

# 修士論文

## 球面浅水モデルを用いた木星型惑星の 風速分布に関する数値実験

北海道大学 理学院 宇宙理学専攻  
宇宙惑星グループ GFD 研究室 修士 2 年

学籍番号 20143077

川原 健史

平成 28 年 2 月 26 日

# 要旨

木星型惑星表層の風の場合は表面の東西縞状パターンに対応して風向が東西方向に交互に入れ替わる帯状構造を成している。その分布は、赤道周辺で強い西風であり、高緯度ほど風速の振幅が弱くなっている。このような風速分布の成因を解明するため、Scott and Polvani (2008) は回転球面浅水モデルを用いた強制乱流問題を数値的に解き、ニュートン冷却が主な消散過程として働く場合において木星型惑星と同じような赤道西風ジェットと高緯度の帯状風速分布が生成されることを示した。また、Saito and Ishioka (2015) は、回転球面上の浅水系の固有モードの一つであるロスビー波モードの歪みにより運動量が赤道に輸送され赤道西風ジェットが形成されることを示した。しかしながら、変形半径やニュートン冷却といった惑星大気のパラメータに対する風速分布の依存性については調べられていない。

そこで本論文では、回転球面浅水系での強制乱流問題により生成される帯状東西風の風速分布の惑星大気パラメータへの依存性を調べた。変形半径  $L_D$  とニュートン冷却の時定数パラメータ  $\tau_{rad}$  をそれぞれ変化させて統計的平衡状態に達するまで時間積分を行なった。その結果、風速分布は  $\tau_{rad}L_D^2$  の値によってほぼ決定され、赤道西風ジェットの幅、振幅、中高緯度の帯の幅がそれぞれ  $\tau_{rad}L_D^2$  の 0.25 乗、0.22 乗、0.25 乗に比例することを見いだした。さらに、赤道から高緯度に伝搬するロスビー波の西向き運動量輸送により赤道西風ジェットが形成されるという仮説に基づいて赤道西風ジェットの幅を見積もったところ、 $\tau_{rad}L_D^2$  の 0.25 乗に比例することを説明できた。

以上の結果を踏まえて、実際の木星型惑星である木星・土星の風速分布を吟味したところ、木星や土星の風速分布を表現できるパラメータが存在することが確かめられた。このことは、木星型惑星表層の風速分布の形成を、回転球面上の浅水系における強制乱流の力学的性質により説明できる可能性があることを示唆する。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	木星型惑星の風速分布	1
1.2	木星の帯状構造に関する先行研究	1
1.2.1	例 1: Scott and Polvani (2008) の実験	5
1.2.2	例 2: Saito and Ishioka (2015) の実験	10
1.3	本研究の目的	13
<b>2</b>	<b>基礎方程式と実験設定</b>	<b>14</b>
2.1	本実験において考える系	15
2.2	支配方程式	15
2.3	離散化	16
2.4	時間積分	17
2.5	計算設定	17
2.5.1	共通設定	18
2.5.2	実験設定	18
<b>3</b>	<b>実験結果</b>	<b>20</b>
3.1	実験 1: 長時間積分による平衡状態の確認実験	20
3.2	実験 2: パラメータ依存性実験 1 - $L_D$ 依存性-	20
3.3	実験 2: パラメータ依存性実験 2 - $\tau_{rad}L_D^2$ 依存性-	24

4	考察	29
4.1	ポテンシャル渦度	29
4.2	赤道西風ジェットの幅	30
4.3	実際の惑星との対応	31
5	まとめ及び今後の展望	33
A	支配方程式の導出	37
A.1	球面上の浅水方程式	37
A.2	渦度・発散方程式	39
A.2.1	渦度方程式	39
A.3	発散方程式の導出	40
B	地衡流調節問題	42
B.1	ポテンシャル渦度の保存	42
B.2	地衡流調節	44
C	ポテンシャル渦度とロスビー波の伝搬スケール	47
C.1	ポテンシャル渦度方程式の導出	47
C.2	ロスビー波の減衰する長さスケール	50
D	実験図集	53
D.1	$\tau_{rad} L_D^2 = 1$	54

D.1.1	$L_D = 1$	54
D.1.2	$L_D = 0.5$	55
D.1.3	$L_D = 0.1$	56
D.1.4	$L_D = 0.025$	57
D.2	$\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$	58
D.2.1	$L_D = 1$	58
D.2.2	$L_D = 0.5$	59
D.2.3	$L_D = 0.1$	60
D.2.4	$L_D = 0.025$	61
D.3	$\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$	62
D.3.1	$L_D = 1$	62
D.3.2	$L_D = 0.5$	63
D.3.3	$L_D = 0.1$	64
D.3.4	$L_D = 0.025$	65
D.4	$\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$	66
D.4.1	$L_D = 1$	66
D.4.2	$L_D = 0.5$	67
D.4.3	$L_D = 0.1$	68
D.4.4	$L_D = 0.025$	69

## 目 次

- 1 観測によって求められた木星 (左) 及び土星 (右) の System III (磁気圏の回転) 及び System IIIw (準地衡ポテンシャル渦度の回転) に対する風速分布 (Gastine et al., 2014). 木星の風速は Cassini で観測されたデータをクラウドトラッキングを用いて解析したもの, 土星の風速は惑星波の形状の解析によって求められたものである. . . . . 2
- 2 地球型惑星である地球 (左) と木星型惑星である木星 (右) の内部構造の違いを示す概念図. なお, 概念図であるためそれぞれの層の厚さの比は正しくない. 地球型惑星においては固体の地殻の外側を覆うように非常に薄い大気層が存在する構造になっているが, 木星型惑星には地殻が存在せず, 深部にある金属水素層 (木星の主成分である水素が重力で圧縮され電離している層) まで連続的に大気層が続いている. . . . . 3
- 3 Busse (1983) において述べられた木星の帯状流の形成に関わる対流の概念図. 自転軸と平行に伸びるテイラー柱が傾くことで運動量の輸送が起こり, 帯状流が形成される. . . . . 4
- 4 深部の対流と独立した上部大気層における対流の概念図. 青矢印は流体の流れ, 赤矢印は熱の動きを表す. 深部の対流からの熱強制は受けるものの, 深部の対流構造とは独立した流れが上部対流層内で起こり, これが帯状流を形成する. . . . . 5
- 5 Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $t = 10000$ (10000 惑星日) における東西平均東西風速分布.  $\mu$  は  $\sin \phi$  ( $\phi$  は緯度を表す) であり, また時間及び距離は惑星日及び惑星半径で規格化されている.  $L_D$  の値によらず, 赤道域に強い西風が形成されているのが分かる. なお, 逆行している破線は, Scott and Polvani (2008) 以前の先行研究と同様にニュートン冷却ではなく線形摩擦をエネルギーの消散過程として組み込んで実験したもの. . . . . 7
- 6 Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $L_D = 0.1$  での東西平均東西風速分布の時間発展を示した図. 初期状態では無風だった場に帯状流が徐々に形成され, 特に赤道ジェットは積分時間の最後まで成長し続けている. . . . . 8

- 7 Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $L_D = 0.1$  での時間平均したポテンシャル渦度フラックス及び東西風速. 実践がポテンシャル渦度フラックス, 点線が東西風速 ( $\times 4 \times 10^{-4}$ ) を示している. ポテンシャル渦度フラックスの正負と西風の正負が一致しており, またポテンシャル渦度の振幅は緯度によってあまり変わらない. . . . . 9
- 8 Saito and Ishioka (2015) において行われた実験による  $t = 10000$  における東西平均東西風速 (上段), 及び赤道における東西平均東西風速の時間発展 (下段). 時間及び距離は惑星日と惑星半径で規格化されている. 赤線が赤道西風ジェットとなった場合, 青線がそれ以外を示している. E6 から E8 までの全ての場合において 8 割以上の確率で赤道西風ジェットが形成されている. . . . . 11
- 9 Saito and Ishioka (2015) において行われた実験による  $t = 0 - 10000$  での赤道における運動エネルギーの総和の時間発展 (300 例のアンサンブル平均) と理論値の比較. 線の色はエネルギー注入率の違いを表している (各実験での注入率の値は本文参照). エネルギーは  $\epsilon_0$  で規格化されている. E6 よりも注入されたエネルギーが弱い場合, 理論値と実験値がよく一致している. . . . . 12
- 10 上段:  $t = 100000$  時点での球面投影した東西風速分布のスナップショット (左) 及び  $t = 100000$  と  $t = 10000$  における東西平均東西風速のスナップショット (右). 下段:  $t = [0, 10000]$  における東西平均東西風速 (左) 及び大気的全エネルギー (右) の時間発展. . . . . 21
- 11  $t = [10000, 10010]$  で時間平均した東西平均東西風を  $\tau_{rad} L_D^2$  ごとにまとめたもの. 各線の色は  $L_D$  の値を示しており, それぞれ黒は 0.025, 赤は 0.1, 緑は 0.5, 紫は 1 を示している. また, 各図の右肩には  $\tau_{rad} L_D^2$  の値を示している.  $\tau_{rad} L_D^2 = 1, L_D = 0.1$  の計算においては, 赤道における風速は  $\bar{u} = -0.135$  と東風になっているが, 見やすさを重視してここでは軸を正方向に広く取っており, ピークの位置は図中に示されていない. . . . . 22

- 12  $t = 10000$  における各実験での全運動エネルギーに対する全球での発散の運動エネルギーの比. 縦軸は発散の運動エネルギーの全運動エネルギーに対する比, 横軸は変形半径  $L_D$  の値を示している. また, 赤線は前述のとおり  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  を除いた全データ点に対して最小二乗法で  $A(\tau_{rad}L_D^2)^B$  ( $A, B$  はフリーパラメータ) として関数フィッティングを行って求められた関数が描く線を示している. . . . . 23
- 13  $t = [10000, 10010]$  で時間平均した東西平均東西風を  $L_D$  ごとにまとめたもの. 各図の右肩には  $L_D$  の値を示している.  $\tau_{rad}L_D^2 = 1, L_D = 0.1$  の計算においては, 赤道における風速は  $\bar{u} = -0.135$  と東風になっているが, 見やすさを重視してここでは軸を正方向に広く取っており, ピークの位置は図中に示されていない. . . . . 25
- 14  $t = [10000, 10010]$  における各実験での赤道西風ジェットの幅 (左上), 中高緯度域の帯状構造の幅 (右上), 赤道西風ジェットの振幅の図. また, 赤線は前述のとおり  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  を除いた全データ点に対して最小二乗法で  $A(\tau_{rad}L_D^2)^B$  ( $A, B$  はフリーパラメータ) として関数フィッティングを行って求められた関数が描く線を示している. . . . . 26
- 15  $L_D^2 = 0.025$  となる 4 通りの実験における  $t = 10000$  での渦度分布の球面投影. 図の右肩には  $\tau_{rad}L_D^2$  の値を示している. コントアのスケールは中緯度に合わせてある. . . . . 27
- 16  $L_D^2 = 0.025$  となる 4 通りの実験における  $t = [10000, 10010]$  での時間平均したポテンシャル渦度分布の東西平均. 図の右下には  $\tau_{rad}L_D^2$  の値を示している. . . . . 28
- 17 観測によって求められた木星 (左) 及び土星 (右) の風速分布 (図 1 再掲). 図中には赤矢印で赤道ジェットの幅, 青矢印で赤道ジェットの振幅を示す. . . . . 31
- 18  $\tau_{rad}L_D^2 = 1, L_D = 1$  の場合の計算結果. 左上: 東西風速, 右上: 東西平均東西風速, 左中: 渦度, 右中: 東西平均ポテンシャル渦度, 左下: 全エネルギーの時間発展, 右下: 赤道における南北風速. . . . . 54
- 19 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1, L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/2$  倍になっている. . . . . 55

- 20 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/50$  倍になっている. . . . . 56
- 21 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 200 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/1000$  倍になっている. また, 右上の東西平均東西風速の図の軸と左上の東西風速の図のコンターは, コンター間隔を変えずに西風の風速の最大値が図 18 の東風の風速の最大値と等しくなるように負の方向にずらしている. . . . . 57
- 22 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 1$  の場合. . . . . 58
- 23 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/5$  倍になっている. . . . . 59
- 24 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/100$  倍になっている. . . . . 60
- 25 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/1000$  倍になっている. . . . . 61
- 26 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 1$  の場合. 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは図 18 の  $1/2$  倍になっている. . . . . 62
- 27 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/10$  倍になっている. . . . . 63
- 28 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/200$  倍になっている. . . . . 64
- 29 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/2000$  倍になっている. . . . . 65

- 30 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 1$  の場合. 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは図 18 の  $1/5$  倍になっている. . . . . 66
- 31 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/20$  倍になっている. . . . . 67
- 32 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/500$  倍になっている. . . . . 68
- 33 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは  $1/10000$  倍になっている. . . . . 69

# 1 序論

## 1.1 木星型惑星の風速分布

木星型惑星の表層部の大気には、色の違いとして観測される縞状のパターンと対応する、帯状の風速分布が存在していることが知られている。図 1 には、Gastine et al. (2014) において述べられた、クラウドトラッキング<sup>1)</sup> 及び惑星波の形状の解析によって求められた、木星及び土星の緯度毎の風速プロファイルを載せる。この帯状構造の主な特徴としては、(i) 西風と東風が交互に現れる、(ii) 赤道付近において中高緯度に比べて強い西風（赤道ジェット）が存在、(iii) 高緯度方向に振幅が減衰していく、の 3 つが挙げられる。これらの風速分布は少なくとも数百年単位で安定した構造であり、木星型惑星等の厚い大気を持つ巨大惑星において一般的に見られる構造であると考えられている。この帯状構造の成因についてはいくつかの説が考えられている。しかし、図 2 に示したように、木星型惑星の内部構造は地球型惑星の内部構造とは大きく異なっており、地球の大気に関する研究によって得た知見を地球型惑星ほど活かすことができない。また、太陽系内には木星型惑星は木星と土星の 2 つの惑星しか存在せず、データがあまり多く得られない。よって、未だに決定的といえる説は存在せず、成因ははっきりとは分かっていない。これを解き明かすことは地球流体力学的に非常に興味深い課題であり、これを知るためには、木星型惑星の対流構造を仮定し、惑星の自転の効果やエネルギーの注入・消散過程等、異なる惑星パラメータにおいて風速分布はどのように変わるか、ということ調べる必要がある。

## 1.2 木星の帯状構造に関する先行研究

木星大気の風速分布の成因に関する研究は、大きく 2 つのタイプに分けられる。1 つは惑星内部の対流層と観測可能な雲が存在する大気上層部の大気の運動が直接つながっている、とする説である。対流の概念図を図 3 に示す。この説による対流の形成の理屈は、自転軸と並行に成長する対流カラム（テイラー柱）が、渦の外側のほうがカラムの長さが短いことによって傾き、この傾きによって運動量の輸送が起こって帯状の風速分布が形成される、というものである。これは、Busse (1976)、Busse (1983) 等で述べられている。しかしながら、このモデルにおいては強い赤道ジェットは形成されるものの、中高緯度域の帯が十分に発達しないという問題点があった。

<sup>1)</sup>異なる時間に撮影した 2 枚の惑星表面の写真を比較し、雲の特徴が移動した距離から風速を見積もる方法。

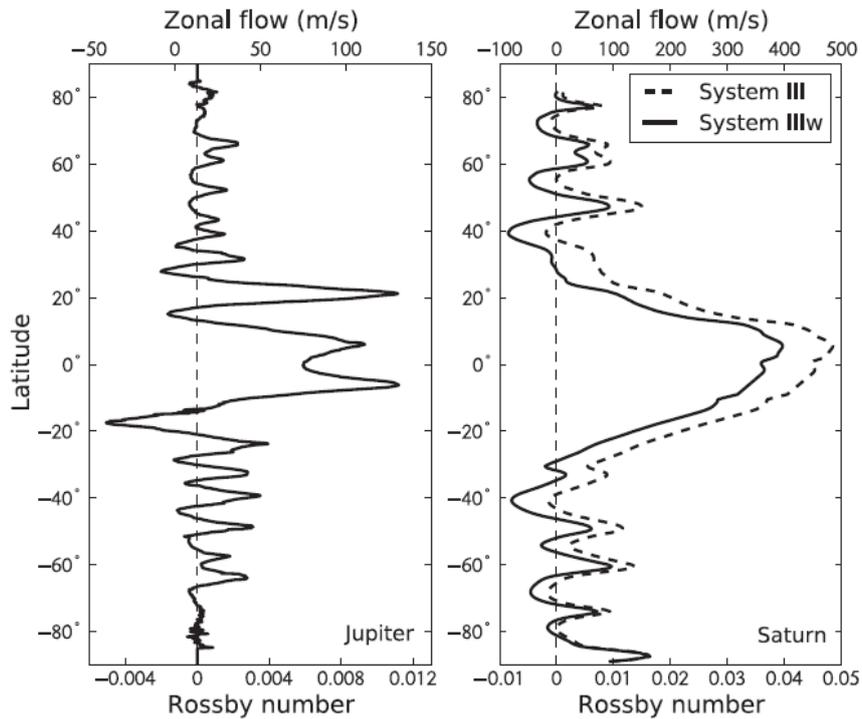


図 1: 観測によって求められた木星 (左) 及び土星 (右) の System III (磁気圏の回転) 及び System IIIw (準地衡ポテンシャル渦度の回転) に対する風速分布 (Gastine et al., 2014). 木星の風速は Cassini で観測されたデータをクラウドトラッキングを用いて解析したもの, 土星の風速は惑星波の形状の解析によって求められたものである.

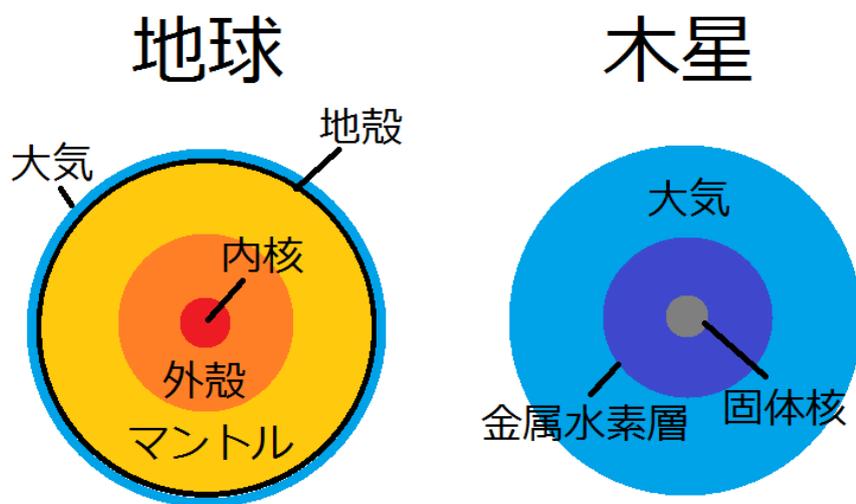


図 2: 地球型惑星である地球 (左) と木星型惑星である木星 (右) の内部構造の違いを示す概念図. なお, 概念図であるためそれぞれの層の厚さの比は正しくない. 地球型惑星においては固体の地殻の外側を覆うように非常に薄い大気の層が存在する構造になっているが, 木星型惑星には地殻が存在せず, 深部にある金属水素層 (木星の主成分である水素が重力で圧縮され電離している層) まで連続的に大気層が続いている.

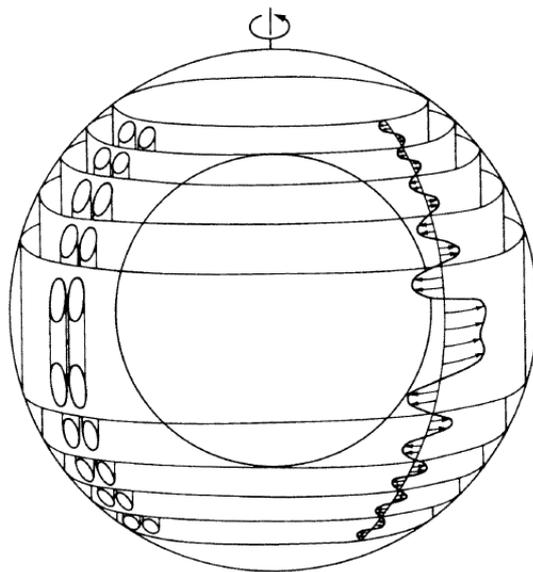


図 3: Busse (1983) において述べられた木星の帯状流の形成に関わる対流の概念図. 自転軸と平行に伸びるテイラー柱が傾くことで運動量の輸送が起こり, 帯状流が形成される.

