Bryan and Fritsch (2002) の湿潤大気モデルの基礎方程式とベンチマーク計算の概要

北海道大学理学部 地球惑星科学科
惑星宇宙グループ
地球流体力学研究室 4 年

学生番号 02121008
須藤康平

平成 28 年 2 月 22 日

要旨

数値モデルを用いたシミュレーションは惑星大気の運動を調べる方法の一つであり, 初期条件や惑星パラメータなどのモデルに与える様々な設定に応じて既知の観測結果に制限を受けず様々な惑星における大気のシミュレーションを行うことができる. 研究対象により数値モデルは使い分けられ, 地球の積雲対流といった鉛直方向の運動が卓越している場で凝結を伴う対流によって起こる気象現象を探るには, 湿潤大気非静力学モデルを用いた方法がある. 湿潤大気非静力学モデルの構成やこのモデルを用いたシミュレーションについて理解するためにベンチマークとなるモデルについて学習する. ベンチマークは他の湿潤大気非静力学モデルの性能の参照元として利用可能であり, これを構成する方程式系やベンチマークを用いたシミュレーションを学ぶことは他の湿潤大気非静力学モデルに応用が利くと考えるためである. こうした理由から, 本論文では湿潤大気非静力学モデルのベンチマークを提案した Bryan and Fritsch (2002) のレビューを行い, 湿潤大気非静力学モデルを構成する基礎方程式に加え乾燥大気モデル (Wicker and Skamarock 1998) のシミュレーション結果についてまとめ, 考察を行った.

支配方程式は運動方程式, 連続の式, 熱力学方程式, 水蒸気混合比の保存式, 雲水混合比の保存式から成る. このうち連続の式, 熱力学方程式を無次元圧力や温位の定義, 状態方程式と組み合わせてこの 2 変数の予報方程式を導出し, 実験で計算される方程式系が得られる. シミュレーションではこの方程式系を 3 次のルンゲクッタ法と 5 次の風上差分を用いて差分化し, 計算領域内の全質量と全エネルギーの計算からモデルの保存性能の評価を行いつつ計算を行う.

次に Bryan and Fritsch (2002) で行われたサーマル上昇実験の結果を見る. この実験では初期の基本場の温位を 240 K, 270 K, 300 K と変化させ, それぞれの場合でシミュレーションを行った. その結果, 温位の違いによらずサーマルの運動の様子はどの場合においてもほぼ同一となった. 温位の与え方の違いに影響を受けず, 浮力擾乱の与え方が同一ならば大気の挙動も同一となるという特徴から, ここで用いた数値モデルは初期に与える熱力学変数の影響を受けないため, 新たなモデルの定式化を検証するためのベンチマークとみなすことができると Bryan and Fritsch (2002) は主張している. どの熱力学変数を与えた場合においても初期浮力擾乱を同じように与えた場合は, 熱力学変数の影響を受けないという特徴が認められるためベンチマークといえると考えられるが, 初期浮力擾乱の与え方を変えた場合においても同様の特徴が見られるかが検証されていないため, この実験で用いたモデルがどのような条件においても参照可能なベンチマークとなっているかは疑問が残った.

本研究では乾燥大気モデルのベンチマークの特徴までを理解することができた. 今後は湿潤大気モデルのベンチマークについての理解や, 実際にモデルを用い新たな条件を加えこれらのベンチマーク計算を行うことで疑問点の解消を行っていく.

目 次

第1章　序論

1.1　数値モデルを用いた大気のシミュレーション

惑星大気の運動を調べる方法の 1 つに数値モデルを用いたシミュレーションがある. 惑星の気象現象を調べるためにこの方法を用いる利点として, 初期条件や惑星パラメータなどのモデルに与える設定を自在に変えられることが挙げられる. これにより観測から得られるデータによる制限を受けることなく, 現実世界では見られないような環境 (陸地が無く惑星表面が全て海で覆われている惑星など) におけるシミュレーションを行うこともできる.

