベッセル関数として $z_n = j_n(k_1 r)$ をとる. k_1 は球内部の波数である.

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - d_n i \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \quad (181)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega \mu_1} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (d_n \mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + i c_n \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}) \quad (182)$$

μ_1 は球の透磁率である.

D.7.2 散乱波

散乱波では球ベッセル関数も球ノイマン関数も入っている. そこで球ハンケル関数を使うのだが, 二種類の形がある.

$$h_n^{(1)}(kr) \sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr}, \quad h_n^{(2)}(kr) \sim -\frac{i^n e^{-ikr}}{ikr} \quad kr \gg n^2 \quad (183)$$

前者は外向きの波, 後者は内向きの波を表すので $h_n^{(1)}$ を使う.

$$\mathbf{E}_s = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (i a_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}) \quad (184)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega \mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (i b_n \mathbf{N}_{o1n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{e1n}^{(3)}) \quad (185)$$

D.8 角度依存関数

便利のために

$$\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin \theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta} \quad (186)$$

と角度依存関数を定義する. 漸化式は

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1} \mu \pi_{n-1} - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2} \quad (187)$$

$$\tau_n = n \pi_{n+1} - (n+1) \mu \pi_n \quad (188)$$

$$\text{or } \tau_n = n \mu \pi_n - (n+1) \pi_{n-1}. \quad (189)$$

ここで $\mu = \cos \theta$, $\pi_0 = 0$, $\pi_1 = 1$ である. また

$$\pi_n(-\mu) = (-1)^{n-1} \pi_n(\mu), \quad \tau_n(-\mu) = (-1)^n \tau_n(\mu) \quad (190)$$

というように n によって偶関数にも奇関数にもなる.

M, N を書き換えると,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{o1n} &= \cos \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{M}_{e1n} &= -\sin \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta - \cos \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{N}_{o1n} &= \sin \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\cos \theta)}{\rho} \mathbf{e}_r \\ &\quad + \sin \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\cos \theta)]'}{\rho} \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\cos \theta)]'}{\rho} \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{N}_{e1n} &= \cos \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\cos \theta)}{\rho} \mathbf{e}_r \\ &\quad + \cos \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\cos \theta)]'}{\rho} \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\cos \theta)]'}{\rho} \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

D.9 散乱係数

球による散乱や吸収について理解するために, 粒子の大きさや光学特性, 媒質の性質による偏かを知りたい. そのためにはまず散乱効率 a_n, b_n を陽な表現で表したい.

前述の境界条件

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{e}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{e}_r = 0, \quad (191)$$

を成分で書くと

$$\begin{aligned} E_{i\theta} + E_{s\theta} &= E_{1\theta}, & E_{i\phi} + E_{s\phi} &= E_{1\phi}, \\ H_{i\theta} + H_{s\theta} &= H_{1\theta}, & H_{i\phi} + H_{s\phi} &= H_{1\phi}. \end{aligned} \quad (\text{at } r = a). \quad (192)$$

であることから以下の 4 つの式を得る.

$$\begin{aligned} j_n(mx)c_n + h_n^{(1)}(x)b_n &= j_n(x), \\ \mu[mxj_n(mx)]'c_n + \mu_1[xh_n^{(1)}(x)]'b_n &= \mu_1[xj_n(x)]', \\ \mu mj_n(mx)d_n + \mu_1h_n^{(1)}(x)a_n &= \mu_1j_n(x), \\ m[xj_n(mx)]'d_n + m[xh_n^{(1)}(x)]'a_n &= m[xj_n(x)]'. \end{aligned} \quad (193)$$

ここでサイズパラメータと相対屈折率を定義した.

$$x = ka = \frac{2\pi Na}{\lambda}, \quad m = \frac{k_1}{k} = \frac{N_1}{N}$$

N_1, N は粒子と媒質の屈折率である.

散乱係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu_1 j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'} \quad (194)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(x)[xj_n(x)]' - \mu j_n(mx)[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'} \quad (195)$$

となる. ここでリカッチ-ベッセル関数

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho) \quad (196)$$

を使うと, 粒子の内外で透磁率が等しいなら散乱係数は

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \quad (197)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)} \quad (198)$$

D.10 断面積

電磁場が分かればポインティングベクトルを決定することが出来る. 粒子の外でのポインティングベクトル \mathbf{S} は 3 つの項の和である.