もう 1 つは惑星深部の対流と大気上層部の対流は独立しており、深部からの強制はあるものの深部の対流とは別のメカニズムで風構造が形作られているというものである。対流の概念図を図 4 に示す。この説は、古くは Williams (1978) で述べられており、この節に基づいて球面浅水モデル (後述) による数値実験が行われた。彼らの研究では前者の説とは異なり、風向が東西交互に入れ替わる帯状の構造が高緯度まで形成された。しかしながら彼らの実験では、ランダムな強制を与えた場合には帯状構造が赤道で節を持つような構造が形成されてしまい、南北対称な強制を与えて帯状構造を形成した場合においても、赤道域では西風ではなく東風になってしまい、赤道西風ジェットが形成されなかった。

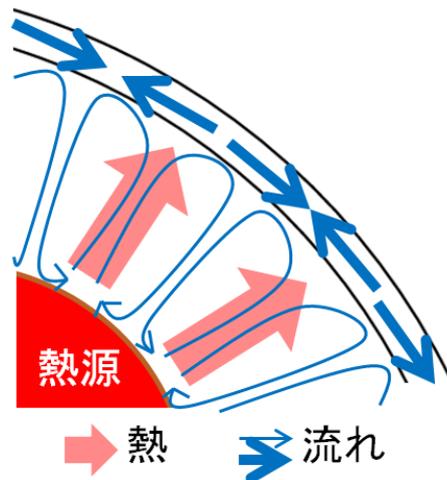


図 4: 深部の対流と独立した上部大気層における対流の概念図。青矢印は流体の流れ、赤矢印は熱の動きを表す。深部の対流からの熱強制は受けるものの、深部の対流構造とは独立した流れが上部対流層内で起こり、これが帯状流を形成する。

しかし、2008 年になって、後者の説において、強制が南北非対称であっても、南北対称な風速分布及び赤道西風ジェットが形成されるという研究成果が Scott and Polvani (2008) によって示された。彼らはこれまで運動エネルギーの主な消散過程として用いられてきた線形摩擦の代わりに、放射冷却を模したニュートン冷却を与えることで、木星型惑星の風速分布に近い帯状構造が形成される、と主張している。以下には、この Scott and Polvani (2008) 及びその論文を受けてさらなる実験を行った Saito and Ishioka (2015) の概要を示す。

### 1.2.1 例 1: Scott and Polvani (2008) の実験

浅水強制乱流モデルを用いて数値計算実験を行った Scott and Polvani (2008) では、これまで用いられてきた浅水強制乱流モデルのエネルギーの消散過程として、

これまで浅水モデルで一般的に用いられてきた線形摩擦の代わりに、木星型惑星における主なエネルギーの消散過程と考えられる放射冷却を模したニュートン冷却を組み込んだ回転球面浅水モデルで実験を行い、帯状構造がどのように形成されるかを調べた。

使用したモデルは、エネルギーの注入過程としてランダムな渦度擾乱、消散過程としてニュートン冷却を組み込んだ球面浅水モデルである。基礎方程式は回転球面上の浅水方程式である<sup>2)</sup>。強制として大気下層からの強制を想定した振幅の弱い渦度強制を、中心波数  $n_f = 42$  を中心に全波数  $n = n_f \pm 2$  の波数範囲で毎ステップ位相をランダムにずらして与えている。エネルギーの消散は、浅水層の厚さ  $h$  に対して冷却の時定数を  $\tau_{rad}$  とするニュートン冷却、つまり浅水層の厚さの擾乱  $h'$  の時間発展に対して  $-h'/\tau_{rad}$  の形で与えられている。空間方向の離散化の方法としては、T682 (1024×2048) の解像度で擬スペクトル法を用いて計算を行っている。また、計算が発散しないために、数値粘性として  $\nu \nabla^8 \zeta$  の粘性項を導入している。積分時間は  $10^4$  惑星日である。また、彼らの計算においては、同程度のロスビー数をもつ大気において変形半径  $L_D = \sqrt{gH}/2\Omega$  ( $g$  は重力定数、 $H$  は浅水層の厚さ、 $f$  はコリオリパラメータを表す) を変えた場合においても帯状構造が形成されるかを確かめるため、準地衡ポテンシャル渦度方程式から求められる風速のスケールを決めるパラメータ  $\tau_{rad} L_D^2$  を固定し、 $L_D$  をフリーパラメータとして変化させて実験を行った。論文中には述べられていないが、この  $\tau_{rad} L_D^2$  を固定するという事は、物理的には大気の単位体積あたりのエネルギーの消散率を固定することを意味している。

彼らの実験の結果を図5及び図6に示す。図5からは  $L_D/a = 1.0, 0.1, 0.025$  ( $a$  は惑星半径) の各場合において帯状構造が形成され、また強い赤道ジェットも形成されている様子が見える。また、図6においては、帯状構造が時間発展とともに形成されていく様子が見て取れる。彼らはこの3通りの実験以外にもいくつかの実験を  $L_D$  や  $\tau_{rad}$ ,  $\varepsilon_0$  を変えて行い、そのどの場合においても赤道ジェットが形成されたと述べている。また、この構造が堅牢であるかを調べるために、 $10^4$  惑星日の時間積分を行ったあとに渦度強制及びニュートン冷却を0にし、1000 惑星日単位のリスタート計算を行い、この構造が保たれることを確認している。

彼らはこの赤道ジェットの形成のメカニズムを、渦の混合によるものだと主張している。角運動量が渦の混合に伴って低緯度側に輸送され、低緯度側に大きな角運動量を持つ領域が形成される、というものである。この渦の混合が赤道の両側の領域で起こることで、赤道域に角運動量が輸送され、これによって赤道に東向きのジェットが形成される。この赤道ジェットの形成は、南北方向へのポテンシャル渦度フラックスからも見ることができる。時間平均したポテンシャル渦度フラックスを図7に示す。正のポテンシャル渦度フラックスは西風の加速を引き起こす。ここで、ポ

<sup>2)</sup>2.1 節参照。

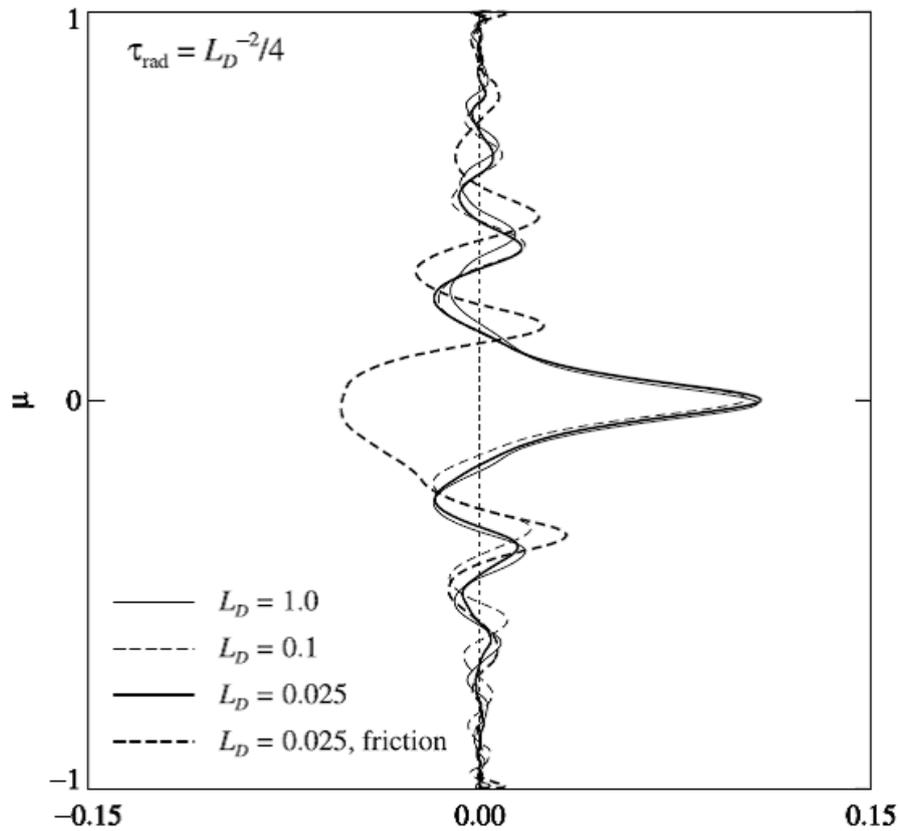


図 5: Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $t = 10000$  (10000 惑星日) における東西平均東西風速分布.  $\mu$  は  $\sin \phi$  ( $\phi$  は緯度を表す) であり, また時間及び距離は惑星日及び惑星半径で規格化されている.  $L_D$  の値によらず, 赤道域に強い西風が形成されているのが分かる. なお, 逆行している破線は, Scott and Polvani (2008) 以前の先行研究と同様にニュートン冷却ではなく線形摩擦をエネルギーの消散過程として組み込んで実験したもの.

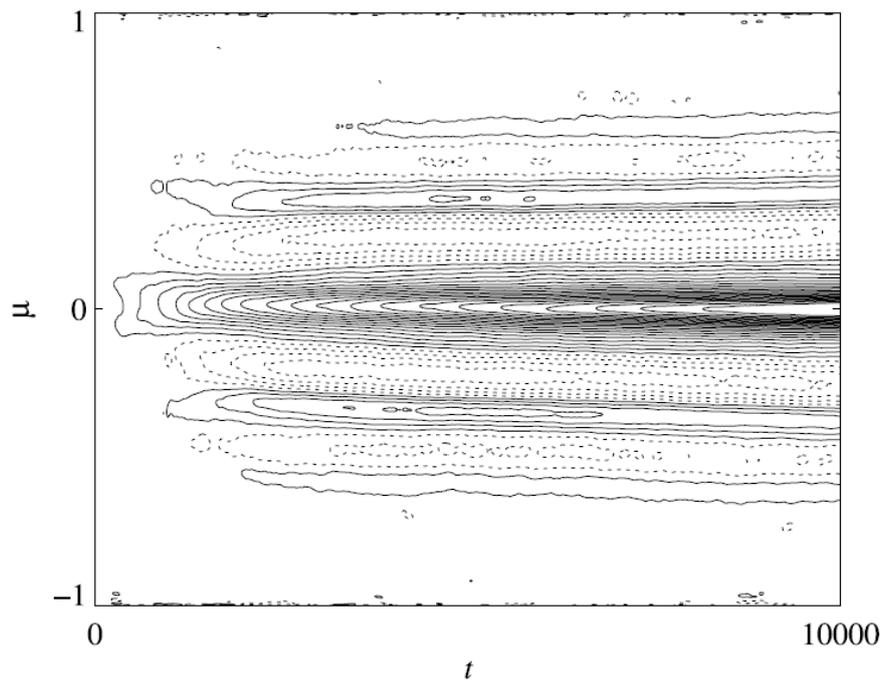


図 6: Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $L_D = 0.1$  での東西平均東西風速分布の時間発展を示した図. 初期状態では無風だった場に帯状流が徐々に形成され, 特に赤道ジェットは積分時間の最後まで成長し続けている.

テンシャル渦度の高緯度方向へのフラックスは赤道域と中高緯度域で振幅があまり変わらない。よって、西風ジェットの加速は中高緯度域と赤道域であまり変わらないはずである。しかしながら、ニュートン冷却によるエネルギーの消散は、低緯度においては高緯度よりもその影響が小さい。ニュートン冷却は浅水層の擾乱に対してエネルギーの消散が起こるが、赤道域においては自転の効果が弱く、自転の効果によって渦の成長とともに起こるこの浅水層の擾乱が小さい。よって赤道域ではこのニュートン冷却によるダンピングの影響があまり強くないため、高緯度域よりも強い赤道ジェットが形成されるのである。

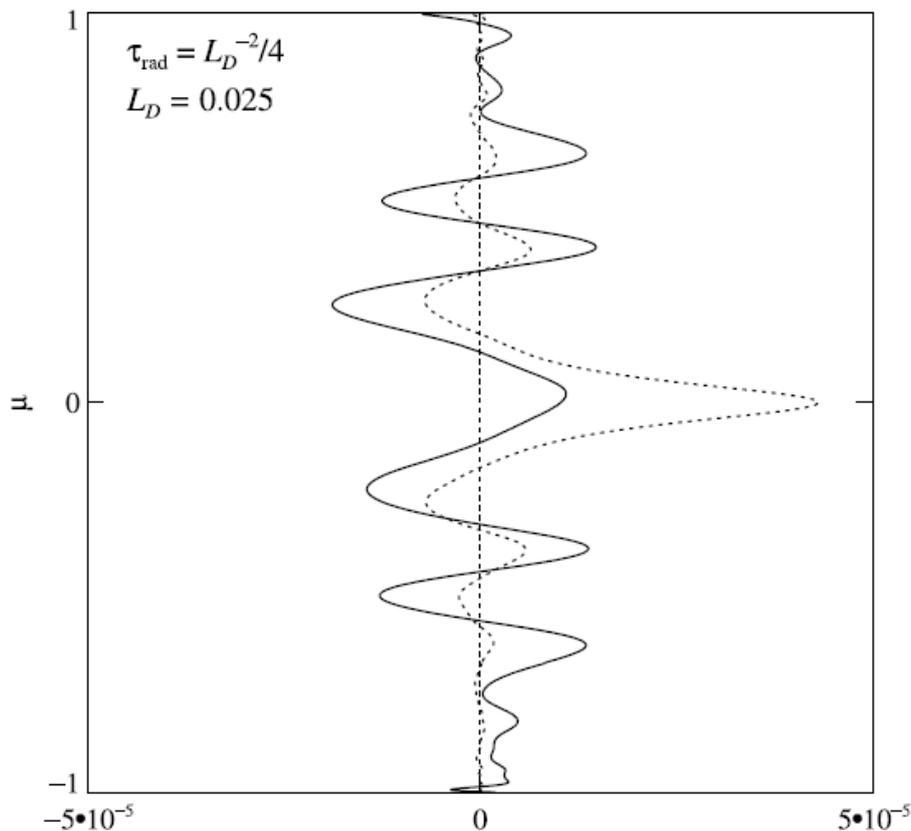


図 7: Scott and Polvani (2008) において行われた実験による  $L_D = 0.1$  での時間平均したポテンシャル渦度フラックス及び東西風速。実線がポテンシャル渦度フラックス、点線が東西風速 ( $\times 4 \times 10^{-4}$ ) を示している。ポテンシャル渦度フラックスの正負と西風の正負が一致しており、またポテンシャル渦度の振幅は緯度によってあまり変わらない。

彼らは本論文の結論として、実際の木星型惑星のエネルギーの主な消散過程であるニュートン冷却を主なエネルギーの消散過程として組み込んだ浅水モデルを用いれば、さまざまな  $L_D$  においても木星型惑星に見られるような帯状構造が再現でき、赤道に強いジェットが形成される、ということを示している。しかしながら、彼ら

の研究では  $10^4$  惑星日の時間積分では系は平衡に達しておらず、また  $L_D$  や  $\tau_{rad}$  等のパラメータを変化させた場合に、風速分布がどのように変化するのか (もしくは変化しないのか) については述べられていない。

### 1.2.2 例 2: Saito and Ishioka (2015) の実験

先に述べた Scott らの結果を受けて、Saito and Ishioka (2013) では与える強制の強さ及び乱数を様々に変化させてアンサンブル実験を行い、どの場合においても本当に帯状構造が形成されるのか、そして強制の強さによって赤道ジェットの振幅がどのように変化するのかを調べ、赤道ジェットが形成されるメカニズムは何なのかを調べた。使用したモデルは Scott and Polvani (2008) のモデルを再現し、エネルギーの消散過程として彼らと同様の形でニュートン冷却を組み込んだ強制消散を組み込んだ浅水球面波モデルを用いている。渦度に対する強制は Scott and Polvani (2008) と同様のものを用い、与えるエネルギー量だけを  $\epsilon_0 = 6.4 \times 10^{-6, -7, -8}$  の 3 通り (それぞれ E6, E7, E8 と呼ぶ) に変更している。また、 $L_D$ ,  $\tau_{rad}$  の値に関しては、 $L_D/a = 0.1$ ,  $\tau_{rad} = 0.25(L_D/a)^2$  として計算を行っている。空間方向の離散化はスペクトル法、時間積分は 4 次のルンゲクッタ法を用いている。積分時間は 10000 惑星日である。

図 8 には、E6, E7, E8 それぞれの実験における彼らのアンサンブル計算の結果を示す。赤道で東風になる場合があり、強制が強いほど赤道で東風になる割合が増えていくものの、全ての実験において 8 割以上の確率で赤道西風ジェットが形成されており、エネルギーの主な消散仮定がニュートン冷却である浅水系において赤道ジェットが一般的と言ってもおよそ差し支えない構造であることを示した。

また、彼らは 1.2.1 節内で述べたニュートン冷却の緯度依存性によって起こるロスビー波の固有モード (ハフモード) の歪み (Yamagata and Philander, 1985) を考え、ロスビー波による加速を考慮して得られた赤道ジェットの振幅の時間変化と、彼らの数値実験によって得られた実験結果を比較した。図 9 にはその比較した結果を示す。注入したエネルギーが弱い場合には、実験結果は理論値とよく一致している。これによって、ニュートン冷却を主な散逸過程とした浅水モデルにおいて赤道加速が起こることが理論的に示された。

しかしながら、彼らの研究においては、ニュートン冷却の強さや変形半径<sup>3)</sup>等の大気を持つ物理的パラメータに対する赤道ジェットや中高緯度の帯状風の幅、赤道ジェットの振幅等の依存性については述べられておらず、また赤道ジェットや中高

<sup>3)</sup>重力波が 1 惑星日で進む距離。これよりも大きなスケールの現象においては回転の効果を考えなくてはならない。

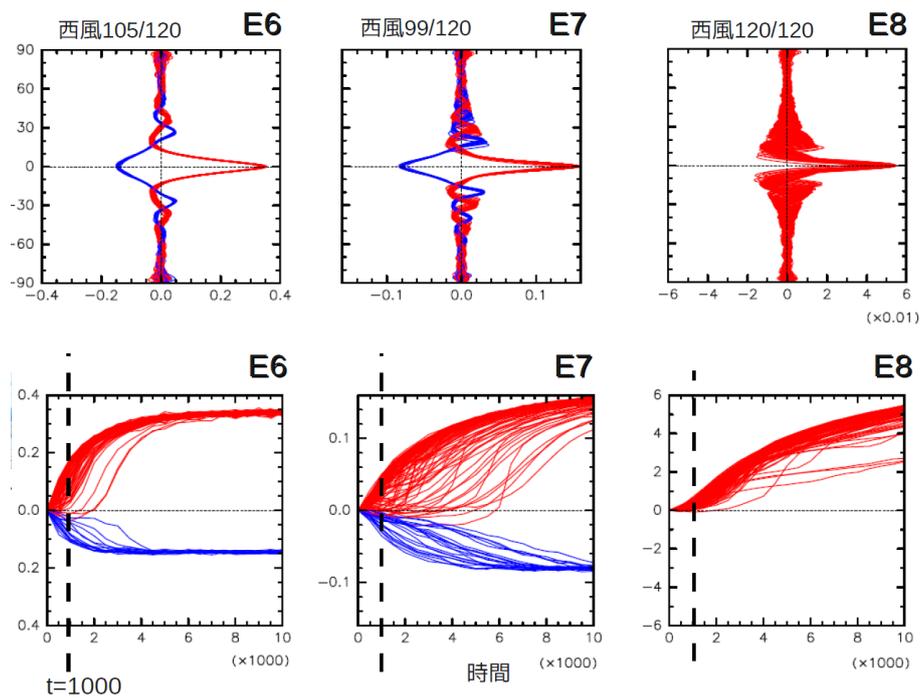


図 8: Saito and Ishioka (2015) において行われた実験による  $t = 10000$  における東西平均東西風速 (上段), 及び赤道における東西平均東西風速の時間発展 (下段). 時間及び距離は惑星日と惑星半径で規格化されている. 赤線が赤道西風ジェットとなった場合, 青線がそれ以外を示している. E6 から E8 までの全ての場合において 8 割以上の確率で赤道西風ジェットが形成されている.

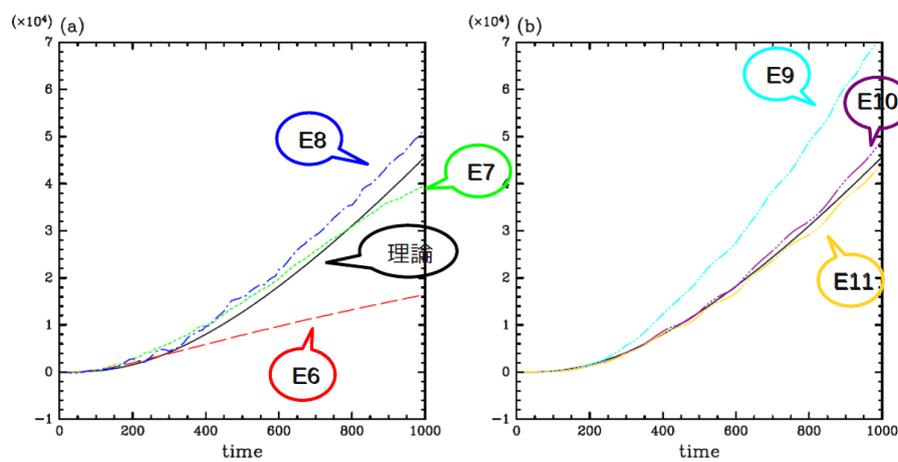


図 9: Saito and Ishioka (2015) において行われた実験による  $t = 0 - 10000$  での赤道における運動エネルギーの総和の時間発展 (300 例のアンサンブル平均) と理論値の比較. 線の色はエネルギー注入率の違いを表している (各実験での注入率の値は本文参照). エネルギーは  $\epsilon_0$  で規格化されている. E6 よりも注入されたエネルギーが弱い場合, 理論値と実験値がよく一致している.