数値モデルは研究対象とする現象に応じて用いる方程式系の構成が変わる. 例えば, 水蒸気の存在とこれによる影響を考慮するか否かにより湿潤大気モデルと乾燥大気モデルを使い分ける. また湿潤大気モデル内においても, 静力学近似を行う静力学モデルと, 静力学近似を行わない非静力学モデルとに分けることができる. 静力学近似とは圧力勾配と重力が等しいとする近似であり, 大気運動の水平スケールが鉛直スケールに対し十分大きい場合に精度よく大気の運動を捉えることができる. しかし, 計算の水平スケールが小さい場合は大気の上昇流といった鉛直方向の運動の影響が大きくなるため近似を行わないほうがよい. 静力学モデルと非静力学モデルは, これらの特徴に則り使い分ける. こうしたモデル毎の特徴の違いを理解し, 研究目標に合致する適切なモデルを選択する.

1.2　研究目的

火星などといった地球型惑星や系外惑星における地域的規模の気象現象を調べることを最終目標とする. 惑星の気象現象を調べるには探査機からもたらされたデータ解析を行う方法もあるが, この方法では観測によって得られた範囲内での結果のみに頼った議論になってしまい, 過去環境がいかなるものであったかなど与える条件を自分で変えることにより自由に気象現象を探ることができない. また, この目標を達成するためにはどの種類のモデルを用いるべきかについて考える. 気象現象

の例として, 太陽系内の地球型惑星に限っても, 地球では積雲対流により鉛直方向の運動が大きく影響する気象現象が見られ, 金星では硫酸の雲ができるなど凝結過程を含んだ気象現象が見られる. よって凝結過程を含み, 鉛直方向の運動が大きく影響する気象現象を調べるためには, 湿潤大気非静力学モデルを用いるのが適当であると考える.

湿潤大気非静力学モデルについて理解を深めるため, 本論文では Bryan, G. H., and J. M. Fritsch, 2002: A Benchmark Simulation for Moist Nonhydrostatic Numerical Models をレビューする. Bryan and Fritsch (2002) はこれまでの諸研究で提示されてきた大気モデルを踏まえて, 湿潤過程を含んだ計算としては初めてのベンチマークとなることができる信頼性の高い湿潤大気非静力学モデルを紹介している. これをレビューすることで湿潤大気モデルを構成する理論やベンチマーク計算について学ぶ.

1.3　本論文の構成

本論文では湿潤大気モデルの基礎方程式と乾燥大気におけるシミュレーションについてまとめ, 湿潤大気におけるシミュレーションは扱わない. 構成としては第 2 章において湿潤大気モデルを構成する基礎方程式について, 第 3 章において乾燥大気におけるシミュレーション結果を通してベンチマークとなりうるモデル設計について述べ, 第 4 章で本研究のまとめとこれからの展望を述べる.

第2章　湿潤大気モデルの基礎方程式

本章では Bryan and Fritsch (2002) の湿潤大気モデルを構成している基礎方程式を示し説明を行う. なお, 支配方程式と無次元量の予報方程式の導出は付録 B にまとめる.

2.1　仮定と支配方程式

3 次元の直交座標系をとり, 以下の過程が無視されるという仮定が用いられている. その過程とは降水, 氷相での物理過程, コリオリ力, サブグリッドスケールにおける乱流である. この仮定の下で, 湿潤大気モデルの支配方程式は以下のようになる. ただし式 (3) の左辺では, 水滴の温度は常に気温に等しいという仮定を, 右辺では乾燥大気と湿潤大気の密度差を考慮しないとする仮定を用いている.

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_a(1+r_t)}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3}g, \tag{1}$$

$$\frac{D\rho_a}{Dt} = -\rho_a\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$$c_{vml}\frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{\rho_a}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (L_v - R_v T)\frac{Dr_v}{Dt}, \tag{3}$$

$$\frac{Dr_v}{Dt} = -\dot{r}_{cond}, \tag{4}$$

$$\frac{Dr_c}{Dt} = \dot{r}_{cond}, \tag{5}$$

なお,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

である. 式 (1) - (5) はそれぞれ運動方程式, 連続の式, 熱力学方程式, 水蒸気混合比の保存式, 雲水混合比の保存式を表す.

本論文ではアインシュタインの規約を用いている. 式 (1) では下付き添字 $i = 1, 2, 3$ がそれぞれ x, y, z 方向を示す．また, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．記号

$\rho_a, p, T, r_v, r_c, r_t$ はそれぞれ, 乾燥大気の密度, 圧力, 温度, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 全水混合比を表す.