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_{\text{ext}}, \\ \mathbf{S}_i &= \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*\}, \quad \mathbf{S}_s = \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} \\ \mathbf{S}_{\text{ext}} &= \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_s^* + \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_i^*\}\end{aligned}\quad (199)$$

粒子を含む半径 r の仮想的な球に平面波が入射してきたとき, その球に入って来る電磁波のエネルギーの割合は

$$W_a = - \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r dA \quad (200)$$

である. $W_a > 0$ なら, エネルギーは球内で吸収されている. 媒質が非吸収なら吸収は粒子によるもので W_a は粒子によって吸収されたエネルギーの割合である. W_a は 3 つの項からなり, $W_a = W_i + W_s + W_{\text{ext}}$.

$$\begin{aligned}W_i &= - \int_A \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_r dA \\ &= \frac{1}{2}\text{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (E_{i\theta}H_{i\phi}^* - E_{i\phi}H_{i\theta}^*)r^2 \sin\theta d\theta d\phi,\end{aligned}\quad (201)$$

$$\begin{aligned}W_s &= - \int_A \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{e}_r dA \\ &= \frac{1}{2}\text{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (E_{s\theta}H_{s\phi}^* - E_{s\phi}H_{s\theta}^*)r^2 \sin\theta d\theta d\phi,\end{aligned}\quad (202)$$

$$\begin{aligned}W_{\text{ext}} &= - \int_A \mathbf{S}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_r dA \\ &= \frac{1}{2}\text{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (E_{i\phi}H_{s\theta}^* - E_{i\theta}H_{s\phi}^* - E_{s\theta}H_{i\phi}^* + E_{s\phi}H_{i\theta}^*)r^2 \sin\theta d\theta d\phi.\end{aligned}\quad (203)$$

媒質が非吸収なら W_i は理想的にゼロになるので

$$W_a = W_{\text{ext}} - W_s \quad (204)$$

積分をするために, まず x 偏光された入射波は

$$E_{i\theta} = \frac{\cos\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\psi_n\pi_n - i\psi_n'\tau_n), \quad H_{i\theta} = \frac{k}{\omega\mu} \tan\phi E_{i\theta},$$

$$\begin{aligned}
E_{i\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i\psi'_n \pi_n - \psi_n \tau_n), & H_{i\phi} &= \frac{-k}{\omega\mu} \cot \phi E_{i\phi}, \\
E_{s\theta} &= \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \xi'_n \tau_n - b_n \xi_n \pi_n) \\
E_{s\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (b_n \xi_n \tau_n - ia_n \xi'_n \pi_n) & (205) \\
H_{s\theta} &= \frac{k}{\omega\mu} \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi'_n \tau_n - a_n \xi_n \pi_n) \\
H_{s\phi} &= \frac{k}{\omega\mu} \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi'_n \pi_n - a_n \xi_n \tau_n)
\end{aligned}$$

ここで $E_n = i^n E_0 (2n+1)/n(n+1)$ である。よって代入すると

$$W_s = \frac{\pi |E_0|^2}{k\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \operatorname{Re}\{g_n\} \quad (206)$$

である。 g_n は $-i\xi_n^* \xi'_n$ で定義され

$$g_n = (\chi_n^* \psi'_n - \psi_n^* \chi'_n) - i(\psi_n^* \psi'_n + \chi_n^* \chi'_n) \quad (207)$$

ここでリッカチ-ベッセル関数 χ_n は $-\rho y_n(\rho)$, なので $\xi_n = \psi_n - i\chi_n$. 引数が実数のときは ψ_n, χ_n は実数なのでロンスキー行列式から

$$\chi_n \psi'_n - \psi_n \chi'_n = 1 \quad (208)$$

よって散乱断面積

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{W_s}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (209)$$

同じように、消散断面積は

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}\{a_n + b_n\}. \quad (210)$$