緯度の帯状風の幅がどのようにして決まっているのかということについては考察されていなかった。また, Scott and Polvani (2008) と同様に, 彼らの計算では系がまだ平衡状態に達しておらず, 更に長時間積分を行った場合に風構造が崩れる可能性も考えられる。

### 1.3 本研究の目的

本論文においては, Scott and Polvani (2008) 及び Saito and Ishioka (2015) の実験に基づき, 放射冷却を模したニュートン冷却をエネルギーの散逸過程として組み込んだ回転球面浅水モデルを用い, より長時間の積分を行って平衡状態における風速分布を調べる。また, 特に変形半径とニュートン冷却の強さに着目し, 帯状構造及び赤道ジェットの幅や振幅等についてこれらのパラメータに対する依存性を調べ, どのような理屈でこれらの風速分布が決定しているのかを考察する。これを知ることによって, 木星型惑星の帯状の風速分布の成因について新たな示唆を与えることができる。

## 2 基礎方程式と実験設定

ここでは、本実験で考える系、数値計算に用いる数式及びその離散化・時間積分法、実験で用いた各パラメータの値を記す。使用する記号を以下にまとめる。なお、長さは惑星半径、時間は惑星日で規格化されている。

意味	記号	意味	記号
緯度 (rad)	$\phi$	コリオリパラメータ	$f$
経度 (rad)	$\lambda$	回転角速度	$\Omega$
時間	$t$	重力加速度	$g$
鉛直方向の単位ベクトル	$\mathbf{k}$	惑星半径	$a$
風ベクトル	$\mathbf{u}$	流体の密度	$\rho$
東西風速	$u$	風速に対する強制	$F_u$
東西風速の東西平均からの擾乱	$u'$	渦度に対する強制	$F_\zeta$
南北風速	$v$	発散に対する強制	$F_\delta$
相対渦度	$\zeta$	線形摩擦の時定数	$\tau_{fr}$
絶対渦度	$\zeta_a$	ニュートン冷却の時定数	$\tau_{rad}$
渦度の東西平均からの擾乱	$\zeta'$	変形半径	$L_D$
ポテンシャル渦度	$q$	切断波数	$N_T$
ポテンシャル渦度の東西平均からの擾乱	$q'$	エネルギー注入率	$\varepsilon_0$
ロスビーのポテンシャル渦度	$q_r$	強制の中心波数	$n_f$
発散	$\delta$	強制の波数幅	$\Delta n$
運動エネルギー	$E$	風速に対する超粘性	$D_u$
流線関数	$\psi$	渦度に対する超粘性	$D_\zeta$
流体層の厚さ	$h$	超拡散	$D_\delta$
流体層の平均厚さ	$H$	超粘性次数	$d_\zeta$
流体層の厚さの全球平均からの擾乱	$h'$	超拡散次数	$d_\delta$
ロスビー数	Ro	超粘性係数	$\nu_\zeta$
フルード数	Fr	超拡散係数	$\nu_\delta$

表 1: 本論文中で使用する記号一覧。これに加え、東西平均は上線を付けて表し、下付き  $z$  は水平成分を表す。なお、惑星流体分野で一般的に利用される記号の被りが発生する場合、わかりやすさを優先し一般的に利用される記号をそのまま用いているため、ここには記載しない。その代わりに、その都度該当する記号についての説明を加えている。

## 2.1 本実験において考える系

本実験においては, 現象のスケールは鉛直方向よりも水平方向の方がずっと大きく, 流れは鉛直方向に変化せず二次元流に近似できるような領域を考える. 領域の厚さを  $h$  とすると, これは平均厚さ  $H$  とその擾乱  $h'$  を用いると  $h = H + h'$  ( $h \gg h'$ ) で表される. また, 密度  $\rho$  は一様一定であり, 全球で静水圧平衡が成り立っていると仮定する. 上下境界からは流体の流入及び流出はなく, 上下境界における摩擦も無いとする. エネルギーの注入過程として系全体にランダムな渦度強制 (後述) が与えられており, 消散過程として系全体に  $h'/\tau_{rad}$  で表される放射冷却を模したニュートン冷却が働いている. また, 計算の発散を防ぐため, 小さいスケールにおいては非常に小さな摩擦 (超粘性, 超拡散) を導入している.

## 2.2 支配方程式

前節の仮定に基づくと, 系の運動方程式は以下のように求められる<sup>4)</sup>.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}_z = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - g \nabla_z h + F_u - \frac{\mathbf{u}}{\tau_{fr}} - D_u, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_z \cdot (\mathbf{u}h) = -\frac{h'}{\tau_{rad}}. \quad (2.2)$$

ここで, 超粘性項は他の項に比べ非常に小さい.

実際にモデル内で用いている式は, この式を  $\zeta$ ,  $\delta$ , 及び  $h$  の 3 つの式に変形したものであり, 以下のようなになる<sup>5)</sup>.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_z \cdot (\mathbf{u}\zeta_a) = F_\zeta - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} - D_\zeta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} - \mathbf{k} \cdot \{\nabla \times (\mathbf{u}\zeta_a)\} = F_\delta - \nabla_z^2 (E + gh) - \frac{\delta}{\tau_{fr}} - D_\delta, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_z \cdot (\mathbf{u}h) = -\frac{h'}{\tau_{rad}}. \quad (2.5)$$

<sup>4)</sup>導出については付録 A.1 球面上の浅水方程式 を参照.

<sup>5)</sup>導出については付録 A.2 渦度・発散方程式 を参照のこと.

超粘性項及び超拡散項は  $D_\zeta = \nu \nabla^{2d} \zeta$ ,  $D_\delta = \nu \nabla^{2d} \delta$  で表される。

### 2.3 離散化

本実験では、空間方向の離散化にスペクトル法を用いている。具体的には、線形項に関してはスペクトル変換した上でスペクトル空間上で時間積分を行い、非線形項に関してはそのままスペクトル変換をせず、格子点での値を用いて非線形項を評価した上で、改めてそれをスペクトル変換して足し合わせている<sup>6)</sup>。また、本節では式をわかりやすくするため、緯度方向の座標としてサイン緯度  $\mu = \sin \phi$  を用いる。

まず、 $i$  及び  $j$  をそれぞれ  $\lambda, \phi$  方向の格子点のラベルとし、任意の物理量  $A$  を格子点上の値で定義したものを  $A_{i,j}$  で表すとすると、 $A_{i,j}$  と対応するスペクトル変換  $\hat{A}_{m,n}$  の関係は、ルジャンドル陪関数  $P_n^m(\mu)$  を用いて以下のように表せる。

$$A_{i,j} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{m=-n}^n P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \hat{A}_{m,n}, \quad (2.6)$$

$$\hat{A}_{m,n} = \frac{1}{2I} \sum_{j=1}^J \sum_{j=1}^J A_{i,j} e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) w_j. \quad (2.7)$$

ここで、 $w_j$  は緯度によって変わる重み付け関数である。これに従って支配方程式のスペクトル変換を行うと、それぞれの式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{\zeta}_{m,n}}{\partial t} + [\nabla_z \cdot \widehat{(\mathbf{u}\zeta_a)}]_{m,n} = \hat{F}_{\zeta m,n} - \frac{\hat{\zeta}_{m,n}}{\tau_{fr}} - \hat{D}_{\zeta m,n}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \hat{\delta}_{m,n}}{\partial t} - [\mathbf{k} \cdot \{\nabla \times \widehat{(\mathbf{u}\zeta_a)}\}]_{m,n} = \hat{F}_{\delta m,n} - [\nabla_z^2 (\widehat{E + gh})]_{m,n} - \frac{\hat{\delta}_{m,n}}{\tau_{fr}} - \hat{D}_{\delta m,n}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_{m,n}}{\partial t} + [\nabla_z \cdot \widehat{(\mathbf{u}h)}]_{m,n} = -\frac{\hat{h}'_{m,n}}{\tau_{rad}}. \quad (2.10)$$

<sup>6)</sup>これは計算コストの削減のためである。非線形項をそのままスペクトル変換すると、全ての波数に対して毎ステップ非線形項を計算しなくてはならなくなり、非常に計算コストが高くなってしまふ。これを実空間で計算して値を評価してからスペクトル変換することで、非線形項の計算コストを減らすことができる。この非線形項を格子点上で評価した上でスペクトル変換する方法のことを変換法と呼ぶ。

また、強制項は Scott and Polvani (2008) 及び Saito and Ishioka (2015) の実験に準じて、 $n = [n_f - \delta n/2, n_f + \delta n/2]$  の範囲に各波数ごとに等しいエネルギーを持ち、かつ位相がランダムな渦度に対する強制を与えるため、ルジャンドル陪関数  $P_n^m(\mu)$  を用いて以下のように設定する。

$$F_\zeta(\lambda, \mu, t) = 2\text{Re} \left[ \sum_{n=n_f-\delta n/2}^{n_f+\delta n/2} \sum_{m=1}^n \hat{f}_{n,m}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \right], \quad (2.11)$$

$$\hat{f}_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{2n(n+1)\epsilon_0}{(2n+1)\delta n}} \xi_{m,n}(t), \quad \xi_{m,n}(t) = \frac{e^{i\theta_{m,n}(t)}}{\sqrt{\delta t}}. \quad (2.12)$$

ここで、位相  $\theta_{m,n}(t)$  は区間  $[0, 2\pi]$  での一様乱数であり、各時間ステップにおいて更新される。

## 2.4 時間積分

本実験における時間積分法は、強制項にはオイラー法、散逸項にはクランク・ニコルソン法、それ以外の項には 4 次のルンゲクッタ法を用いている。計算の順番は、まず強制項をオイラー法によって積分し、次に強制項及び散逸項以外の項に関して 4 次のルンゲクッタ法で積分、そして最後にクランク・ニコルソン法で積分を行う。各時間積分法についての詳細は省略する。

## 2.5 計算設定

本節では本論文において用いた各パラメータの値を示す。本論文では大きく分けて 2 種類の実験を行っている。1 つは Scott and Polvani (2008) の設定に従いより長時間の時間積分を行って平衡状態を確かめる実験、もう 1 つは惑星大気のパラメータを変化させて風速分布への依存性を調べる実験である。変化させるパラメータは、Scott and Polvani (2008) において用いられた  $L_D$  及び  $\tau_{rad} L_D^2$  の二つである。この二つのパラメータは 4 章にて述べるポテンシャル渦度方程式内に出てくるパラメータであり、この二つのパラメータが系の風速分布を支配すると考えられる。

2.2.1 節では双方の実験に共通する部分について記述し、2.2.2 節では実験ごとで異なる積分時間と変形半径及びニュートン冷却のパラメータの値について記述する。

### 2.5.1 共通設定

空間解像度は計算時間を考えて Scott and Polvani (2008) よりも粗く Saito and Ishioka (2015) と同じ T170(256×512) に設定した。また、前述の時間と空間の規格化により惑星半径は 1, 回転角速度は  $\Omega = 2\pi$  である。重力加速度は木星のものを使用し  $g = 4.21 \times 10^2$  である。浅水層の平均厚さ  $H$  は各実験で異なる。

強制は渦度のみに対して与えるため,  $F_\delta = 0$  である。  $F_\zeta$  に関しては, 2.2 節において述べられた表式に従い,  $\epsilon_0 = 5.0 \times 10^{-7}$ ,  $n_f = 42$  を中心に全波数  $n = [n_f - \delta n/2, n_f + \delta n/2]$  の範囲に位相及び強度がランダムな強制を与える。これは Scott and Polvani (2008) の設定に従っている。

散逸項に関しては, 摩擦の効果は無視するため摩擦の時定数は  $\tau_{fr} = \infty$ , ニュートン冷却の時定数は各実験で異なる。超粘性の次数は  $d_\zeta = d_\delta = 4$ , 超粘性係数は  $\nu_\zeta = \nu_\delta = 10/[N_T(N_T + 1)]^4$  ( $N_T$  は切断波数で  $N_T = 170$ ) である。共通設定をまとめたものを表 2 に示す。

実験パラメーター	設定値
切断波数 $N_T$	170
球半径 $a$	1
回転角速度 $\Omega$	$2\pi$
重力加速度 $g$	$4.21 \times 10^2$
エネルギー注入率 $\epsilon_0$	$5.0 \times 10^7$
強制の中心波数 $n_f$	42
強制の波数幅 $\Delta n$	4
線形摩擦の時定数 $\tau_{fr}$	$\infty$
超粘性次数 $d_\zeta$	4 ( $\nabla^8$ )
超拡散次数 $d_\delta$	4 ( $\nabla^8$ )
超粘性係数 $\nu_\zeta$	$10/[N_T(N_T + 1)]^4$
超拡散係数 $\nu_\delta$	$10/[N_T(N_T + 1)]^4$

表 2: 共通設定一覧。

### 2.5.2 実験設定

本計算において依存性を考えるパラメータは, 変形半径  $L_D = \sqrt{gH}/2\Omega$ , 及びニュートン冷却のパラメータ  $\tau_{rad}L_D^2$  である。これらのパラメータは Scott and Polvani (2008) に従ったものである。彼らは  $L_D$  依存性を調べる際に  $Ro$  を一定にするため,

ニュートン冷却のパラメータを  $\tau_{rad}$  に  $L_D^2$  をかけた  $\tau_{rad}L_D^2$  で設定している。  $\tau_{rad}L_D^2$  は  $H$  に比例しており、単位体積あたりから除かれるエネルギー量に相当する。実際には  $L_D$  は  $H$  を、  $\tau_{rad}L_D^2$  は  $L_D$  の値を踏まえて  $\tau_{rad}$  をそれぞれ変えることで設定している。

1 つ目の平衡状態を確認する実験では、  $L_D = 0.1$ ,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$  で固定し、積分時間を 100000 惑星日として、 Scott and Polvani (2008) 及び Saito and Ishioka (2015) の 10 倍の長さの積分を行い、平衡状態の風速分布を確かめる。このときの浅水層の厚さは  $h = 3.75 \times 10^{-3}$ 、ニュートン冷却の時定数の値は  $\tau_{rad} = 2.5 \times 10$  である。

2 つ目のパラメータ依存性を調べる実験では、積分時間を先行研究と同じ 10000 惑星日とし、  $L_D = 0.025, 0.1, 0.5, 1$  ( $h = 3.75 \times 10^{-1}, 9.38 \times 10^{-2}, 3.75 \times 10^{-3}, 2.34 \times 10^{-4}$ ) 及び  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01, 0.05, 0.25, 1$  の  $4 \times 4$  通りの実験を行う。それぞれの実験における  $\tau_{rad}$  の値を表表 3 に示す。

		$\tau_{rad}L_D^2$			
		1	0.25	0.05	0.01
$L_D$ ( $H$ )	1 (3.75×10 <sup>-1</sup> )	1	0.25	0.05	0.01
	0.5 (9.38×10 <sup>-2</sup> )	4	1	0.2	0.04
	0.1 (3.75×10 <sup>-3</sup> )	100	<b>25</b>	5	1
	0.025 (2.34×10 <sup>-4</sup> )	1600	400	80	16

表 3: 実験毎の  $\tau_{rad}$  の値。太字は実験 1 で用いた値を示している。実験 2 に於いてはこの表全ての値について実験を行っている。

### 3 実験結果

本章では、長時間積分による平衡状態の確認実験 (実験 1, 3.1 節) 及びパラメータ依存性調査実験 (実験 2, 3.2 及び 3.3 節) の 2 種類の実験の結果を示す。後者に関しては議論のために参照すべき図が多いため、付録 D に実験図集と題して図のセットを記載し、本節中ではこれらを議論に適するようにまとめたもの、もしくは一部を抜き出したもののみを記載する。本節に無い図を確認したい場合、付録 D の該当箇所、もしくは本実験の Web ページ ([http://www.gfd-dennou.org/arch/numexp/spshallow-zd\\_forced/exp/pub/](http://www.gfd-dennou.org/arch/numexp/spshallow-zd_forced/exp/pub/)) を適宜参照されたし。また、 $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  の実験に関しては、 $t = 10000$  における風速分布と平衡状態の風速分布が有意に異なってしまうため、依存性の議論からは除いている。

#### 3.1 実験 1: 長時間積分による平衡状態の確認実験

図 10 には、 $t = 100000$  における球面投影した東西風分布のスナップショット、 $t = 100000$  と  $t = 10000$  における東西平均東西風速のスナップショット、東西平均東西風速及び大気的全エネルギーの時間発展の 4 枚の図を示す。風速及びエネルギーの時間発展の図を見ると、 $t = 20000$ - $30000$  付近で平衡に達していることがわかる。求められた  $t = 100000$  の最終状態においては東西風速は帯状の構造を成しており、また強い赤道西風ジェットが形成されていることが確認できる。この風速分布は Scott and Polvani (2008) 及び Saito and Ishioka (2015) で述べられた  $t = 10000$  における風速分布と整合的である。また、 $t = 100000$  と  $t = 10000$  での東西平均東西風速を比較すると、その帯の幅、風速ともあまり大きな違いはない。

#### 3.2 実験 2: パラメータ依存性実験 1 - $L_D$ 依存性-

図 11 に  $t = [10000, 10010]$  には様々な  $L_D$  について時間平均した東西平均東西風を  $\tau_{rad}L_D^2$  ごとにまとめた図を示す。 $\tau_{rad}L_D = 1$  の場合を除いては、 $\tau_{rad}L_D^2$  を固定した場合  $L_D$  によっては東西風の風速分布はほぼ変化がないことが分かる。 $\tau_{rad}L_D = 1$  の場合には、 $L_D = 0.1$  において赤道で東風になっているが、これは Saito and Ishioka (2015) において述べられた赤道ジェットが逆行するパターンと同じものであると考えられる<sup>7)</sup>。また、 $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  の場合は前述のとおり赤道西風ジェットが形成さ

<sup>7)</sup>この赤道ジェットの逆行は本実験においても  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$  かつ  $L_D = 0.025$ ,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$  かつ  $L_D = 0.1$ ,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  かつ  $L_D = 0.1$  の 3 パターンにおいて発生した。前 2 つの実験については乱数のセットを変えて再実験を行った場合に赤道西風ジェットが形成されたため、逆行のパ

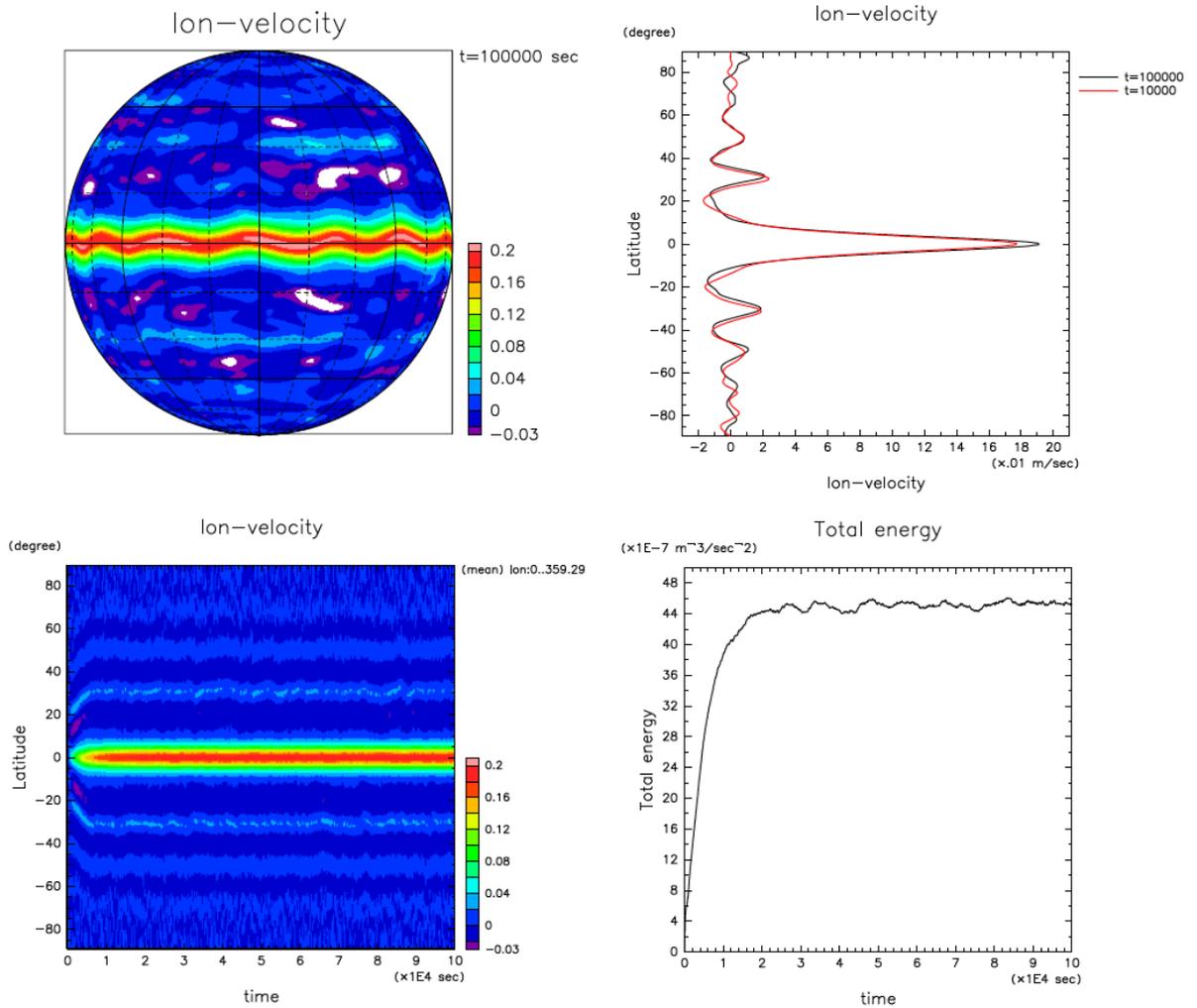


図 10: 上段:  $t = 100000$  時点での球面投影した東西風速分布のスナップショット (左) 及び  $t = 100000$  と  $t = 10000$  における東西平均東西風速のスナップショット (右). 下段:  $t = [0, 100000]$  における東西平均東西風速 (左) 及び大気的全エネルギー (右) の時間発展.