2.2　圧力方程式と無次元圧力・温位を予報変数とする式

無次元圧力 π と温位 θ を以下のように定義する.

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\frac{R}{c_p}}, \tag{6}$$

$$\theta \equiv \frac{T}{\pi}. \tag{7}$$

ただし p_{00} は基本場の圧力を表し, p_{00} = 1000 mb である. 熱力学方程式 (3) では湿潤大気と乾燥大気の密度差を考慮しないことから, この系では大気の熱エネルギーは乾燥大気の熱エネルギーで決まることになるため, 断熱変化する際に θ は保存される. 保存量を予報変数とする予報方程式を解くことで時間発展を簡単に計算することができるため, 今回のシミュレーション計算に用いる数値モデルでは, 式 (3) の代わりに θ を予報変数とする式を用いる. また, π は大気の振舞いに直接影響する. 式 (6) から, もし圧力 p が一定の場合でも p_{00} の与え方によっては π が変動し大気の振舞いは変化してしまうものの, π が一定となる場合は大気の振舞いは変化しない. こうした理由から, 今回のシミュレーション計算に用いる数値モデルでは, 無次元圧力 π と温位 θ を予報変数とする予報方程式を用いる. π と θ の予報方程式の導出には, 状態方程式

$$p = \rho_a RT(1 + r_v/\epsilon) \tag{8}$$

を用いる. 状態方程式と式 (2), (3) から圧力の予報方程式

$$\frac{D\mathrm{lnp}}{Dt} = -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v c_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \tag{9}$$

が得られ, これと式 (6), (7) を用いて π と θ の予報方程式

$$\frac{D\mathrm{ln}\pi}{Dt} = -\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v c_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \tag{10}$$

$$\frac{D\mathrm{ln}\theta}{Dt} = -\left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{Rc_{pml}}{c_p c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left[\frac{c_v L_v}{c_{vml}c_p T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R_v c_{pml}}{c_p R_m}\right)\right]\frac{Dr_v}{Dt}. \tag{11}$$

を導くことができる.

式 (11) の熱力学方程式は多くの数値モデルとは異なり, 水蒸気と液体の水の比熱を区別する. これは, 全エネルギーの正確な保存のためには 2 つの比熱の区別を区別し, 相変化の影響を考慮することが不可欠なためである.

2.3　式の離散化と数値計算の方法

Bryan and Fritsch (2002) で計算したシミュレーションでは, 移流項に対し 3 次のルンゲクッタ法と 5 次の風上差分を用いて差分化を行った. シミュレーションで実際に解かれる式は付録 C に示す. 相変化を考慮するため, 相変化の取り扱い方が異なる力学過程と微物理過程の 2 つの過程で時間発展する飽和調整法を用いる.

力学過程

方程式系の全項において相変化を無視し計算する.

微物理過程

相変化を含む項においてのみ適用され, 相変化に伴う気圧の時間変化を含む.

気圧変化が飽和水蒸気圧に影響を与えるため, 凝結過程を計算するためには反復法を用いなければならない. この反復法において, 実際に解かれる式は $\dot{r}_{cond}$ の推定値を用いて積分される. このとき θ と π の新たな値が飽和混合比 (r_{vs}) の新たな値を計算するのに用いられ, この r_{vs} 値を用いて $\dot{r}_{cond}$ の次の推定値を計算する. この過程は θ の最新値が (計算機の計算精度の範囲内において) 直前の値に収束するまで繰り返される. 反復のそれぞれにおいて, $\dot{r}_{cond}$ の値は 以下の式から定義される.

$$\dot{r}_{cond} \equiv \frac{r_v - r_{vs}}{\Delta t\left(1 + \frac{L_v^2 r_{vs}}{c_p R_v T^2}\right)}. \tag{18}$$

ここで, Δt は時間刻みである. この一連の計算は通常, 4 回から 6 回の反復で収束する.