また散乱断面積, 消散断面積を粒子の幾何学的断面積で割った値を散乱効率, 消散効率と呼ぶ。図 16 をみると, 吸収があまり大きくない場合は半径と波長が同程度 (サイズパラメータ 6) までは単調に増加し, その後減衰振動する。吸収が無い場合は, 散乱効率は 2 に漸近する。

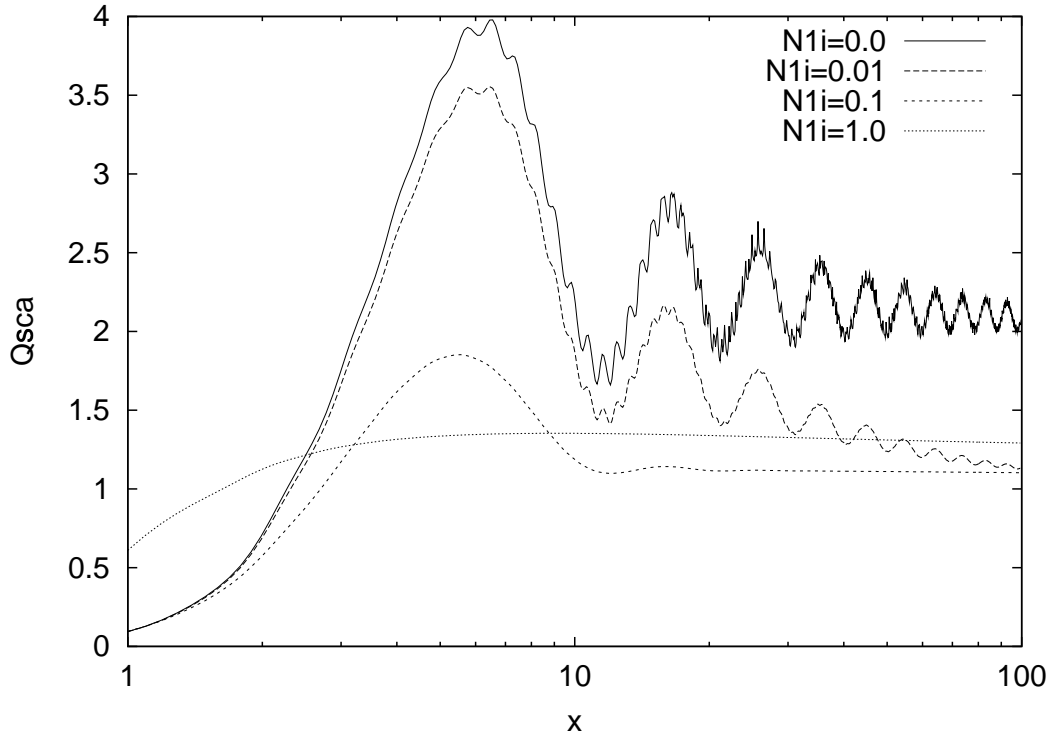


図 16: サイズパラメータによる散乱効率の変化. 屈折率実部は 1.33 (純粹の値) に固定し, 屈折率虚部は種々の値をとる.

D.11 非対称因子

非対称因子 g は位相関数 $P(\theta)$ から次のように導かれる.

$$g = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos\theta P(\theta) \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\mu) \mu d\mu \quad (211)$$

また位相関数は微分散乱断面積を散乱断面積で規格化したものに全立体角を乗じたもの.

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{4\pi}{\sigma_{\text{sca}}} \frac{d\sigma_{\text{sca}}}{d\Omega} \\ &= \frac{2\pi}{k^2 \sigma_{\text{sca}}} [S_1(\theta) S_1(\theta)^* + S_2(\theta) S_2(\theta)^*] \end{aligned} \quad (212)$$

これにより非対称因子は, (散乱断面積の代わりに散乱効率 $Q_s = \pi a^2 \sigma_s$ を使うと)

$$g = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2\pi}{k^2 \pi a^2 Q_{\text{sca}}} (|S_1|^2 + |S_2|^2) \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{x^2 Q_{\text{sca}}} \int_0^\pi (|S_1|^2 + |S_2|^2) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (213)$$

ここで S の項だけ考える.