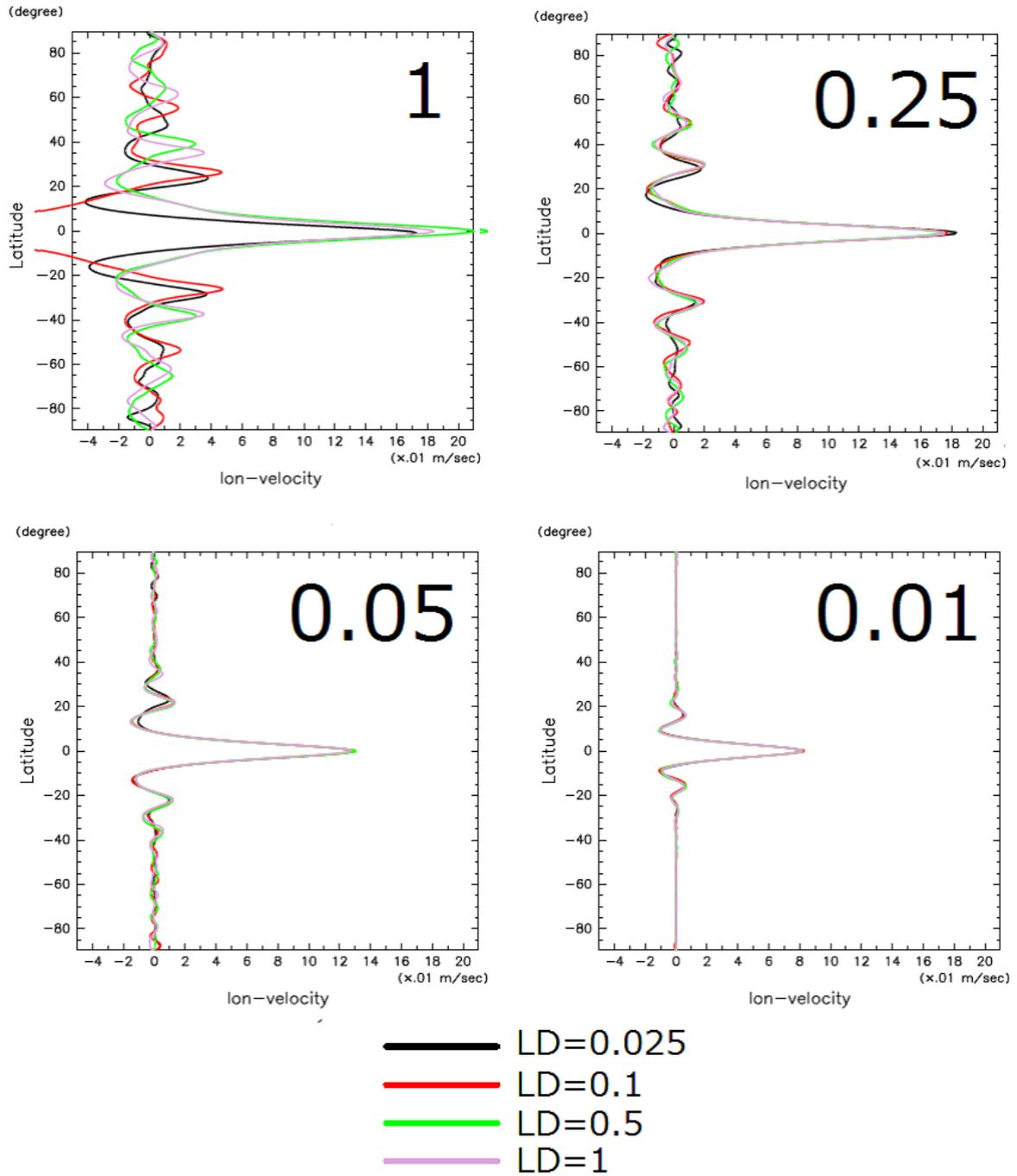


図 11:  $t = [10000, 10010]$  で時間平均した東西平均東西風を  $\tau_{rad} L_D^2$  ごとにまとめたもの. 各線の色は  $L_D$  の値を示しており, それぞれ黒は 0.025, 赤は 0.1, 緑は 0.5, 紫は 1 を示している. また, 各図の右肩には  $\tau_{rad} L_D^2$  の値を示している.  $\tau_{rad} L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.1$  の計算においては, 赤道における風速は  $\bar{u} = -0.135$  と東風になっているが, 見やすさを重視してここでは軸を正方向に広く取っており, ピークの位置は図中に示されていない.

れた場合においても赤道西風ジェットの振幅や帯の幅等が有意に異なっているが、これはニュートン冷却が他の場合に比べ弱いためである。恐らく平衡状態においては他の  $\tau_{rad}L_D^2$  を取る場合と同様に、風速分布に有意な  $L_D$  依存性は見られなくなるものと考えられる。しかしながら、計算時間の都合上平衡状態に達するまでの延長計算ができておらず、 $L_D$  毎の比較ができていない。

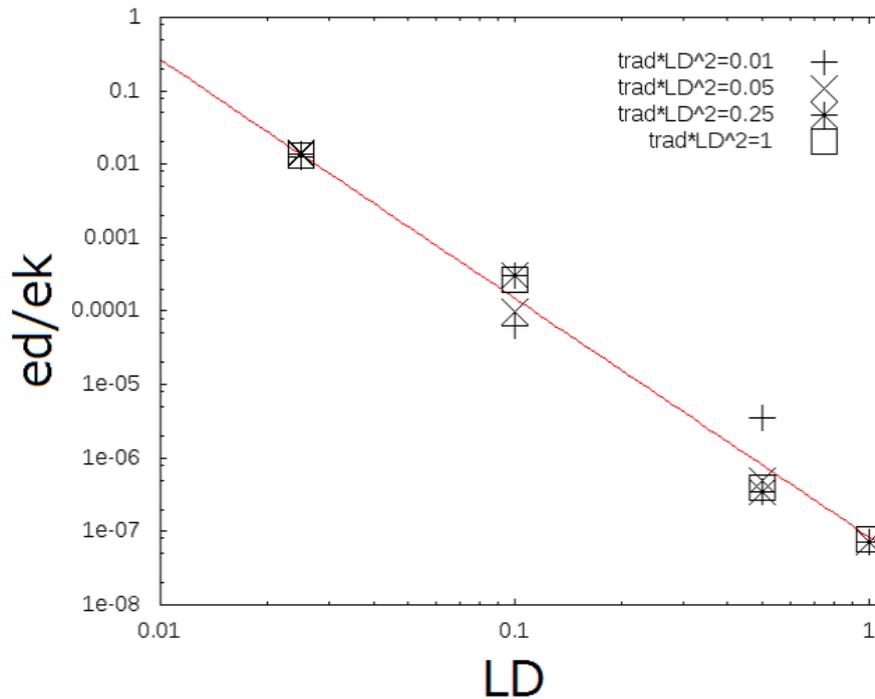


図 12:  $t = 10000$  における各実験での全運動エネルギーに対する全球での発散の運動エネルギーの比. 縦軸は発散の運動エネルギーの全運動エネルギーに対する比, 横軸は変形半径  $L_D$  の値を示している. また, 赤線は前述のとおり  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  を除いた全データ点に対して最小二乗法で  $A(\tau_{rad}L_D^2)^B$  ( $A, B$  はフリーパラメータ) として関数フィッティングを行って求められた関数が描く線を示している.

図 12 は  $t = 10000$  における各実験での全運動エネルギーに対する全球での発散の運動エネルギーの比を示している. これを見ると、全運動エネルギーに対する全球での発散の運動エネルギーの比は  $\tau_{rad}L_D^2$  の値によっては変わらず、 $L_D$  が大きくなるほど発散成分の割合が小さくなるという傾向を示している. これは地衡流調節問題で求められる運動エネルギーに対する発散の運動エネルギーの比と似た傾向であり<sup>8)</sup>、この系が回転の効果によって駆動されており、主にロスビー波の効果が強

ターンはここでは省いている. 最後の実験については、計算時間の都合上乱数のセットを変えた計算ができておらず、そのまま記載している.

<sup>8)</sup>但し、値の増減に関して似ている、というだけであり、その増減率については一致していない. これは本研究の系が球面であること、及び後に述べる運動量の収束等によって単純な地衡流調節問

く効いている, ということを示唆している. 地衡流調節問題については補足 B において議論している.

### 3.3 実験 2: パラメータ依存性実験 2 - $\tau_{rad}L_D^2$ 依存性-

図 13 に  $t = [10000, 10010]$  には様々な  $\tau_{rad}L_D$  について時間平均した東西平均東西風を  $L_D$  ごとにまとめた図を示す.  $\tau_{rad}L_D^2$  の値によって赤道西風ジェットの振幅やその幅等が  $L_D$  を変化させた場合に比べて大きく異なっていることがわかる. 図 14 には赤道西風ジェットの幅, 中高緯度域の帯の幅 (赤道ジェットを除いて内側から 2 本目の帯の幅と定義), 赤道西風ジェットの振幅の  $\tau_{rad}L_D^2$  に対する依存性を示す. ここで,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  の実験の値を除き, 全データ点に対して最小二乗法で  $A(\tau_{rad}L_D^2)^B$  ( $A, B$  はフリーパラメータ) として関数フィッティングを行うと, 赤道西風ジェットの幅はおよそ  $56(\tau_{rad}L_D^2)^{0.25}$ , 中高緯度域の帯の幅はおよそ  $27(\tau_{rad}L_D^2)^{0.25}$ , 赤道西風ジェットの振幅はおよそ  $0.27(\tau_{rad}L_D^2)^{0.22}$  という関数が得られた. 4 章では, 主に赤道西風ジェットの幅に着目して考察を行っている. 高緯度域の帯の幅, 及び赤道西風ジェットの振幅についての考察は未だできていない.

また, 高緯度側と低緯度側の渦度の構造を見比べてみると, 帯状構造が崩れてしまう (東西平均場よりも擾乱場が卓越する) 緯度が  $\tau_{rad}L_D^2$  が小さい場合のほうがより低緯度側に見られるという特徴が見える. 図 15 に  $L_D = 0.025$  の 4 つの実験における渦度分布を示す.  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  においては少なくとも  $40^\circ$  付近までは帯状の構造が保たれているのに対し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$  においては  $20^\circ$  付近において既に帯状構造が崩れているのが分かる. これは, ポテンシャル渦度  $\zeta_a/h^9$  の東西平均の値からも知ることができる. 図 16 に  $L_D = 0.025$  の 4 つの実験における東西平均ポテンシャル渦度分布を示す. ポテンシャル渦度の階段状の構造と風速による帯状構造は対応しており, すべての場合において低緯度ほどはっきりとした階段状の構造が見えている.  $\tau_{rad}L_D^2$  が大きいほどその構造が崩れる緯度は高緯度にあり, 逆に  $\tau_{rad}L_D^2$  が小さい場合にはより低い緯度においても階段状の構造は見られなくなっている. よって,  $\tau_{rad}L_D^2$  が大きいほど成帯性は強く, 小さいほど弱いということがわかる.

題とは一致しなくなってしまうためであると考えられる.

<sup>9)</sup>ポテンシャル渦度の詳細については 4.1 節で述べる.

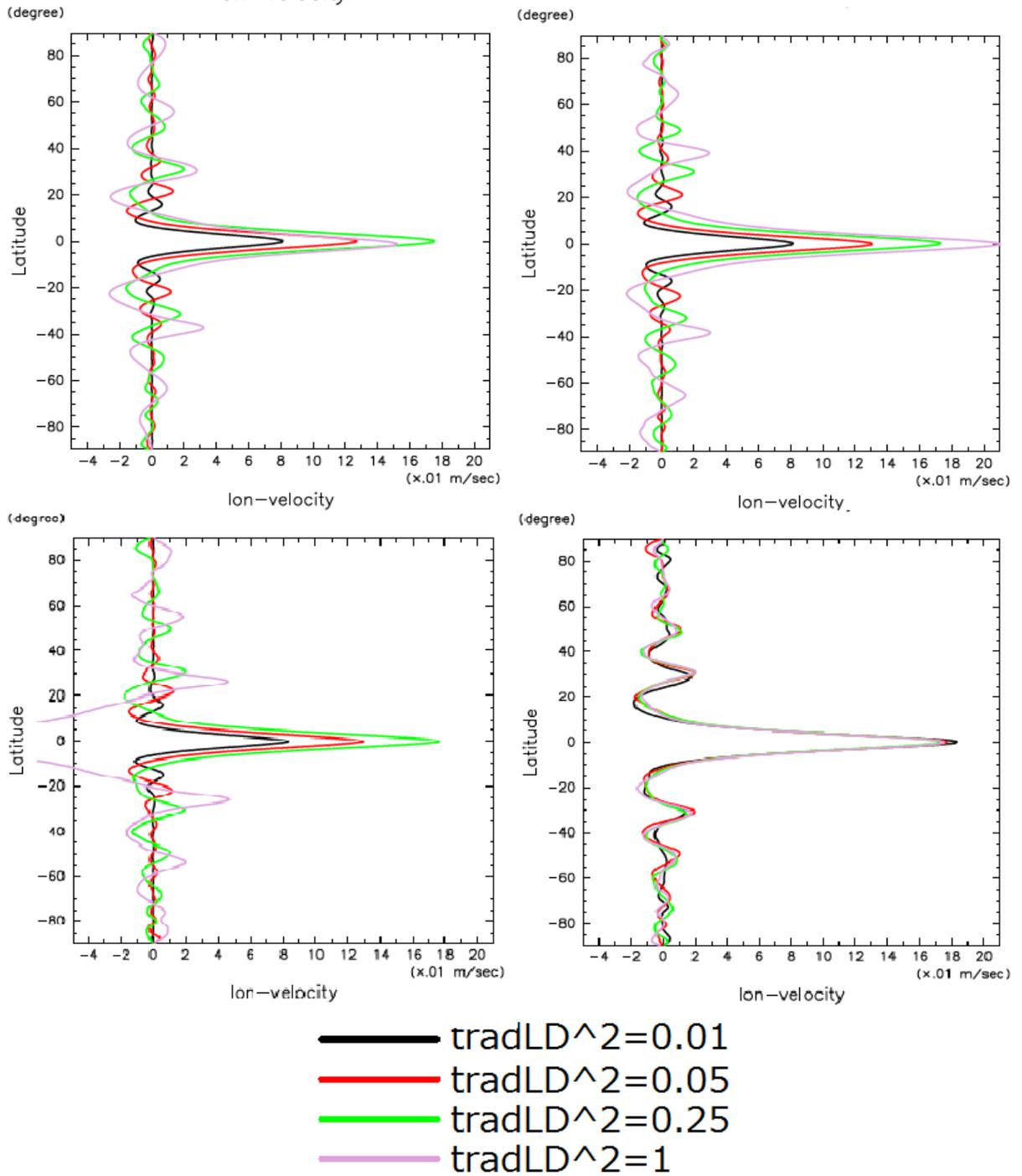


図 13:  $t = [10000, 10010]$  で時間平均した東西平均東西風を  $L_D$  ごとにまとめたもの。各図の右肩には  $L_D$  の値を示している。  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.1$  の計算においては、赤道における風速は  $\bar{u} = -0.135$  と東風になっているが、見やすさを重視してここでは軸を正方向に広く取っており、ピーク的位置は図中に示されていない。

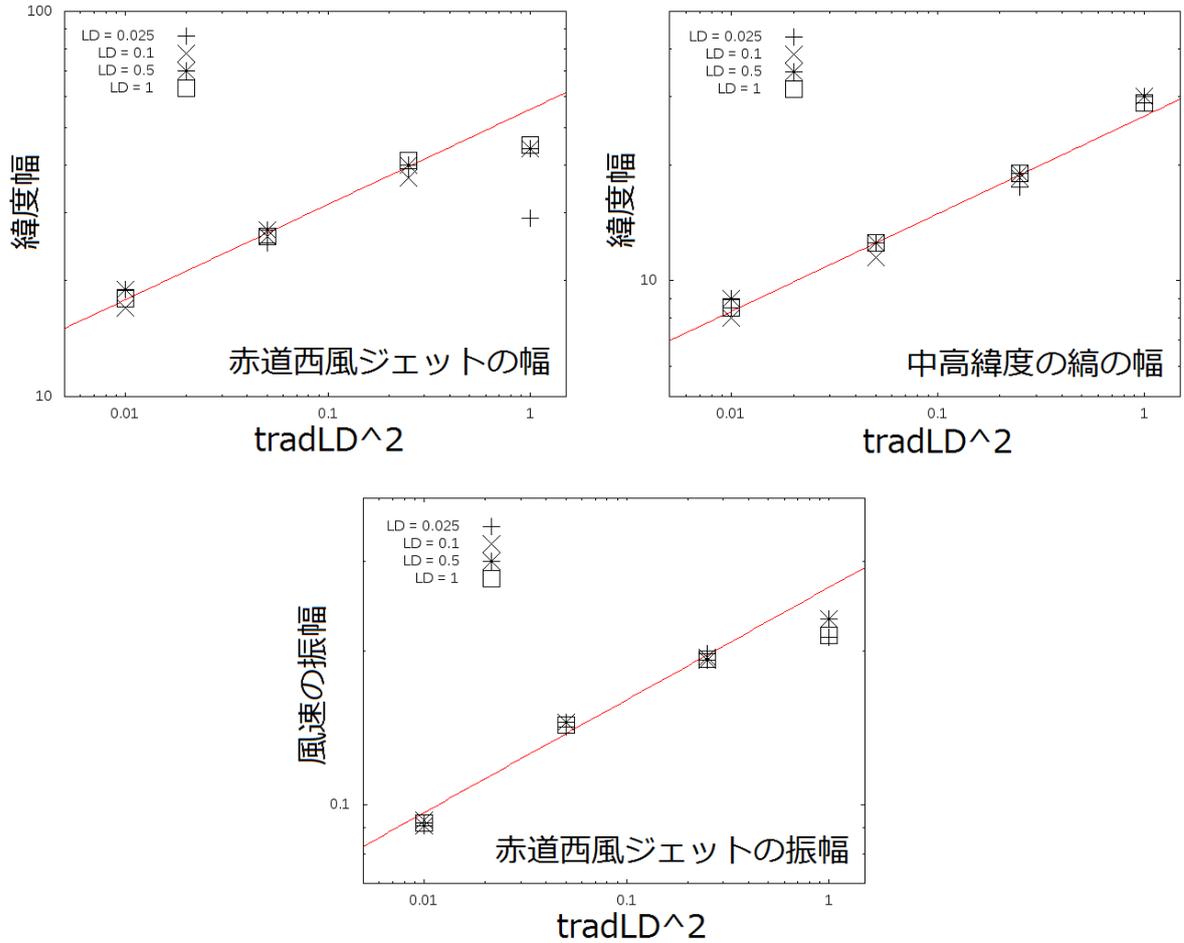


図 14:  $t = [10000, 10010]$  における各実験での赤道西風ジェットの幅 (左上), 中高緯度域の帯状構造の幅 (右上), 赤道西風ジェットの振幅の図. また, 赤線は前述のとおり  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$  を除いた全データ点に対して最小二乗法で  $A(\tau_{rad}L_D^2)^B$  ( $A, B$  はフリーパラメータ) として関数フィッティングを行って求められた関数が描く線を示している.

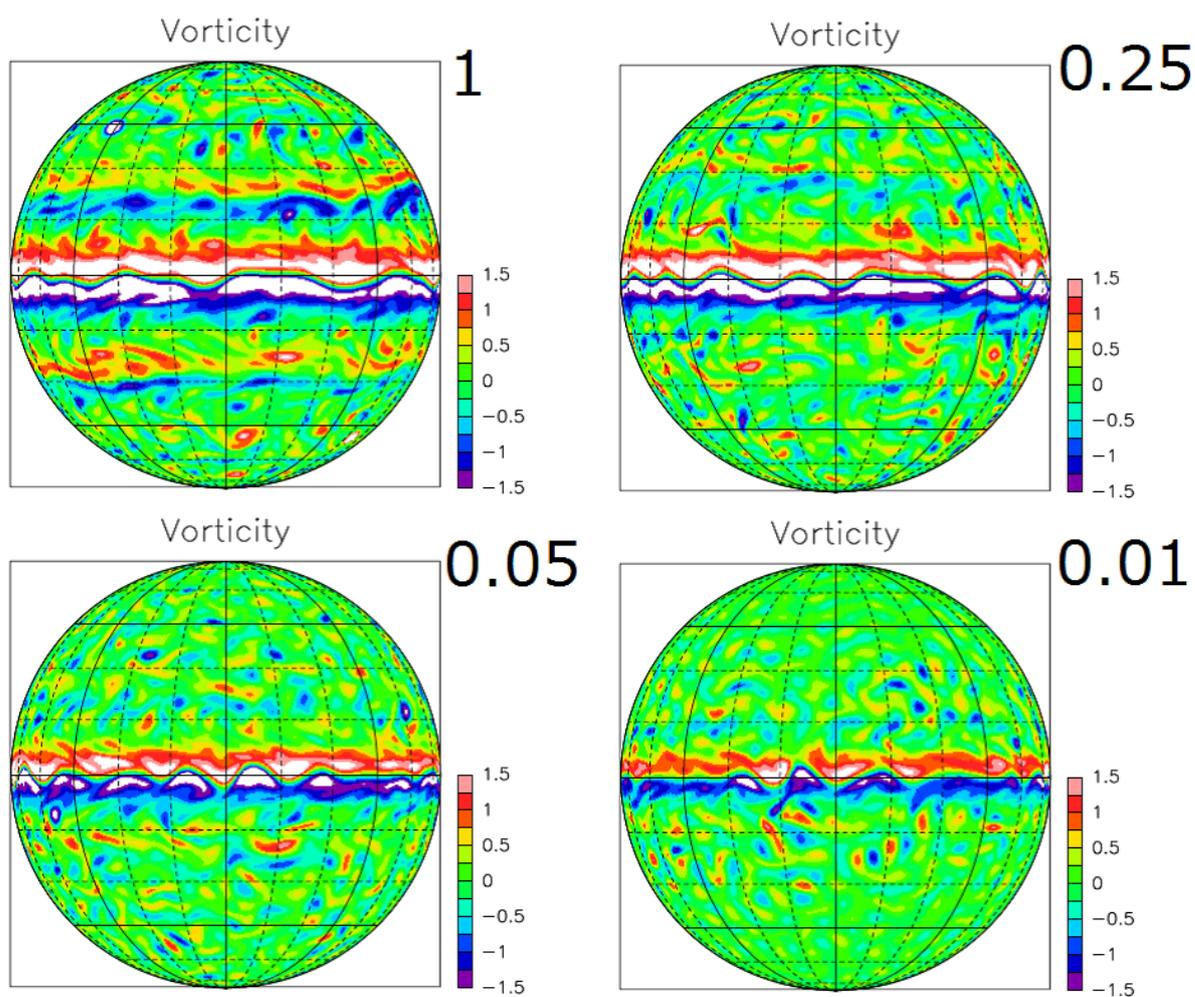


図 15:  $L_D^2 = 0.025$  となる 4 通りの実験における  $t = 10000$  での渦度分布の球面投影. 図の右肩には  $\tau_{rad} L_D^2$  の値を示している. コントアのスケールは中緯度に合わせてある.