数値モデルの質量およびエネルギーを保存する性能は, モデルの計算領域内における全質量 ρ_t と全エネルギー E_t を計算することで評価される. ここで,

$$\rho_t \equiv \rho_a(1 + r_c), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} E_t \equiv \rho_a[&c_v T + c_{vv} r_v T + c_{pv} r_l T - L_v r_l \\ &+ (1 + r_t)\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + (1 + r_l) g z]. \end{aligned} \tag{20}$$

乾燥大気の密度 ρ_a は状態方程式 (8) を用いて決められる. ここで用いられる全エネルギーの定義は, 内部エネルギー, 位置エネルギー, 運動エネルギー, 潜熱エネルギーの和である. この全エネルギーは, 他の研究で用いられているものとは湿潤過程の影響を説明するのに必要となる潜熱エネルギーを含んでいる点で異なる. 境界を横切る流れが無く, また質量や運動量, エネルギーの外部からの供給が無いとするシミュレーションでは, 領域内の ρ_t と E_t の総和は理論上常に保存される. これらの数値計算の方法およびモデル性能の評価法を用い, シミュレーション計算を行う.

第3章　乾燥大気シミュレーションのベンチマーク

3.1　乾燥大気シミュレーションの設定

乾燥大気シミュレーションでの参照元を Wicker and Skamarock (1998) にて示された数値モデルとする. Wicker and Skamarock (1998) で行われたシミュレーションはサーマル上昇実験であり, 以下では設定に則り追試験を行うことで数値モデルがベンチマークとなるかを確認する.

実験の設定は以下のようにする.

計算領域

鉛直 10 km, 水平 20 km の 2 次元領域をとり, 境界は四方とも剛体壁.

初期条件

無風で, 静水圧平衡が成り立ち中立安定. 240 K, 270 K,300 K の等温位大気で定められる. ただし計算領域の中心に正の温位偏差を与える. また地表面気圧は 1000 mb, 鉛直方向の圧力場は静水圧平衡の式を積分し得られる.

正の温位偏差の位置

計算領域の中心に位置する. これは

$$\theta' = 2\cos^2\left(\frac{\pi \mathrm{L}}{2}\right)$$

で定められる. ただし,

$$L = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2}$$

で, x_c = 10.0 km, z_c = 2.0 km, x_r = z_r = 2.0 km.

仮定

粘性拡散や数値拡散は適用されない.

計算設定

空間格子間隔を 100 m として 1000 秒間の積分を行う.

3.2　計算結果と考察

初期の基本場の温位を 300 K とする場合のシミュレーション結果を図 1 に示す. Wicker and Skamarock (1998) での結果と同様に, サーマルは時間と共に上昇し拡大した. サーマルの横側に 2 つの回転する流れが発達し, その一方でサーマルの上部は拡大した. また θ の大きな勾配がサーマルの中央部に発達する (すなわち, 2 つの回転する流れの間にアーチ状の構造が作られる).

またこのベンチマーク計算設定中の初期の基本場の温度を変更した場合についても計算を行った. 例として, 初期の基本場の温位に 240 K と 270 K を用いたシミュレーションの結果を図 2 に示す.

全ての場合において, 初期の浮力擾乱は同一である. ここで乾燥大気の場合における浮力の定義は

$$B = g\frac{\theta'}{\theta_0} \tag{21}$$

とする. 初期の基本場の温位に 300 K を用いたシミュレーションと 240 K および 270 K を用いたシミュレーションの双方において初期の浮力分布を同じにするため, 初期の温位偏差を

$$\theta' = \theta_0 \frac{\theta'|_{300}}{300\mathrm{K}} \tag{22}$$

と与える. ここで, θ_0 は新たな計算での温位の参照値であり, また $\theta'|_{300}$ は 式 (30) から得られる 300 K でのシミュレーションの擾乱の温位場である. 図 2 に示される結果は 300 K でのシミュレーションとよく似ている.

図 1 と 図 2 の結果から, 同じ初期温位擾乱を用いるとき, シミュレーション結果は基本場の温位の値にあまり依存せず, どれも似たものとなるとわかる.

Bryan and Fritsch (2002) では, 初期の基本場の温位値に依存せず同一の構造を示すという特徴から, このモデルは新たなモデルの定式化を検証するためのベンチマークとして用いることができると主張している. 私の意見としては, 確かにこのモデルは大気の挙動に大きく影響を及ぼす熱力学変数の影響を除外できているが, 今回用いたものとは異なる初期浮力擾乱を与えた場合にも, 同様に熱力学変数の影響を受けないかどうかを確かめた上でベンチマークかどうかを判断すべきではないかと考える.