$$\begin{aligned} |S_1|^2 + |S_2|^2 &= \sum_n \sum_m \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2m+1}{m(m+1)} \\ &\quad \left[(a_n a_m^* + b_n b_m^*) \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \frac{P_m^1}{\sin \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + (a_n b_m^* + a_m^* b_n) \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{P_m^1}{\sin \theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (214)$$

角度依存関数を使ってルジャンドル陪関数を含んだ項を考える.

$$\begin{aligned} T_{nm}^{(1)} &= \int_0^\pi \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{P_m^1}{\sin \theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} \right) \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-1}^1 - \left(\frac{dP_n^1}{d\mu} P_m^1 + P_n^1 \frac{dP_m^1}{d\mu} \right) \mu d\mu \\ &= \int_{-1}^1 - \frac{d(P_n^1 P_m^1)}{d\mu} \mu d\mu \\ &= [-P_n^1 P_m^1 \mu]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P_n^1 P_m^1 d\mu \\ &= \int_{-1}^1 P_n^1 P_m^1 d\mu \\ &= \delta_{nm} \frac{2n(n+1)}{2n+1} \end{aligned} \quad (215)$$

次に

$$T_{nm}^{(2)} = \int_0^\pi \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \frac{P_m^1}{\sin \theta} \right) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (216)$$

$$= \int_{-1}^1 (\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m) \mu d\mu. \quad (217)$$

角度依存関数の性質から $m+n$ が偶数のとき $\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m$ は偶関数になるので, $(\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m) \mu$ は奇関数. よって $T_{nm}^{(2)}$ はゼロになる. つまり $m = n \pm p$ ($p = 1, 3, \dots$) でなければならぬ. τ, π の漸化式から

$$\mu \tau_n = \frac{\pi_n}{n(n+1)} + \frac{n^2 \tau_{n+1}}{(n+1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)} \tau_{n-1} \quad (218)$$

$$\mu \pi_n = \frac{\tau_n}{n(n+1)} + \frac{n^2 \pi_{n+1}}{(n+1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)} \pi_{n-1} \quad (219)$$

が導かれ

$$T_{nm}^{(2)} = \begin{cases} \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} & \text{if } m = n + 1 \\ \frac{2n(n+1)^2(n-1)^2}{(2n+1)(2n-1)} & \text{if } m = n - 1 \\ 0 & \text{if } m \neq n \pm 1 \end{cases} \quad (220)$$

以上のことから非対称因子は

$$g = \frac{1}{Q_{\text{sca}}} \frac{4}{x^2} \left[\sum_n \frac{n(n+2)}{n+1} \text{Re}\{a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*\} + \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \text{Re}\{a_n b_n^*\} \right] \quad (221)$$