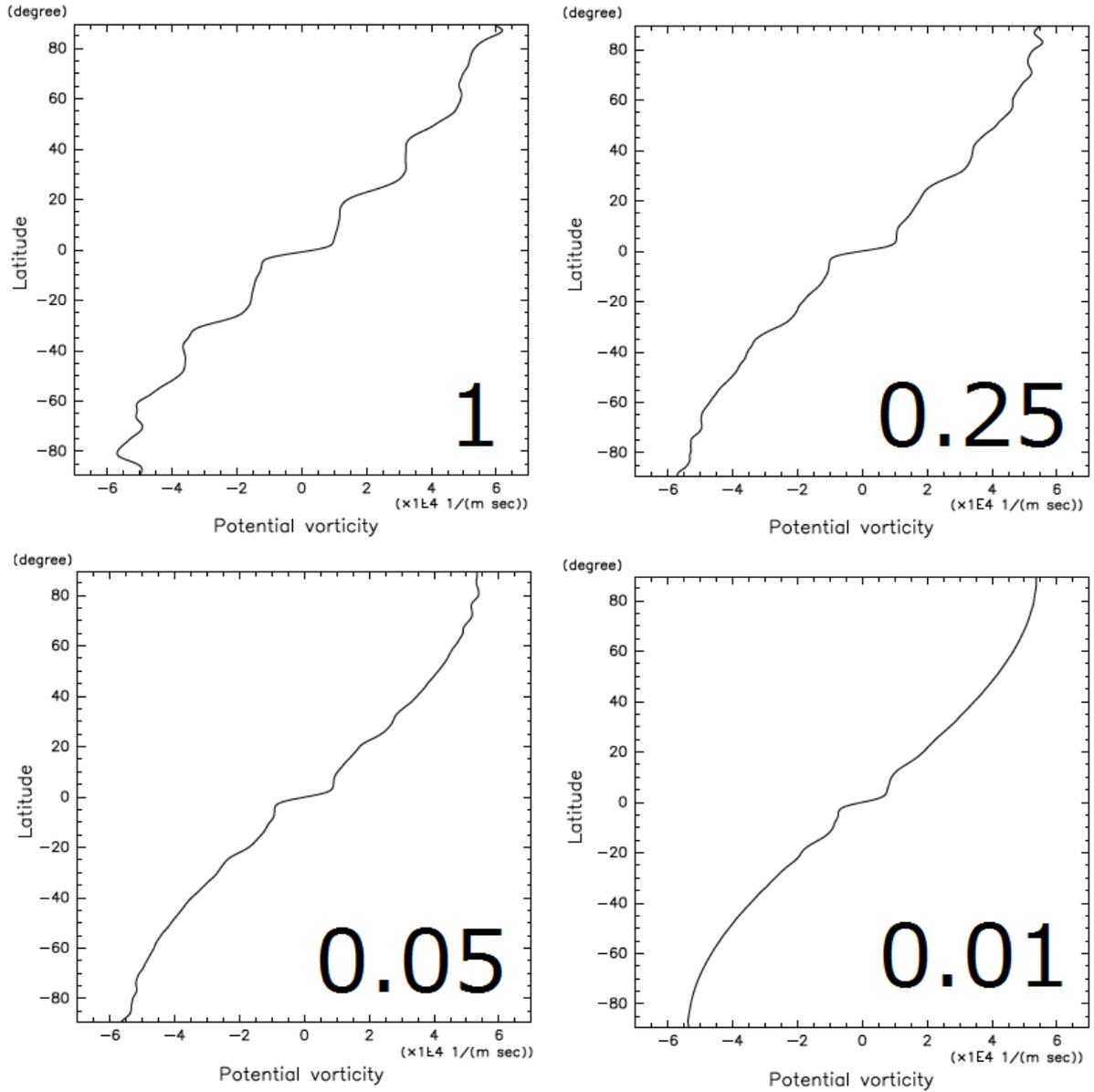


図 16:  $L_D^2 = 0.025$  となる 4 通りの実験における  $t = [10000, 10010]$  での時間平均したポテンシャル渦度分布の東西平均. 図の右下には  $\tau_{rad} L_D^2$  の値を示している.

## 4 考察

以下では, 3.2 節に示したパラメータ依存性実験の結果を元に, 赤道西風ジェットの幅の決定要因, 及び今回の結果の妥当性について考察する. 4.1 節においては赤道西風ジェットの幅の決定要因について考察し, 4.2 節においては今回の結果で得られた各パラメータへの依存性が実際の惑星と整合的であるかどうかを確かめる.

### 4.1 ポテンシャル渦度

流体中にある渦管においては, 渦度によって渦管の高さが変わるという効果がある. 強制及び消散の効果が無視できるとき, 角運動量保存則より, ポテンシャル渦度  $q = \zeta_a/h$  は保存量となる. 本計算中において, 小さなスケールの擾乱によって発生した渦が渦同士の相互作用によって大きなスケールの渦へと成長し, 大きなスケールにおいてこの渦がニュートン冷却によって減衰するとすると, 渦の混合による渦の成長過程においてはこのポテンシャル渦度はおおまかには保存していると考えることができる. この渦の混合によって木星型惑星の風速分布が形成されているとするならば, その形成過程にはポテンシャル渦度が重要な役割を果たしているはずである.

ここで, 用いている基礎方程式からポテンシャル渦度が満たす式を考える<sup>10)</sup>. 準地衡流近似が可能な浅水系においては, ポテンシャル渦度  $q$  に相当する量は, ロスビーのポテンシャル渦度  $q_r = (\nabla^2 - L_D^{-2} \sin^2 \phi)\psi$  で表される.  $U$  を風速のスケールとして, フルード数  $Fr = U/\sqrt{gH}$ , 及びロスビー数  $Ro = U/2a\Omega$  が  $Fr^2 \ll Ro \ll 1$  を満たすという仮定を置くと, 準地衡流近似が成り立つ. よって, 式 (2.3), 式 (2.4), 及び式 (2.5) を用いて以下の式が導かれる.

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} + J(\psi, q) = F + \frac{\psi \sin^2 \phi}{\tau_{rad} L_D^2} - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \quad (4.1)$$

これが, 本研究で用いたモデルにおけるポテンシャル渦度が満たす式である.

<sup>10)</sup>導出の詳細は付録 C ポテンシャル渦度方程式 を参照.

## 4.2 赤道西風ジェットの幅

3.2.1 節において述べたように、この系においては恐らくロスビー波の効果が非常に強く効いていると思われる。ロスビー波は西向きの運動量を持っているため、これが赤道付近から高緯度側に伝搬した場合、低緯度側から高緯度側に西向きの運動量が輸送されるはずである。よって、このロスビー波の輸送が効く長さスケール、つまりロスビー波が発生してから減衰するまでの長さスケールが赤道ジェットの幅を決めていると考えることができる。このアイデアに従って、式 (4.1) における  $\psi$  を南北方向に伝搬するロスビー波によるものと考え、 $\psi = \psi_0 \exp\{i(ly + \omega t)\} = \psi_0 \exp(-l_i y) \exp\{i(l_r y + \omega t)\}$  ( $l$  の実部が  $l_r$ 、虚部が  $l_i$ ) の減衰振動の形で表わされると仮定する。エネルギーの消散が効くような大スケールを考え、時間変化項とニュートン冷却項の釣り合い、つまり  $\frac{\partial q_r}{\partial t} \sim \frac{\psi \sin^2 \phi}{\tau_{rad} L_D^2}$  を考える。このとき、ロスビー波の減衰する長さスケール  $l_i^{-1}$  について、赤道付近であることから  $\sin \phi \sim \phi$  として整理する。緯度  $\phi$  は半径  $a = 1$  より長さのスケールであるため、これを  $\phi = l_i^{-1}$  として  $l_i^{-1}$  の値を求めると、以下のように表される<sup>11)</sup>。

$$l_i^{-1} \sim (2\omega\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}. \quad (4.2)$$

右辺を見れば分かるように、このロスビー波が減衰する長さスケールは、 $\tau_{rad}L_D^2$  の  $1/4$  乗に比例している。これは、3.2.2 節において示された  $\tau_{rad}L_D^2$  の赤道ジェットの幅への依存性とほぼ等しい。

ここで、式 (4.2) の  $\omega$  に実験で求められた値を具体的に代入してみることで、この式と 3.2.2 節において求められた  $\tau_{rad}L_D^2$  と赤道西風ジェットの幅の関係が整合的であるかどうかを調べる。ロスビー波の分散関係は以下で表される。

$$\omega = -\frac{2\Omega K}{K^2 + L^2}. \quad (4.3)$$

$K$  及び  $L$  はそれぞれロスビー波の東西及び南北波数である。簡単のため  $K \sim L$  とし、式 (4.3) を式 (4.2) に代入すると、以下の関係が導かれる。

$$l_i^{-1} \sim (2\Omega K^{-1}\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}. \quad (4.4)$$

<sup>11)</sup> 導出の詳細は補足 C.2 を参照。

ロスビー波の赤道付近における東西波数は、補足 D に載せた赤道付近の南北風の図より、全実験においておよそ  $K \sim 20/2\pi$  程度である。また、自転角速度は  $\Omega = 2\pi$  である。よってこれらを式 (4.5) に代入してオーダーを考えると、以下のようになる。

$$l_i^{-1} \sim 1(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}. \quad (4.5)$$

これを緯度幅に変換して 3.2.2 節の結果と比較したところ、今回求めた式と実験結果はオーダーが一致するため、オーダーの議論を行って求めた理論式 (4.5) は実験結果と整合的である。よって、赤道西風ジェットの幅はロスビー波の南北方向の伝搬距離によって決まるという仮説は本実験の結果と整合的である、という結論を得た。

### 4.3 実際の惑星との対応

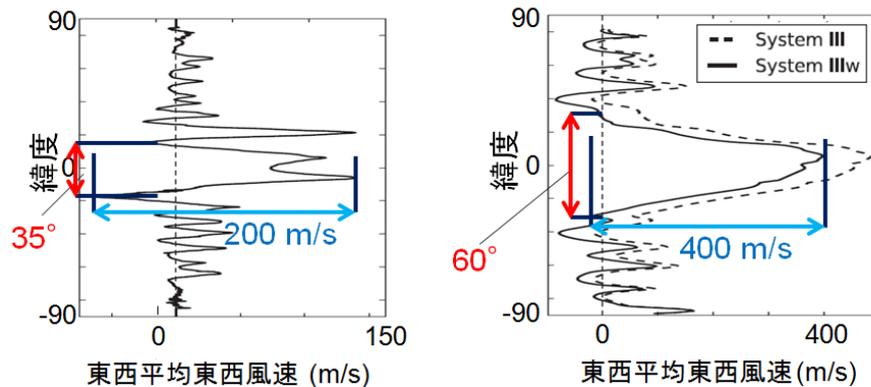


図 17: 観測によって求められた木星 (左) 及び土星 (右) の風速分布 (図 1 再掲). 図中には赤矢印で赤道ジェットの幅, 青矢印で赤道ジェットの振幅を示す.

今回の研究では、3.2.2 節において述べたように、 $\tau_{rad}L_D^2$  の値のみによって赤道西風ジェットの幅及びその振幅が決まることがわかった。そこで、本研究で用いたモデルが実際の木星型惑星と対応しているのかどうか確かめるため、赤道西風ジェットの幅と振幅の関係と実際の木星型惑星の風速分布を比較し、木星及び土星の風速分布を表現できるパラメータが存在するかどうかを確かめる。図 17 には 1 章にて示した木星及び土星の東西平均東西風速分布を再掲する。

土星の赤道西風ジェットの幅はおよそ  $60^\circ$  であり、振幅はおよそ  $400 \text{ m/s}$  である。この値から  $\tau_{rad}L_D^2$  を 3.2.2 節で求めた赤道西風ジェットの幅が満たす関数

$56(\tau_{rad}L_D^2)^{0.25}$  に当てはめて求めると,  $\tau_{rad}L_D^2 \sim 1.20$  程度になる. この  $\tau_{rad}L_D^2$  の値から赤道西風ジェットの振幅を求めると 440 m/s となり, 現実の土星において観測された赤道西風ジェットの振幅とほぼ一致する. また, 木星の赤道西風ジェットの幅はおよそ  $35^\circ$  であり, 振幅はおよそ 200 m/s である. 木星の赤道西風ジェットの幅から  $\tau_{rad}L_D^2$  を求めると,  $\tau_{rad}L_D^2 \sim 0.14$  程度になる. この  $\tau_{rad}L_D^2$  の値から赤道西風ジェットの振幅を求めると 340 m/s となり, 実際の木星における値のおよそ 1.7 倍程度となる. このように, どちらの惑星においても実際の惑星大気の赤道西風ジェットの風速と数倍程度の精度で一致しており, 木星及び土星の風速分布を表すような  $\tau_{rad}L_D^2$  の値が存在することが確かめられた. よって, 今回の実験において得られた結果は, 木星型惑星の対流構造を正しく表している可能性を強める結果となった.

## 5 まとめ及び今後の展望

本論文においては, Scott and Polvani (2008) の結果に基づき, 主な消散過程として放射冷却を模したニュートン冷却を組み込んだ球面浅水モデルを用いた数値計算を行いより長時間の計算を行い, 平衡状態において (i) 東西風の風向が南北方向に交互に並ぶ, (ii) 強い赤道西風ジェットが存在する, (iii) 高緯度域では帯状構造が弱いという特徴を持った, 安定した風速分布が得られた. また, 変形半径  $L_D$  及びニュートン冷却のパラメータ  $\tau_{rad}L_D^2$  の値を変化させこれらの値への依存性を調べ, 本モデルにおいては風速分布が  $L_D$  の値を変えても変化せず,  $\tau_{rad}L_D^2$  によって変化し, 赤道西風ジェットの振幅は  $\tau_{rad}L_D^2$  の 0.22 乗, 幅は  $\tau_{rad}L_D^2$  の 0.25 乗, 中高緯度域の帯の幅は  $\tau_{rad}L_D^2$  の 0.25 乗に比例するような変化をすることが分かった. また, 実際に木星と土星の風速分布とこれらの関係を比較したところ, 木星と土星の風速分布を表現できるパラメータが存在することが確認された. 更に, 特に赤道ジェットの幅に関しては, ポテンシャル渦度方程式から導かれるロスビー波の発生から減衰するまでの長さスケールによって決まっているという仮説を立て, これが今回の実験において得られた風速分布と整合的であるという結果が得られた. これらの結果から, 放射冷却が主な散逸過程として働くような内部と独立した大気層が対流圏上部に存在し, この層内で鉛直方向におよそ一様とみなされるような流れが起こることで風速分布が形成される, という浅い対流説は, 少なくとも赤道ジェットの形成機構としては妥当といえる, という結論が得られた.

しかしながら, 本研究においては未だ赤道ジェットの振幅の決定機構については考察できておらず, また高緯度域の帯の振幅及び幅についてもその決定要因について考察することができていない. よって, 今後は本研究の結果をより詳しく解析し, これらについてアプローチしていかなければならない. また, 本モデルにおいては系の力学過程のみしか考えていないが, 放射冷却を考える以上, 本来は太陽放射等が流れに対してどのような影響をあたえるのか考える必要がある. 更に, 現実の系においては鉛直方向の流れも存在しているはずであり, この系が三次元になった場合に果たして同様な風速分布が形成されるのか, という点について考えなくてはならない. これを考える手段の 1 つとして, 惑星大気大循環モデル (Global Circulation Model: GCM) を用いた計算を行う, というものがある. これは回転球面上の全休にわたる三次元の大気の流れを放射等の様々な物理プロセスを組み込んだ大気モデルを用いて調べるものであり, 今回用いたような球面浅水モデルの結果が薄い大気層内での鉛直構造を考えた場合に同様に成り立つのかを考えるのには妥当なモデルである. これらの課題を解決することで, 木星型惑星の強い赤道西風ジェットを持つ帯状構造の成因を理解するだけでなく, 今回の実験で再現していない木星のダブルピーク構造についても成因を理解することができるかもしれない.

## 謝辞

本論文の作成にあたっては、非常に多くの方々に多大なる助力を頂きました。

指導教官の石渡正樹准教授には、直接指導して頂くのみならず、私の研究の希望を汲んで京都大学の竹広准教授に指導して頂けるようお話をしてくださいました。変則的な指導体制となり、ただでさえ卒論・修論の学生をを複数抱えていらっしゃる中で、更に加えて多大な苦勞をお掛けしたかと思えます。本当にありがとうございました。

本研究の指導を主に行ってくださった京都大学の竹広真一准教授には、ご指導を頂きたいという急なお願いにも快く応えてくださり、石渡准教授に代わって研究の實質的なご指導をしていただきました。非常にご多忙な中、私の研究に対する指導を真摯に行ってください、多大なる苦勞をおかけいたしました。いくら感謝しても感謝しきれません。どうもありがとうございました。

GFD 研究室の小高正嗣助教授には、研究や発表等様々な場面において多くの助言・ご指導を頂きました。先輩、後輩、同期等の GFD 研究室の学生の方々、及び宇宙惑星グループの方々には、研究生活のあらゆる面で私の力になって頂き、この研究を進める原動力となりました。皆様に心からの感謝を申し上げます。

最後に、私の研究生活から私生活に至るまで、すべての面で私を支えてくださった家族、友人たち、周囲の方々、そして私に関わって頂いた全ての方々に最大限の感謝を申し上げます。皆様、本当にありがとうございました。

## 参考文献

Busse, F. H., 1976: A simple model of convection in the Jovian atmosphere, *Icarus*, 29, 255-260.

Busse, F. H., 1983: Convection-driven zonal flows in the major planets, *pageoph*, 121, 255-260.

Gasitne, T., Heimpel, M., Wicht, J., 2014: Zonal flow scaling in rapidly-rotating compressible convection, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 232, 36-50.

Gracia, R. R., 1987: On the mean meridional circulation of the middle atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 44, 3599-3609.

Saito, I., Ishioka, K., 2015: Mechanism for the formation of equatorial superrotation in forced shallow-water turbulence with Newtonian cooling., *J Atmos. Sci.*, 72, 1466-1483.

Scott, R. K., Polvani, L. M., 2007: Forced-dissipative shallow-water turbulence on the sphere and the atmospheric circulation of the giant planets., *J. Atmos. Sci.*, 64, 3158-3176.

Scott, R. K., Polvani, L. M., 2008: Equatorial superrotation in shallow water atmospheres. *Geophys. Res. Lett.*, 35, L24202.

Vallis, G. K., 2006: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics.*, Cambridge University Press, 745 pp.

Williams, G. P., 1978: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence., *J. Atmos. Sci.*, 35, 1399-1426.

Yamagata, T., Philander, S. G. H., 1985: The role of damped equatorial waves in the oceanic response to winds. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 41, 345-357.

斎藤 泉, 石岡 圭一, 2015: ニュートン冷却を散逸過程とする強制浅水乱流における赤道西風形成のメカニズムについて, 惑星大気研究会オンラインセミナー, 2015/04/01, CPS.

URL: [https://www.cps-jp.org/modules/mosir/player.php?v=20150401\\_saito](https://www.cps-jp.org/modules/mosir/player.php?v=20150401_saito)

竹広 真一, 2015: 回転球面浅水強制乱流問題の定式化, 9pp.

URL: [http://www.gfd-dennou.org/arch/numexp/spshallow-zd\\_forced/src/spshallow-zd\\_forced.pdf](http://www.gfd-dennou.org/arch/numexp/spshallow-zd_forced/src/spshallow-zd_forced.pdf)

地球流体電脳倶楽部, 2015: 階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL, dc-model Project.

URL: <https://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/index.htm.ja>

## A 支配方程式の導出

ここでは、2.1 節において述べられた浅水系における支配方程式 (浅水方程式)、及びそれを変形して求められる渦度発散方程式を導く。

### A.1 球面上の浅水方程式

2.1 節の仮定に従い、3 次元球面上のプリミティブ方程式から浅水系における運動方程式及び浅水層の厚さ  $h$  が満たす式を導く。なお、本節中に限り、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$  として 3 次元の流れを考え、2 次元ベクトルを表す際には  $u_z$  のように下付きの  $z$  を付記することとする。

まず、強制及び消散を無視して考える。  $\rho$  一定より、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  である。下端を  $z = 0$  としてこれを鉛直方向に積分すると、

$$\int_0^{H+h'} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + \int_0^{H+h'} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0, \\ h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w|_{z=H+h'} = 0. \quad (\text{A.1})$$

ここで、それぞれ  $w|_{z=H+h'}$  は上端における流体粒子の鉛直速度なので、これは  $h'$  を物質微分したものに等しい。よって、

$$w|_{z=H+h'_1} = \frac{\partial h'_1}{\partial t} + \mathbf{u}_z \cdot \nabla_z h'. \quad (\text{A.2})$$

これを式 (A.1) に代入して、

$$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial h'}{\partial t} + \mathbf{u}_z \cdot \nabla_z h' = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_z \cdot h \mathbf{u}_z = 0. \quad (\text{A.3})$$

これで、 $h$ に関する式が導かれた。次に、水平風に関する式を導く。まず、圧力を  $p$  とする。静水圧平衡の式  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  より、最上端での圧力を  $p_0$  に固定して領域内で鉛直方向に高さ  $z$  まで積分すると、圧力は

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \quad (\text{A.4})$$

となる。これを運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}_z = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_z - \frac{1}{\rho} \nabla_z p \quad (\text{A.5})$$

に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}_z = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_z - g \nabla_z h \quad (\text{A.6})$$

これで水平風の運動方程式が導かれた。ここに強制項、消散項、超粘性項を加えると、式 (A.3) 及び式 (A.6) より、この系が満たす運動方程式は以下になる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial t} + (\mathbf{u}_z \cdot \nabla_z) \mathbf{u}_z = -f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_z - g \nabla_z h + F_u - \frac{\mathbf{u}_z}{\tau_{fr}} - D_u, \quad (\text{2.1})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_z \cdot (\mathbf{u}_z h) = -\frac{h'}{\tau_{rad}}. \quad (\text{2.2})$$

また、これを  $x, y$  座標系から  $\lambda, \phi, z$  座標系に変換する場合、表式は変わらないが、 $\nabla$  及び  $\nabla_z$  の表す内容が変化することに注意。具体的には、 $x = a \lambda \cos \phi$ ,  $y = a \phi$  より、 $x, y$  各方向の微分が

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

となる。

## A.2 渦度・発散方程式

ここでは、式 (2.1) 及び式 (2.2) から実際にモデル中で用いている渦度・発散方程式を導く。なお、座標系は  $\lambda, \phi, z$  である。

### A.2.1 渦度方程式

渦度方程式を導出するため、式 (2.1) の両辺の回転を取ると、

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times \{(\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}\} = -\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{u}) - g \nabla \times \nabla h + \nabla \times \mathbf{F}_\zeta - \frac{1}{\tau_{fr}} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (\text{A.7})$$

ここで、両辺の  $z$  成分のみを抜き出す。特に複雑な形になる左辺第 2 項の  $z$  成分を抜き出すと、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} [\nabla \times \{(\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}\}]_z &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( v \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \nabla \cdot \mathbf{u} \zeta \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \\ &\quad + \nabla_z \cdot \mathbf{u} \zeta \\ &= \nabla_z \cdot \mathbf{u} \zeta. \end{aligned}$$

式 (A.7) にこれを代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_z \cdot \mathbf{u} \zeta &= -\nabla_z \cdot \mathbf{f} \mathbf{u} + \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_u) - \frac{1}{\tau_{fr}} \zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_z \cdot \zeta_a \mathbf{u} &= F_\zeta - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \end{aligned} \quad (\text{2.3})$$

ここで,  $\zeta_a = \zeta + f$ ,  $F_\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_u)$  である. これで, 本論文中の渦度方程式が導かれた.