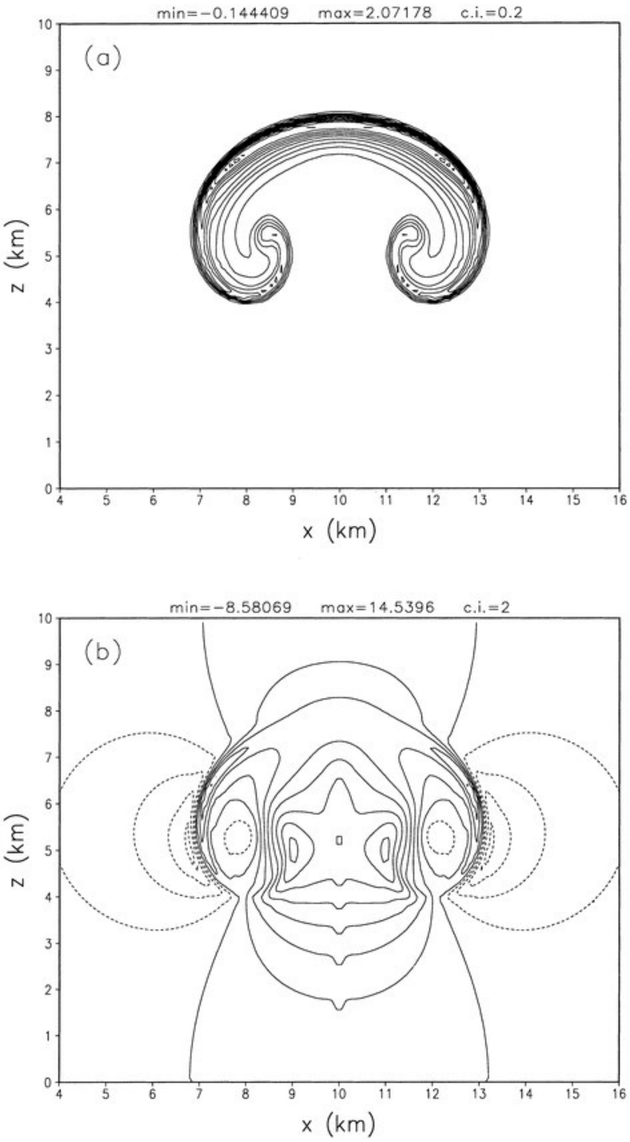
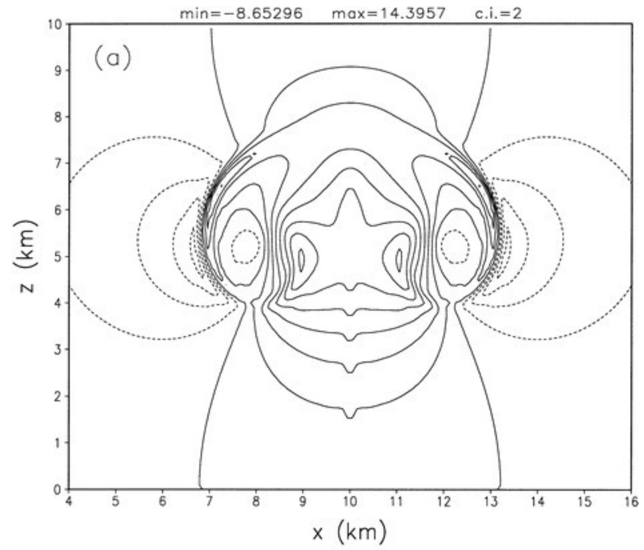


図 1. θ_0 = 300 K とした場合の乾燥大気におけるシミュレーション結果. (a) 温位偏差 θ'. 等値線間隔は 0.2 K で, $\theta' = 0$ の等値線は省略している. (b) 鉛直速度. 等値線間隔は 2 ms^{-1} で, 破線は負の値を示す.