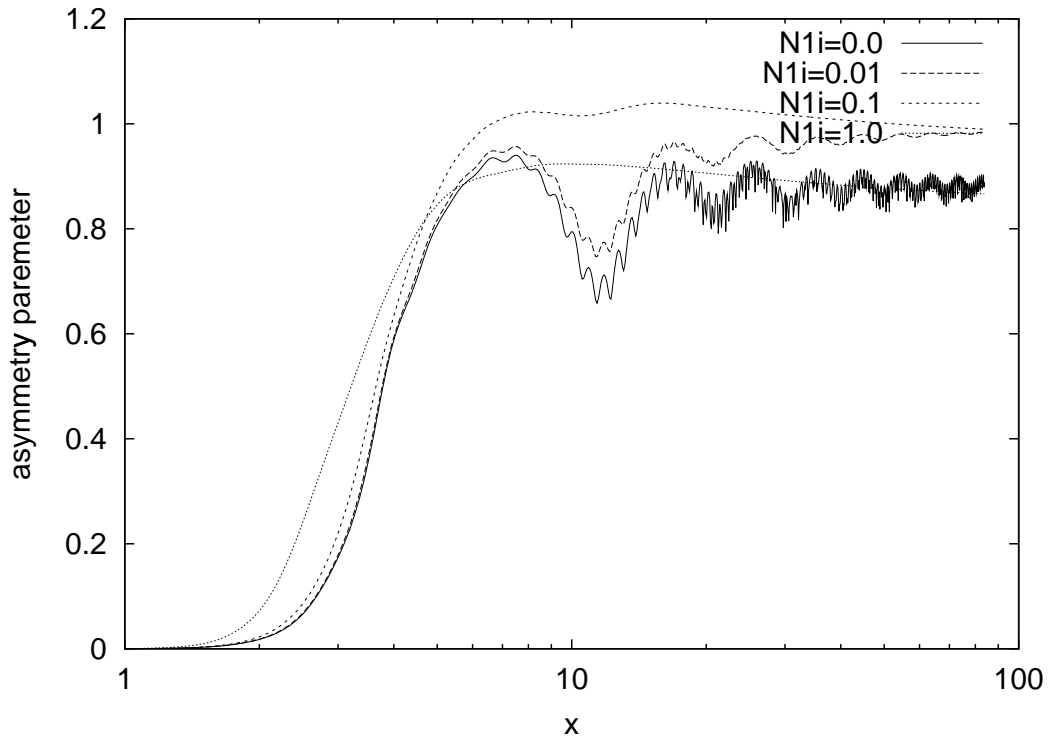


図 17: サイズパラメータによる非対称因子の変化. 屈折率実部は 1.33 (純粹の値) に固定し, 屈折率虚部は種々の値をとる.

図 17 をみると, 吸収があまり大きくない場合は半径と波長が同程度 (サイズパラメータ 6) までは単調に増加し, その後減衰振動する. 吸収が無い場合は, 0.86 に漸近している.

謝辞

本論文作成において御協力, 御指導下さった倉本圭助教授, 渡部重十教授, 林祥介教授, 小高正嗣助手, 横畠徳太さん, 他に感謝致します. ならびに私に素晴らしい大学院生活を提供して下さいましたすべての方々に感謝致します.

参考文献

- Bohren C. F. and Huffman D. R., 1983, *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, Inc.
- Forget F., 1998, Improved optical properties of the martian atmospheric dust for radiative transfer calculations in the infrared, *Geophys. res. lett.*, Vol. 25, No. 7, pp. 1105–1108.
- Gierasch P. J. and Goody R. M., 1972, The effect of dust on the temperature of the martian atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 29, pp. 400–402.
- Haberle R. M., 1998, Early mars climate models, *J. Geophys. Res.*, Vol. 103, No. E12, pp. 28467–28479.
- Joseph J. H. and Wiscombe W. J., 1976, The delta-eddington approximation for radiative flux transfer, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 33, pp. 2452–2459.
- Kasting J. F., 1991, CO₂ condensation and the climate of early mars, *Icarus*, Vol. 94, pp. 1–13.
- Liou K. N., 1974, Analytic two-stream and four-stream solutions for radiative transfer, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 31, pp. 1473–1475.
- Liou K. N., 1980, *An introduction to atmospheric radiation*. Academic press, Inc.
- NASA . Nanedi vallis: Sustained water flow? - high resolution image. NASA Home Page, 1998. <http://mars.jpl.nasa.gov/gallery/waterfeatures/PIA01170.html>.
- Ockert-Bell M. E., Bell III J. F., Pollack J. B., McKay C. P., and Forget F., 1997, Absorption and scattering properties of the martian dust in the solar wavelengths, *J. Geophys. Res.*, Vol. 102, No. E4, pp. 9039–9050.
- Pierrehumbert R. T. and Erlick C., 1998, On the scattering greenhouse effect of CO₂ ice clouds, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 55, pp. 1897–1903.

Pollack J. B., Colburn D. S., Flasar F. M., Kahn R., Carlston C. E., and Pidek D., 1979, Properties and effects of dust particles suspended in the martian atmosphere, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, No. B6, pp. 2929–2945.

Pollack J. B., Kasting J. F., Richardson S. M., and Poliakoff K., 1987, The case for a wet, warm climate on early mars, *Icarus*, Vol. 71, pp. 203–224.

Toon O. B., Mckay C. P., Ackerman T. P., and Santhanam K., 1989, Rapid calculation of radiative heating rates and photodissociation rates in inhomogeneous multiple scattering atmospheres, *J. Geophys. Res.*, Vol. 94, No. D13, pp. 16287–16301.

Warren S. G., 1986, Optical constants of carbon dioxide ice, *Applied optics*, Vol. 25, pp. 2650–2674.