### A.3 発散方程式の導出

発散方程式を導出するため, 式 (2.1) の両辺の発散を取る.

$$\nabla_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_z \cdot \{(\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}\} = -\nabla_z \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{u}) - g \nabla_z \cdot \nabla_z h + \nabla_z \cdot \mathbf{F}_u - \frac{1}{\tau_{rad}} \nabla_z \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{A.8})$$

特に複雑な形になる左辺第 2 項を抜き出すと, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \nabla_z \cdot \{(\mathbf{u} \cdot \nabla_z) \mathbf{u}\} &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla^2 |\mathbf{u}|^2 \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + v \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_z^2 |\mathbf{u}|^2 \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - v \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( u \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_z^2 |\mathbf{u}|^2 \\ &= -\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \zeta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla_z^2 |\mathbf{u}|^2. \end{aligned}$$

式 (A.8) にこれを代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \zeta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla^2 |\mathbf{u}|^2 &= \mathbf{k} \cdot (\nabla \times f \mathbf{u}) - g \nabla_z^2 h + \nabla_z \cdot \mathbf{F}_u - \frac{1}{\tau_{rad}} \delta, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \{\nabla \times \zeta_a \mathbf{u}\} &= -\nabla_z^2 (E + gh) + F_\delta - \frac{\delta}{\tau_{rad}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで,  $\zeta_a = \zeta + f$ ,  $F_\delta = \nabla_z \cdot \mathbf{F}_u$  である. これで, 本論文中的の発散方程式が導かれた.

## B 地衡流調節問題

ここでは、3.1 節中において述べられた地衡流調節について、簡単のために二次元無限領域を仮定して解説し、その場合の運動エネルギーの発散成分の全運動エネルギーに対する比がどのような振る舞いをするかを求める。地衡流調節とは、場がおよそ地衡流平衡に達しており、かつそこに小さな擾乱が発生した場合に、発生した擾乱を地衡流平衡状態へと戻そうとする働きのことである。この働きはポテンシャル渦度の保存とも強く関係しているため、まず最初に B.1 節においてポテンシャル渦度の保存について解説した後に、B.2 節において地衡流調節が起こった際の運動エネルギーの振る舞いについて述べる。

### B.1 ポテンシャル渦度の保存

ポテンシャル渦度の保存を導くために、まずは浅水方程式より、地衡流平衡状態において速度場が満たす式を導く。系の変数（風速  $\mathbf{u} = (u, v)$ 、浅水層の厚さ  $h$ ）を基本場と擾乱場に分けて考える。簡単のため、基本場は静止状態であるとする。微小量同士の乗算を無視すると、擾乱場に関する  $f$  面近似した強制消散の無い浅水系の基礎方程式は以下になる。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (\text{B.3})$$

これから渦度と発散の式を導くと、以下のようになる。

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + f \delta' = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \delta'}{\partial t} - f \zeta' = -g \nabla^2 h'. \quad (\text{B.5})$$

式 (B.3) を  $t$  で微分して、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + H \frac{\partial \delta'}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.6})$$

式 (B.5) を代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + H (f\zeta' - g\nabla^2 h') &= 0, \\ \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 h' - fH\zeta'. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここで,  $c = \sqrt{gH}$  とした. 各項の大きさを比べると, 時間微分項は相対的に小さくなる. よって,

$$c^2 \nabla^2 h' \sim fH\zeta' \quad (\text{B.8})$$

がおよそ成り立つため, 時間微分が 0 とみなせるような場においては速度場はおよそ地衡風平衡状態となることが分かる.

この最終状態を得るまでの時間経過を考える. 式 (B.4) と (B.5) 式より, 微小量同士の掛け算は 0 なので,

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta'}{dt} - \frac{f}{H} \frac{dh'}{dt} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \zeta' - \frac{f}{H} h' \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

よって,  $\zeta' - \frac{f}{H} h'$  は保存量である. この  $\zeta' - \frac{f}{H} h'$  は, 準地衡流近似によって導かれる  $h'$  と  $\psi$  の関係  $h' \sim \frac{f}{g} \psi$  を代入すると  $\zeta' - \frac{f}{gH} \psi$  となる. これはロスビーのポテンシャル渦度と呼ばれ, 一般的に用いられるポテンシャル渦度  $\zeta'/h$  に相当する量である. このロスビーのポテンシャル渦度と一般的に用いられるポテンシャル渦度の関係性については補足 C で述べる.

## B.2 地衡流調節

地衡流平衡状態の時の重力波のエネルギーの全運動エネルギーに対する比を考える。そのための準備として、まずは初期場として適当な渦度擾乱を与え、系が平衡状態に達した時の浅水層の厚さの擾乱がどのように表わされるかを考える。

まず、初期場として  $h = H$ ,  $\zeta = \zeta'_0(x, y)$  で表される場を考える。  $\zeta'_0$  をフーリエ展開すると、以下の様な形で表される。

$$\zeta'_0 = \int \int \tilde{\zeta}'_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl. \quad (\text{B.10})$$

また、  $k^2 + l^2 = K^2$  とする。このとき、初期場のポテンシャル渦度は、

$$\zeta' - \frac{f}{H} h' = \zeta'_0. \quad (\text{B.11})$$

定常状態を仮定してこれを式 (B.8) に代入すると、

$$c^2 \nabla^2 h' - fH \zeta'_0 - f^2 h'. \quad (\text{B.12})$$

これを  $h' = \int \int \tilde{h}'_{k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl$  として波数展開して、

$$\begin{aligned} (-c^2 K^2 - f^2) \tilde{h}'_{k,l} &= -fH \tilde{\zeta}'_{0,k,l}, \\ \tilde{h}'_{k,l} &= \frac{fH}{c^2 K^2 + f^2} \tilde{\zeta}'_{0,k,l} \\ &= \frac{Hf^{-1}}{L_D^2 K^2 + 1} \tilde{\zeta}'_{0,k,l}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

ここで、  $L_D = c/f$  を用いた。よって、  $h'$  は、

$$h' = \int \int \frac{Hf^{-1}}{L_D^2 K^2 + 1} \tilde{\zeta}'_{0,k,l} e^{i(kx,ly)} dkdl. \quad (\text{B.14})$$

この  $h'$  を用いて平衡状態における系のポテンシャルエネルギーを求め、これを初期に与えた全エネルギーから差し引くことで、運動エネルギーとして使われるエネルギーの総和を考える。

まず、初期に与えたエネルギーを求めるため、 $\zeta_0 = \nabla^2 \psi_0$  として  $\psi_0$  を求めると、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi_0 &= \int \int \tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dk dl, \\ \psi_0 &= \int \int \frac{1}{K^2} \tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dk dl.\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

運動エネルギーは  $E_k = \frac{1}{2} \rho H |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \rho H \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\}$  で表わされるため、初期に与えた全運動エネルギーは、

$$E_0 = E_{k0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int \int -\frac{\rho H}{2} K^{-2} \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dk dl \right) dx dy. \quad (\text{B.16})$$

また、ポテンシャルエネルギーは  $E_p = \frac{1}{2} \rho g h'^2$  で表わされるため、平衡状態におけるポテンシャルエネルギーは、

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int \int \frac{\rho g}{2} \left( \frac{H f^{-1}}{L_D^2 K^2 + 1} \right)^2 \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dk dl \right) dx dy. \quad (\text{B.17})$$

よって、運動エネルギーとして使われるエネルギーの総和は、

$$\begin{aligned}E_k = E_0 - E_p &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int \int \left\{ -\frac{\rho H}{2} K^{-2} - \frac{\rho g}{2} \left( \frac{H f^{-1}}{L_D^2 K^2 + 1} \right)^2 \right\} \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dk dl \right) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int \int -\frac{\rho H}{2} \frac{(L_D^2 K^2 + 1)^2 K^{-2} + L_D^2}{(L_D^2 K^2 + 1)^2} \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dk dl \right) dx dy.\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

これで、運動エネルギーとして使われる運動エネルギーの総和が求まった。ここでポテンシャル渦度の保存から、平衡状態において残っている渦の運動エネルギーを考え、そこから重力波のエネルギーを考える。

ポテンシャル渦度保存の式を書き換えると  $(\nabla^2 - L_D^{-2})\psi = Const.$  なので, 式 (B.15) より,

$$\psi = \int \int \frac{L_D^2}{K^2 L_D^2 + 1} \tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl. \quad (\text{B.19})$$

渦の運動エネルギーは,

$$E_{vor} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int \int -\frac{\rho H}{2} \frac{K^2 L_D^4}{(L_D^2 K^2 + 1)^2} \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dkdl \right) dx dy. \quad (\text{B.20})$$

よって, 渦の運動エネルギーの全運動エネルギーに対する比は,

$$\frac{E_{vor}}{E_k} = \int \int \frac{K^4 L_D^4}{(K^2 L_D^2 + 1)^2 + K^2 L_D^2} dkdl. \quad (\text{B.21})$$

よって, 重力波のエネルギーの全運動エネルギーに対する比は,

$$\frac{E_{grv}}{E_k} = \int \int \frac{3K^2 L_D^2 + 1}{(K^2 L_D^2 + 1)^2 + K^2 L_D^2} dkdl. \quad (\text{B.22})$$

$L_D^2 K^2 \gg 1$  のとき,  $E_{grv}/E_k$  はおよそ  $L_D^{-2}$  に比例することになる. これでは, 二次元無限領域における地衡流調節問題において, 運動エネルギーの発散成分  $E_{grv}$  と全運動エネルギー  $E_k$  の比が求められた.

今回の実験結果では, この比はおよそ  $L_D^{-3}$  に比例する結果となっており, 二次元無限領域における地衡流調節問題での値とは異なっている. これは平面と球面では状況が異なり, また自分が飛ばした重力波が惑星を 1 周してまた自分に影響をおよぼすので, これらの影響で一致していないのだと思われる.

## C ポテンシャル渦度とロスビー波の伝搬スケール

ここでは、4章において用いられているポテンシャル渦度方程式、及び赤道付近の南北に伝搬するロスビー波が減衰する長さスケールを、浅水方程式及び浅水系の渦度発散方程式から求める。

### C.1 ポテンシャル渦度方程式の導出

ここでは、浅水系の基礎方程式より、ポテンシャル渦度が満たす式を求める。まず、式(2.3)と式(2.5)より、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ を消去して、

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} - \frac{\zeta_a}{h} \left( \frac{dh}{dt} + \frac{h'}{\tau_{rad}} \right) + \mathbf{u} \nabla f &= F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}, \\ \frac{d\zeta_a}{dt} - \frac{\zeta_a}{h} \frac{dh}{dt} &= \frac{\zeta_a}{h} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \end{aligned} \quad (C.1)$$

両辺を  $h$  で割って整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{d\zeta_a}{dt} - \frac{\zeta_a}{h^2} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{\zeta_a}{h} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right), \\ \frac{dq}{dt} - \zeta_a \frac{d}{dt} \frac{1}{h} - \frac{\zeta_a}{h^2} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{h} \left( q \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{h} \left( q \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right). \end{aligned} \quad (C.2)$$

ここで、 $q = \zeta_a/h$  と置いた。これが、近似を用いない場合のポテンシャル渦度の式である。

以下では、いくつかの仮定を用いてこの式を簡略化していく。まず、浅水層の厚さ  $h$  を平均場  $H$  と擾乱場  $h'$  に分けて考えると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\zeta + f}{H + h'} = \frac{1}{H + h'} \left( \frac{\zeta + f}{H + h'} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right). \quad (C.3)$$

まず、左辺について考える。浅水層の平均厚さ  $H$  に対してその擾乱  $h'$  が小さい ( $H \gg h'$ ) とすると、式 (C.3) の左辺をテイラー展開して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\zeta + f}{H + h'} &\sim \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\zeta + f}{H} \left( 1 - \frac{h'}{H} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{H} \frac{d(\zeta + f)}{dt} - \frac{1}{H^2} \frac{d(\zeta + f)h'}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ここで、 $fr^2 \ll Ro \ll 1$  より準地衡流平衡近似が成り立つので、式 (2.1) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \times \mathbf{u} &\sim -g\nabla h, \\ h' &\sim \frac{f}{g}\psi. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

これを式 (C.4) に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\zeta + f}{H + h'} &\sim \frac{1}{H} \frac{d(\zeta + f)}{dt} - \frac{1}{gH^2} \frac{d(\zeta + f)f\psi}{dt} \\ &= \frac{1}{H} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{1}{H} \mathbf{u} \cdot \nabla f - \frac{1}{gH^2} \frac{d(\zeta + f)f\psi}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$Ro \ll 1$  より  $f \gg \zeta$  なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\zeta + f}{H + h'} &\sim \frac{1}{H} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{1}{H} \mathbf{u} \cdot \nabla f - \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \frac{f^2\psi}{gH} \\ &= \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left( \nabla^2 - \frac{f^2}{gH} \right) \psi + \frac{1}{H} \mathbf{u} \cdot \nabla f. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

次に式 (C.3) の右辺について考える。浅水層の平均厚さ  $H$  に対してその擾乱  $h'$  が小さい ( $H \gg h'$ ) とすると、

$$\frac{1}{H + h'} \left( \frac{\zeta + f}{H + h'} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right) \sim \frac{1}{H} \left( \frac{\zeta + f}{H} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right). \quad (\text{C.8})$$

$fr^2 \ll Ro \ll 1$  より準地衡流平衡近似が成り立つので,

$$\frac{1}{H+h'} \left( \frac{\zeta+f}{H+h'} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right) \sim \frac{1}{H} \left( \frac{(\zeta+f)f}{gH} \frac{\psi}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right). \quad (C.9)$$

$Ro \ll 1$  より  $f \gg \zeta$  なので,

$$\frac{1}{H+h'} \left( \frac{\zeta+f}{H+h'} \frac{h'}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right) \sim \frac{1}{H} \left( \frac{f^2}{gH} \frac{\psi}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right). \quad (C.10)$$

式 (C.4), 式 (C.7) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left( \nabla^2 - \frac{f^2}{gH} \right) \psi + \frac{1}{H} \mathbf{u} \cdot \nabla f &\sim \frac{1}{H} \left( \frac{f^2}{gH} \frac{\psi}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}} \right), \\ \frac{d}{dt} \left( \nabla^2 - \frac{f^2}{gH} \right) \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla f &\sim \frac{f^2}{gH} \frac{\psi}{\tau_{rad}} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}, \\ \frac{d}{dt} (\nabla^2 - L_D^{-2} \sin^2 \phi) \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla f &\sim \frac{\psi \sin^2 \phi}{\tau_{rad} L_D^2} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \end{aligned} \quad (C.11)$$

ここで,  $L_D = \frac{\sqrt{gh}}{2\Omega}$  とおいた. ここで  $f$  面を考え  $\nabla f = 0$  とすると,

$$\frac{d}{dt} (\nabla^2 - L_D^{-2} \sin^2 \phi) \psi \sim \frac{\psi \sin^2 \phi}{\tau_{rad} L_D^2} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \quad (C.12)$$

$q_r = (\nabla^2 - L_D^{-2} \sin^2 \phi) \psi$  を代入して,

$$\frac{dq_r}{dt} \sim \frac{\psi \sin^2 \phi}{\tau_{rad} L_D^2} + F - \frac{\zeta}{\tau_{fr}}. \quad (C.13)$$

これで, 本論文中に用いられているロスビーのポテンシャル渦度方程式が導かれた.

## C.2 ロスビー波の減衰する長さスケール

本計算によって得られた結果では, 赤道ジェットの緯度幅は度で表すとおよそ  $56(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}$ , ラジアンに直すとおよそ  $1(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}$  という値が得られた. この  $\tau_{rad}L_D^2$  に対する  $1/4$  乗の依存性をポテンシャル渦度方程式から導く.

まず, 本計算においては摩擦の効果を無視している. よって式 (C.13) より,

$$\frac{dq_r}{dt} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2} + F. \quad (C.14)$$

この方程式から依存性を導いていく. まず, 各項の空間スケールを考える. ジェットの幅はおよそ 0.5 惑星半径程度, 対して強制のスケールは 0.1 惑星半径程度である. よって大スケールにおいては強制項を無視して考える. 大スケールにおいては移流項が無視できると考えると, このとき, およそ以下のバランスが成り立っているはずである.

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}. \quad (C.15)$$

また, 赤道付近を考えると  $L_D$  は渦の水平スケールより大きいいため,  $q_r \sim \zeta = \nabla^2\psi$  とすると, 以下のようなになる.

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}. \quad (C.16)$$

これが, 大スケールにおける釣り合いを表す微分方程式である. 3.2.1 節の結果より, 本計算においてはロスビー波が卓越すると考えられるため, ここではロスビー波による影響を考えるため,  $\psi$  は南北方向に伝搬するロスビー波のとして以下のように表されると仮定する.

$$\psi \sim A \exp(i(l y + \omega t)). \quad (C.17)$$

ここで,  $l$  は複素数であり,  $l_r = \text{Re}[l]$ ,  $l_i = \text{Im}[l]$  とすると,

$$\psi \sim A \exp(-l_i y) \exp(i(l_r y + \omega t)) \quad (\text{C.18})$$

となり, 減衰する長さスケールが  $l_i^{-1}$  である減衰振動の形をしている.

式 (C.17) を式 (C.16) に代入して,

$$-i\omega l^2 \psi \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}, \quad (\text{C.19})$$

$$l \sim \sqrt{\frac{i}{\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}}. \quad (\text{C.20})$$

$l$  を実数部  $l_r$  と虚数部  $l_i$  に分けると,

$$l_r \sim \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}}, \quad (\text{C.21})$$

$$l_i \sim \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}}. \quad (\text{C.22})$$

以下では  $\psi$  の減衰する長さスケール  $l_i^{-1}$  のみを考える. ジェットは赤道付近にあるため,  $\sin\theta \sim \theta$  として,

$$l_i \sim \sqrt{\frac{\theta^2}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}} \quad (\text{C.23})$$

$$\sim \theta \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}}. \quad (\text{C.24})$$

惑星半径  $a = 1$  を用いて  $\theta = a\theta$  を考えると,  $\theta$  は長さのスケールを表す. よってこれを減衰振動の波長  $l_i^{-1}$  と等しいと考えると,

$$l_i^2 \sim \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}}, \quad (\text{C.25})$$

$$l_i^{-1} \sim (2\omega\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}. \quad (\text{C.26})$$

これで、赤道西風ジェットの幅の  $\tau_{rad}L_D^2$  に対する  $1/4$  乗の依存性が導かれた。

## D 実験図集

ここでは、実験 2 のパラメータ依存性を調べる実験における議論に関連するがスペースの都合上読みにくくなってしまったために載せなかった計算結果の図を実験ごとにまとめる。載せる図は、16 通りの実験それぞれに対して、 $u$  の分布の  $t = 10000$  におけるスナップショット (球面投影)、 $\bar{u}$  の  $t = [10000, 10010]$  における時間平均、 $\zeta$  の分布の  $t = 10000$  におけるスナップショット (球面投影)、 $\bar{q}$  の  $t = [10000, 10010]$  における時間平均、全エネルギーの時間発展、赤道での  $v$  の分布の  $t = 10000$  におけるスナップショットの 6 種類である。また、赤道ジェットが逆行している  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ 、 $L_D = 0.1$  の  $\bar{u}$  の図については、比較しやすくするために意図的に他の実験の図とスケールを同じにしてある。図の枚数が多いため、1 ページに載せる枚数を増やすために図の大きさを小さくしていることを記しておく。フルサイズの図を参照したい場合、本実験の Web ページ (<http://www.gfd-dennou.org/arch/numexp/spshallow-zd.forced/exp/pub/>) を参照のこと。

D.1  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$

D.1.1  $L_D = 1$

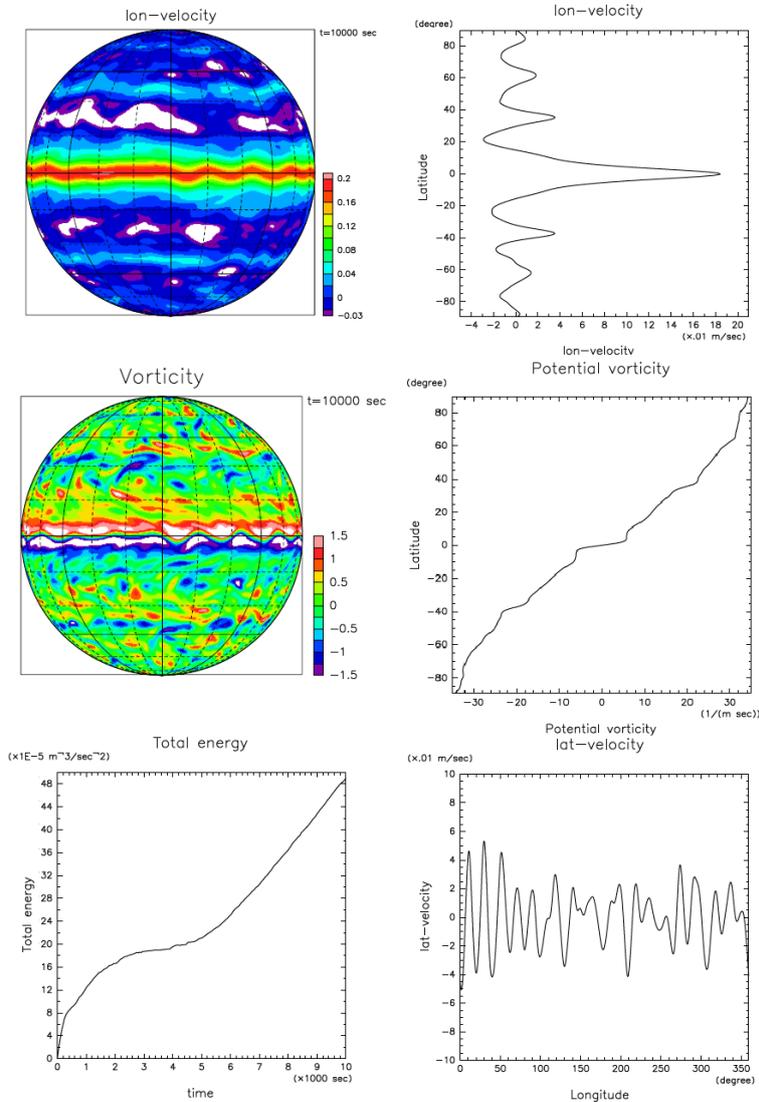


図 18:  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 1$  の場合の計算結果. 左上: 東西風速, 右上: 東西平均東西風速, 左中: 渦度, 右中: 東西平均ポテンシャル渦度, 左下: 全エネルギーの時間発展, 右下: 赤道における南北風速.

D.1.2  $L_D = 0.5$

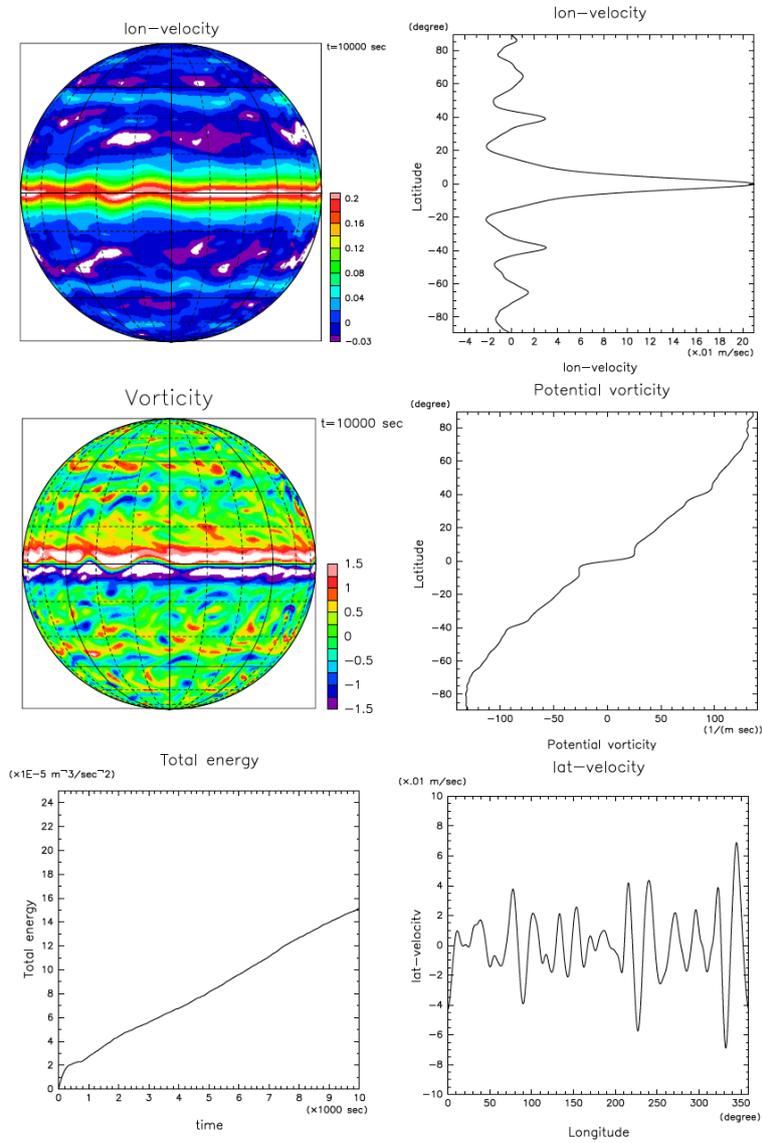


図 19: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/2 倍になっている.

D.1.3  $L_D = 0.1$

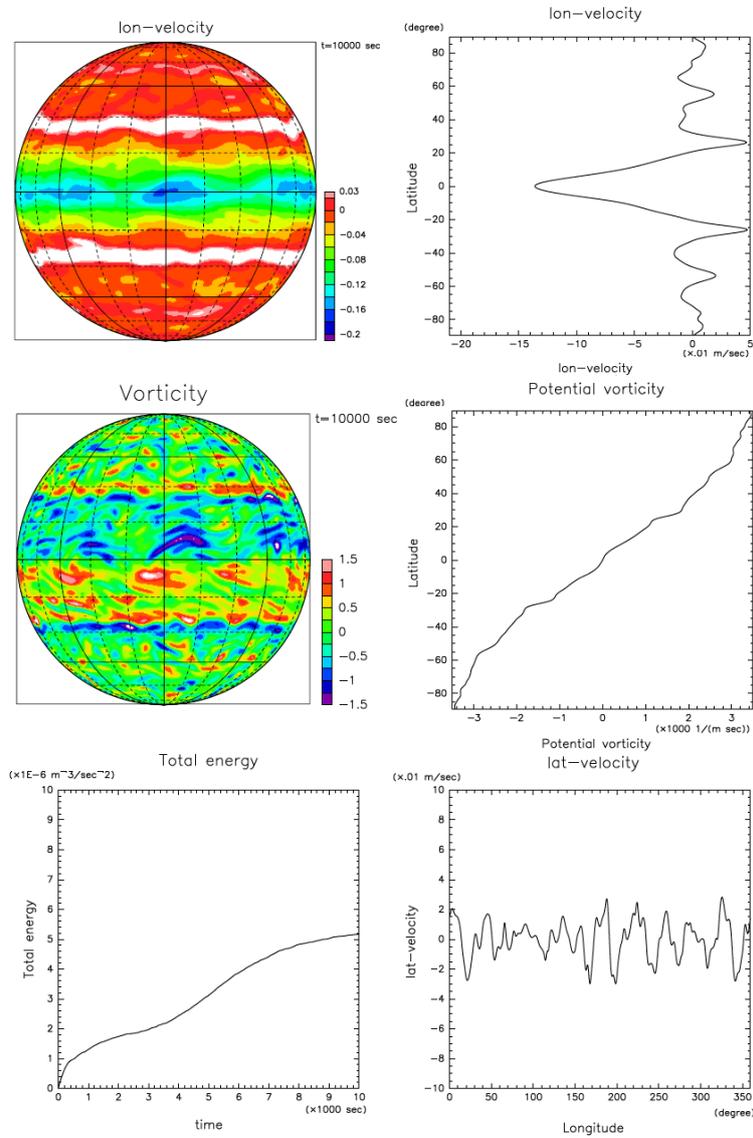


図 20: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/50 倍になっている.

D.1.4  $L_D = 0.025$

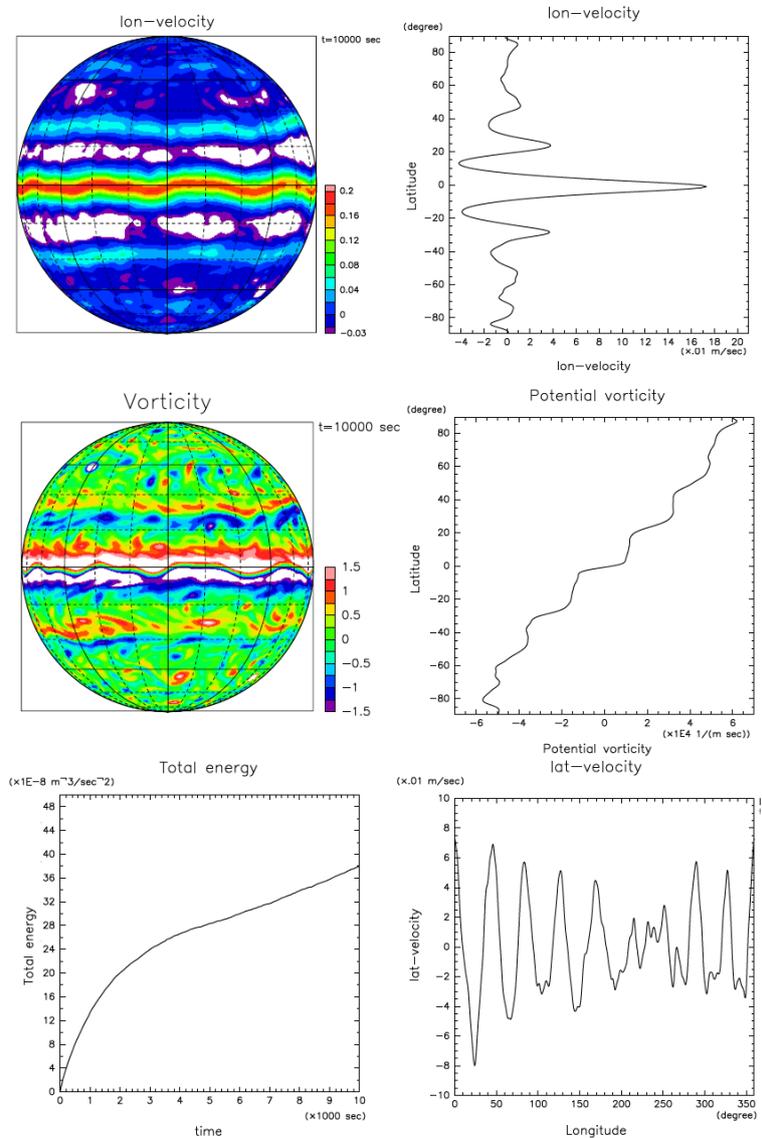


図 21: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 1$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 200 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/1000 倍になっている. また, 右上の東西平均東西風速の図の軸と左上の東西風速の図のコンターは, コンター間隔を変えずに西風の風速の最大値が図 18 の東風の風速の最大値と等しくなるように負の方向にずらしている.

D.2  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$

D.2.1  $L_D = 1$

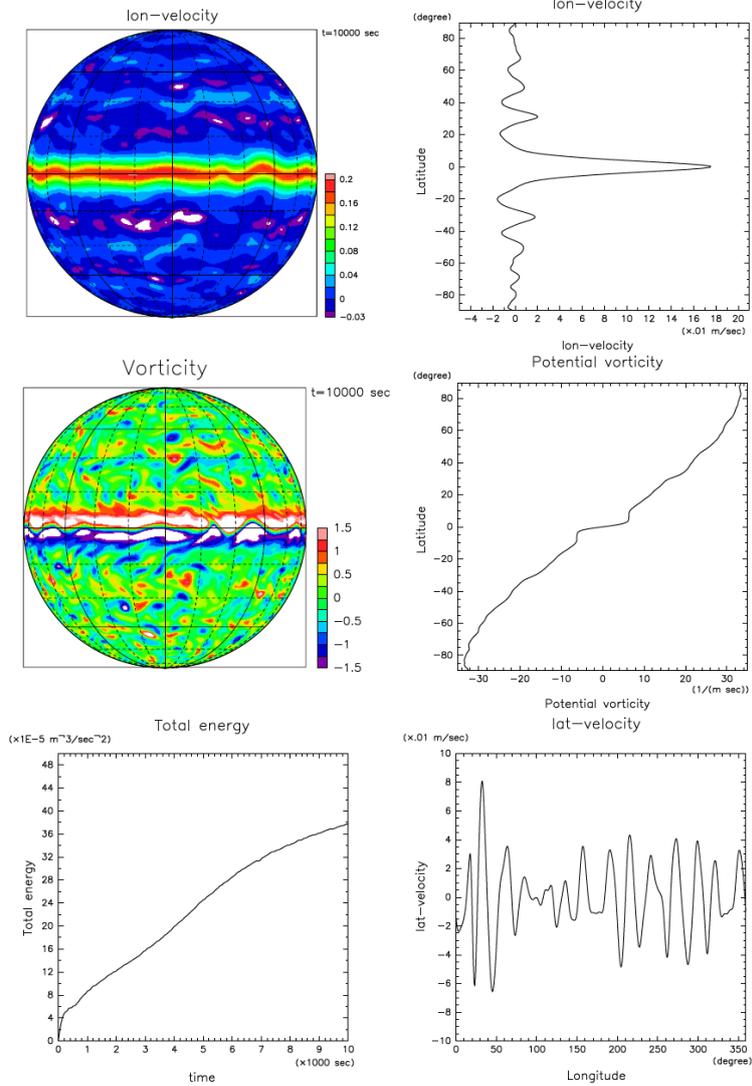


図 22: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 1$  の場合.

D.2.2  $L_D = 0.5$

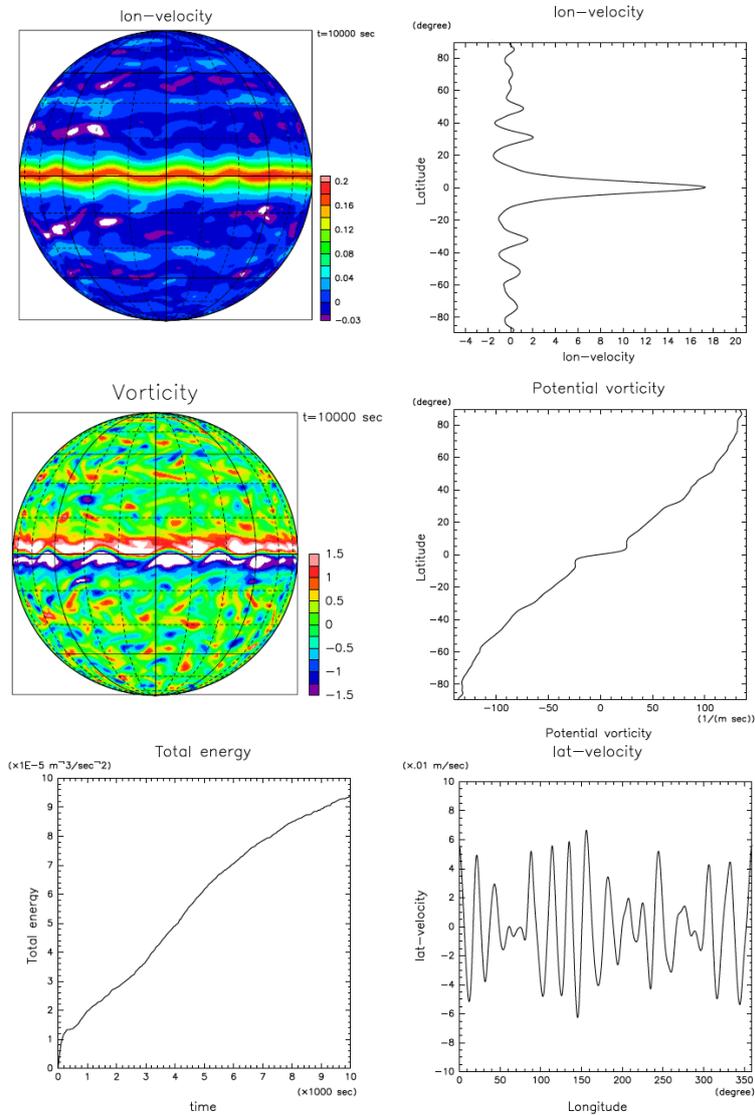


図 23: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/5 倍になっている.

D.2.3  $L_D = 0.1$

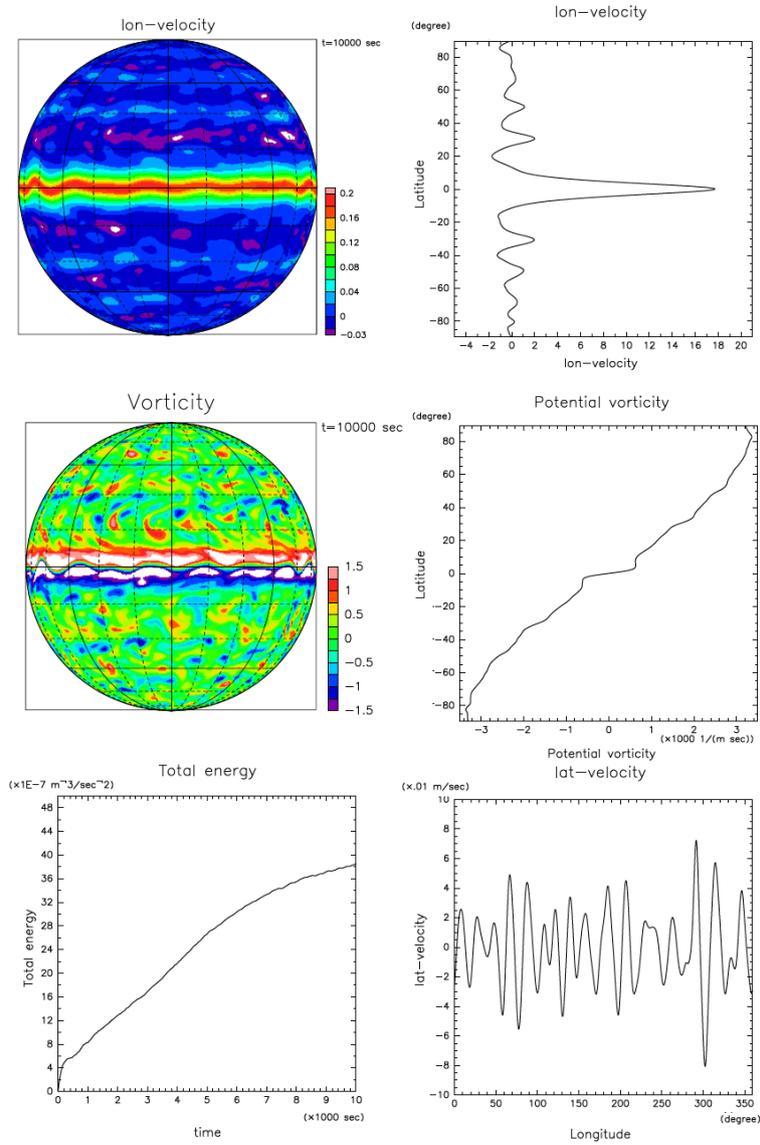


図 24: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/100 倍になっている.

D.2.4  $L_D = 0.025$

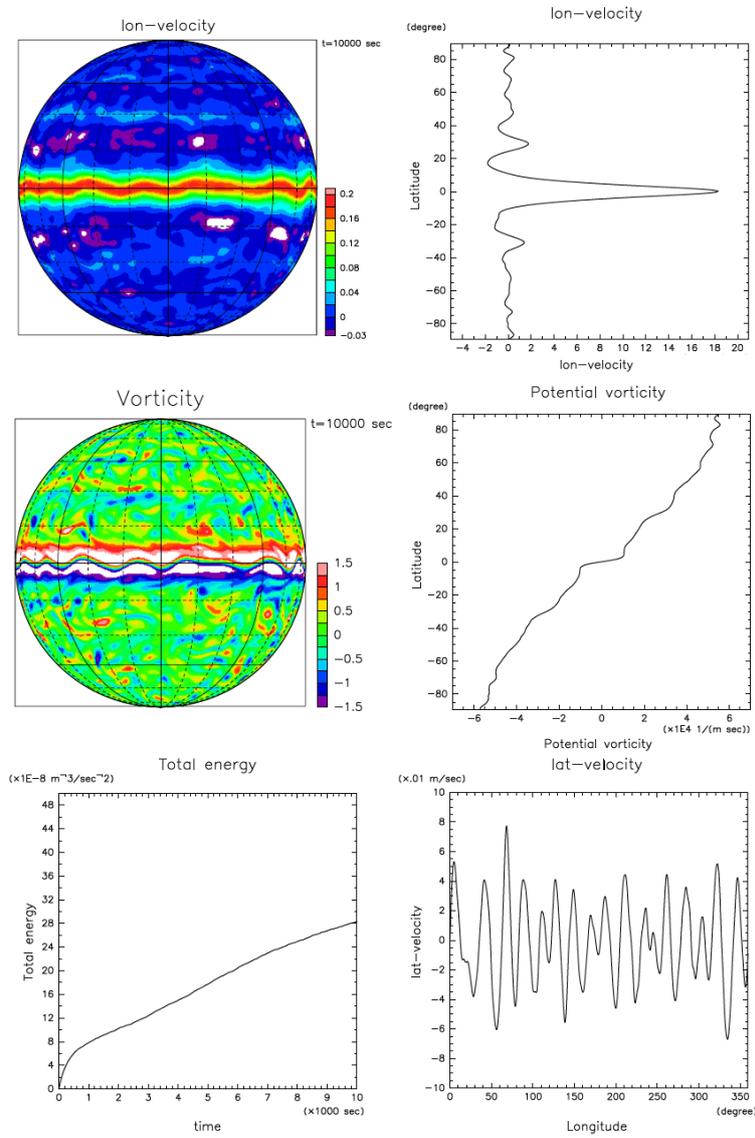


図 25: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.25$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/1000 倍になっている.

D.3  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$

D.3.1  $L_D = 1$

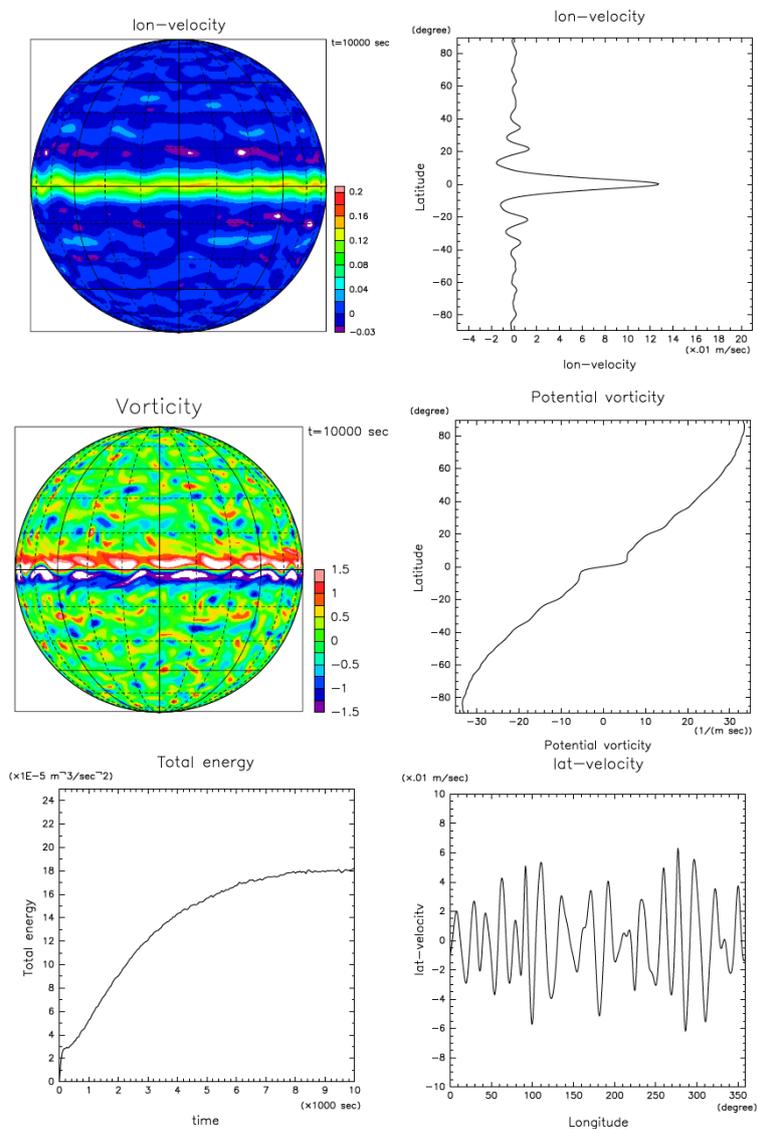


図 26: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 1$  の場合. 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは図 18 の 1/2 倍になっている.

D.3.2  $L_D = 0.5$

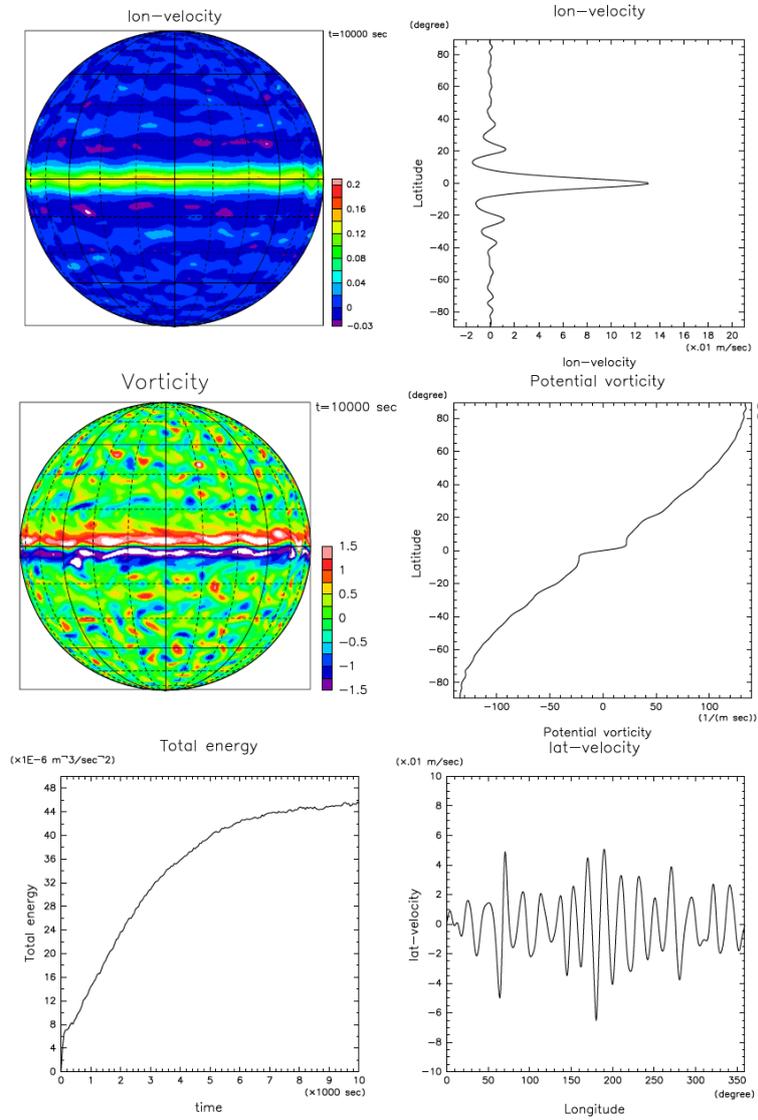


図 27: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/10 倍になっている.

D.3.3  $L_D = 0.1$

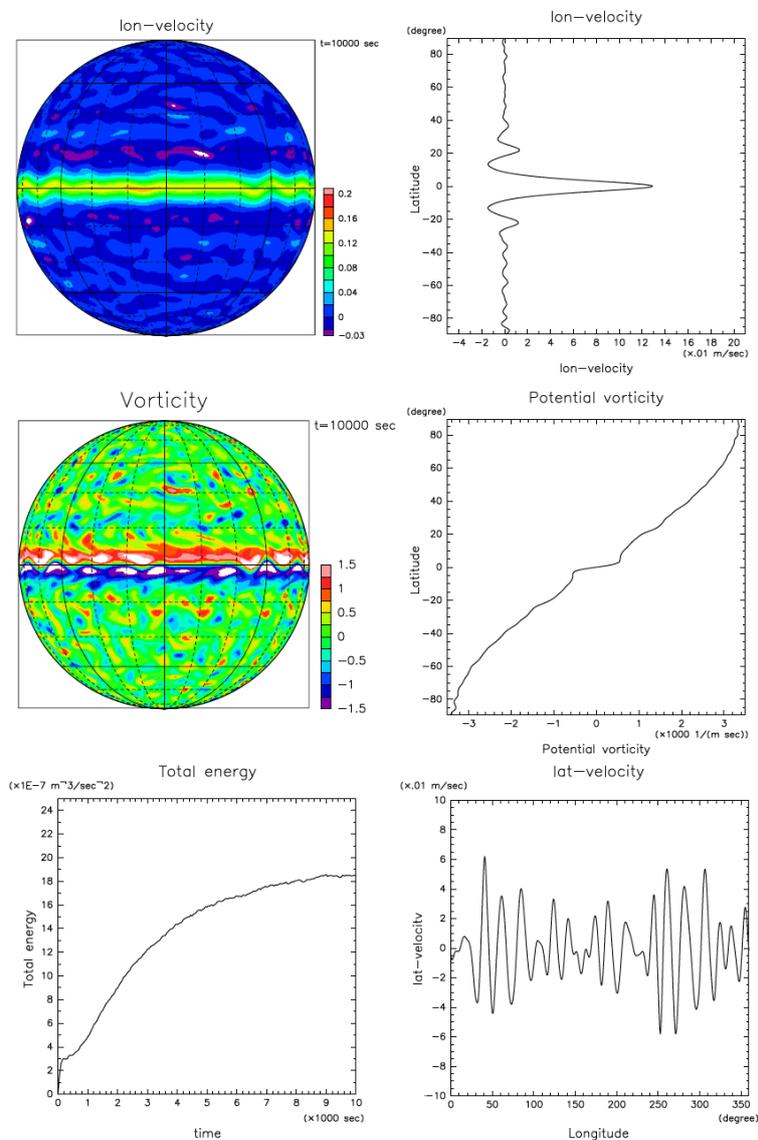


図 28: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/200 倍になっている.

D.3.4  $L_D = 0.025$

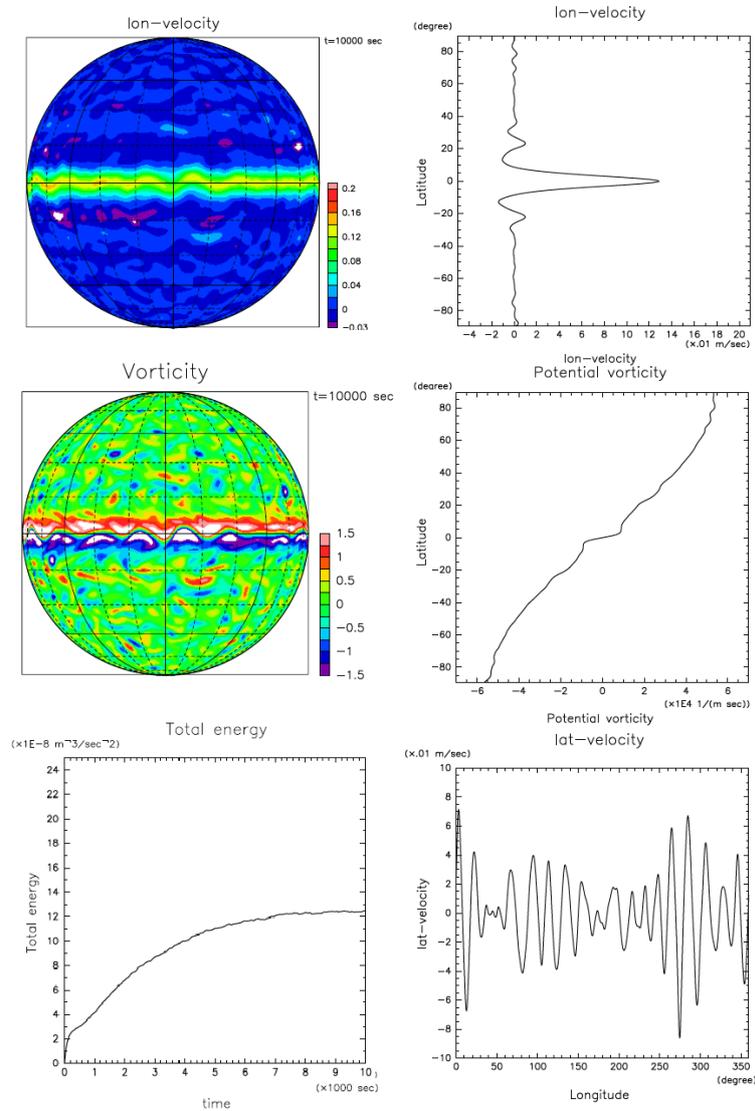


図 29: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.05$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/2000 倍になっている.

D.4  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$

D.4.1  $L_D = 1$

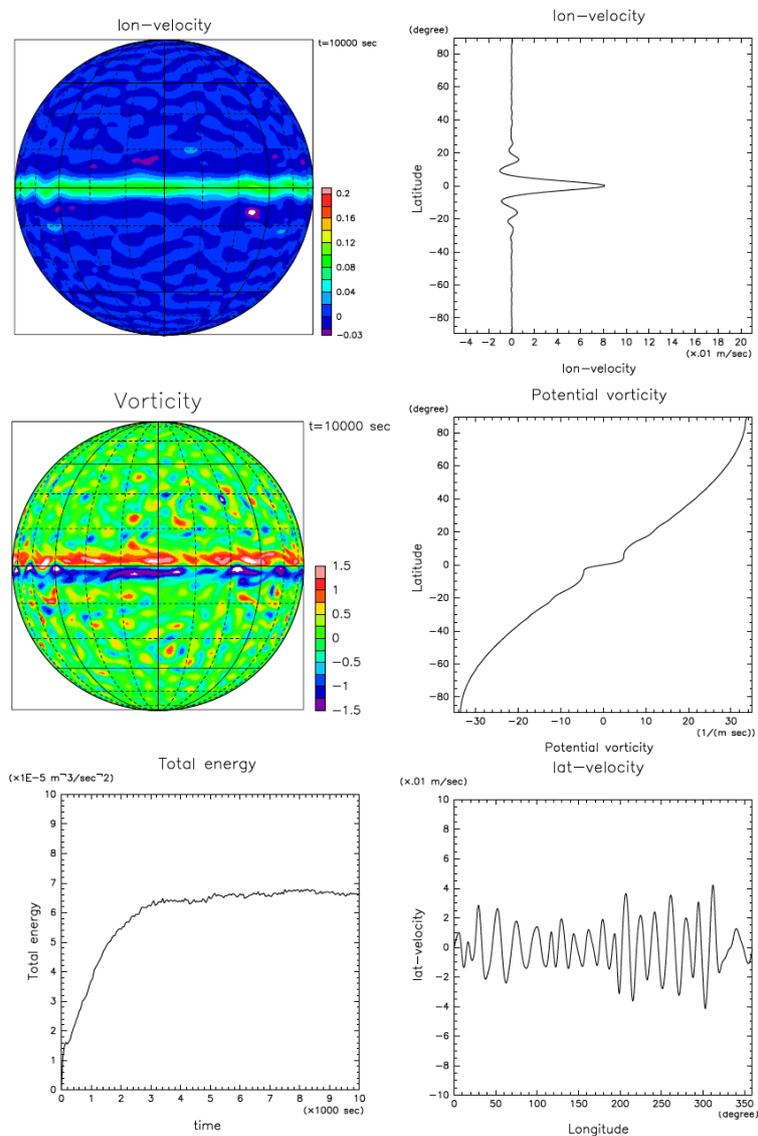


図 30: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 1$  の場合. 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは図 18 の 1/5 倍になっている.

D.4.2  $L_D = 0.5$

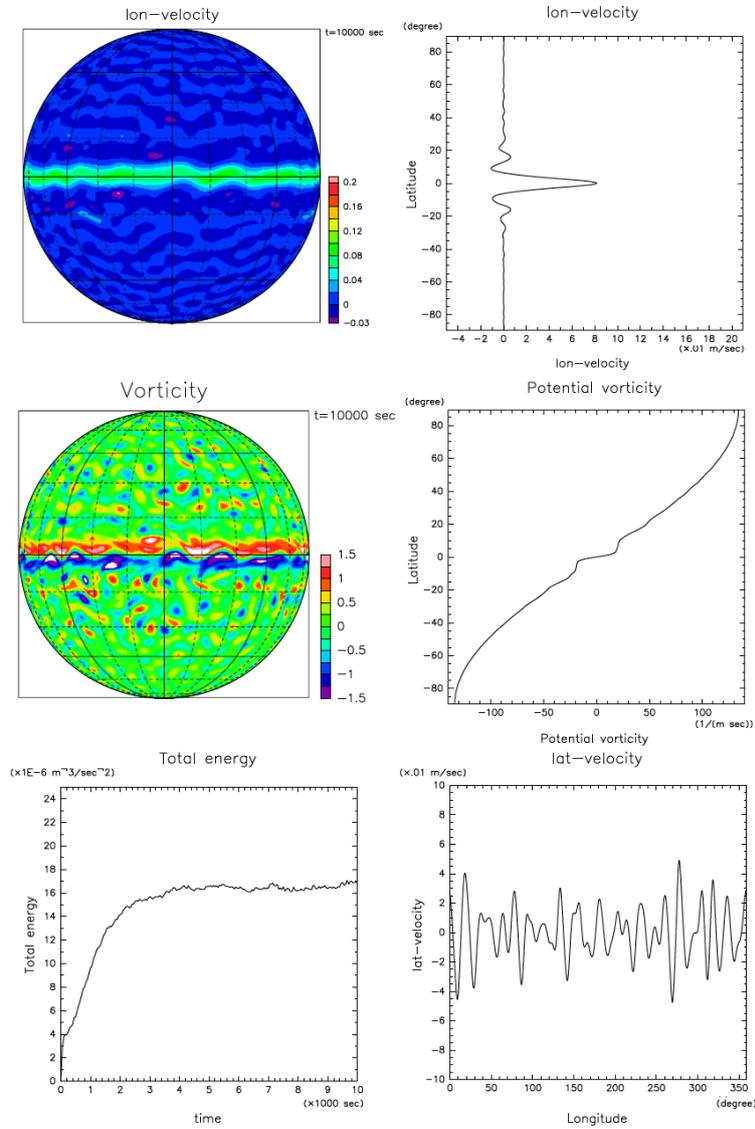


図 31: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.5$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 4 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/20 倍になっている.

D.4.3  $L_D = 0.1$

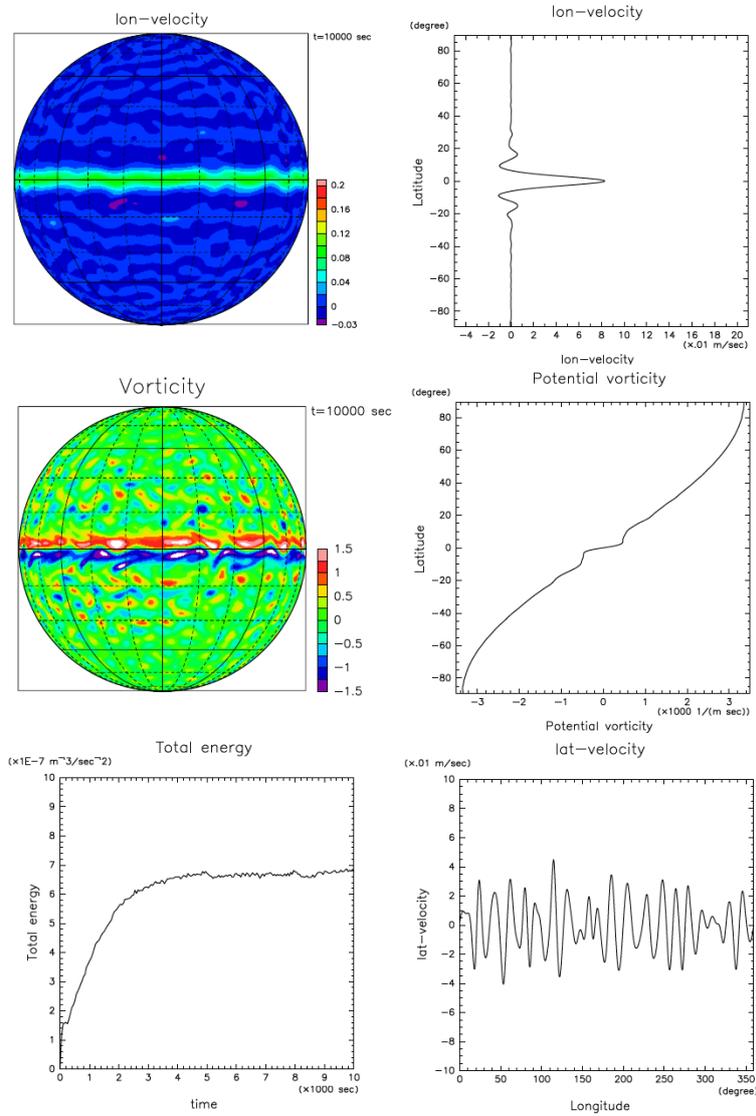


図 32: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.1$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 100 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/500 倍になっている.

D.4.4  $L_D = 0.025$

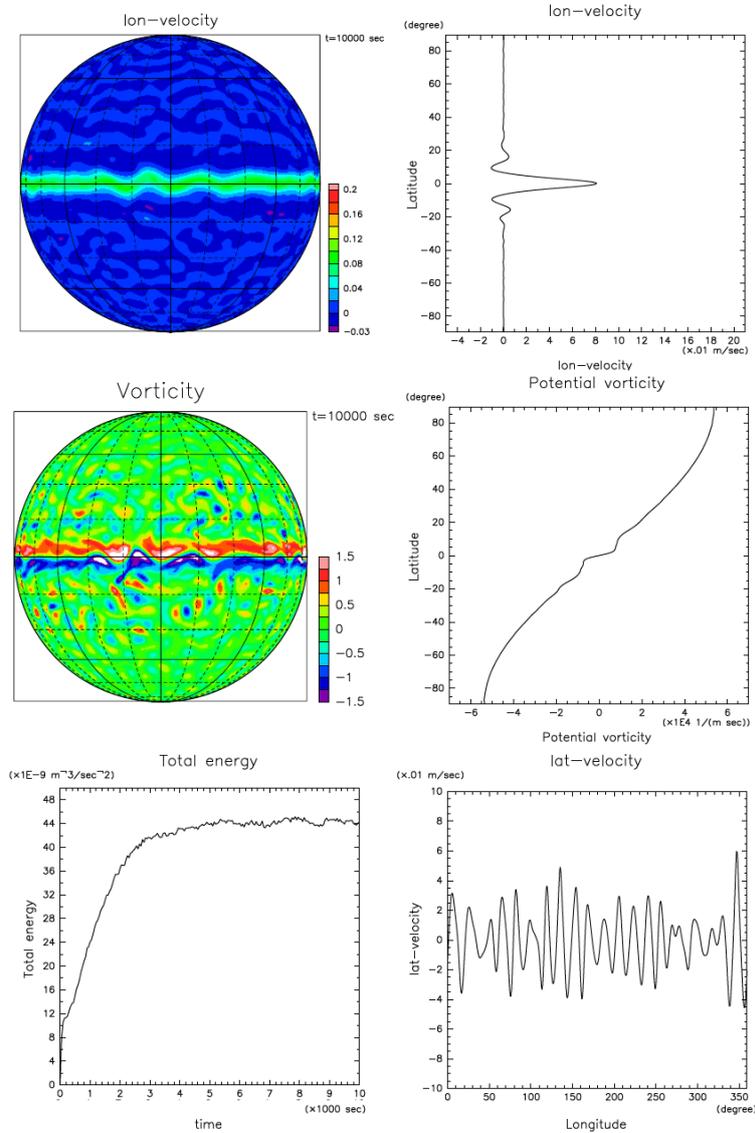


図 33: 図 18 と同様. 但し,  $\tau_{rad}L_D^2 = 0.01$ ,  $L_D = 0.025$  の場合. 右中のポテンシャル渦度の図の軸のスケールは図 18 の 2000 倍, 左下の全エネルギーの図の軸のスケールは 1/10000 倍になっている.