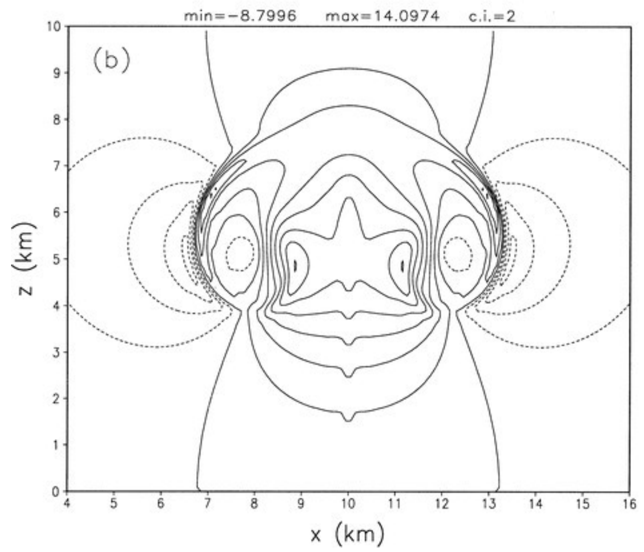


図 2. 乾燥大気におけるシミュレーションの鉛直速度. (a) θ_0 = 270 K の場合, (b) θ_0 = 240 K の場合. 等値線間隔は 2 ms^{-1} で, 破線は負の値を示す.

第4章　まとめと今後の展望

4.1　まとめ

湿潤大気非静力学モデルの構成を調べるために Bryan and Fritsch (2002) のレビューを行った結果, 以下のような知見が得られた.

Bryan and Fritsch (2002) が示す湿潤大気非静力学モデルは降水過程などを無視し, 無次元圧力と温位を予報変数という式を用いた基礎方程式をもつ. この方程式系を 3 次のルンゲクッタ法や 5 次の風上差分を用いて差分化を行い, 全質量と全エネルギーの保存性から評価を行いつつ飽和調節法を用いて計算を行う. また乾燥大気におけるシミュレーションにおいて, 他の数値モデルの参照元となることが可能なベンチマークとなるには, 初期の熱力学変数値の与え方に依らず, 初期浮力擾乱が同じ場合はほぼ同一の構造をもつという特徴を示すことが必要となる.

これらは他のモデル構成を考える際やシミュレーションを行う際に有用であると思われるが, 一方で乾燥大気におけるシミュレーションでは初期浮力擾乱の与え方の違いにより結果がどう変わるかの記載が無いため, 自分で乾燥大気におけるシミュレーションの追試を行い, この点について確かめる必要があると思われる.

4.2　今後の展望

本研究により湿潤大気非静力学モデルがどのような基礎方程式により構成されているのか, また乾燥大気におけるシミュレーションの場合において, 数値モデルのベンチマークとなるにはどのような特徴を持つ必要があるかを理解することができた. しかし, 本研究では Bryan and Fritsch (2002) にて示された湿潤大気モデルを用いたシミュレーションの内容まで踏み込むことはできなかった. 今後は上に挙げた疑問点を解消するため乾燥大気におけるシミュレーションを行うほか, 湿潤大気におけるシミュレーションについても理解を深め, 湿潤大気非静力学モデルを用いて惑星の気候を調べる実験を行いたい.

また乾燥大気モデルを用いる際は, 本論文で示した乾燥大気モデルのベンチマーク結果と比較しその性能を確認することで, 本研究で得た知見を活かしていきたい.

第5章　参考文献

Bannon, P. R., 2002: Theoretical foundations for models of moist convection. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 1967-1982.

Bryan, G. H., and J. M. Fritsch, 2002: A Benchimark Simulation for Moist Nonhydrostatic Numerical Model. *Mon. Wea. Rev.*, **130,** 2917-2928.

Wicker, L. J., and W. C. Skamarock, 1998: A time-splitting scheme for the elastic equations incorporating second-order Runge-Kutta time differencing . *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 1992-1999.

杉山耕一朗, 小高正嗣, 山下達也, 中島健介, 林祥介, deepconv 開発グループ, 2013: 非静力学モデル deepconv の定式化, http://www.gfd-dennon.org/library/deepconv/, 地球流体電脳倶楽部

水野量, 2000: 応用気象学シリーズ 3 雲と雨の気象学, 朝倉書店, 196pp.

付 録A　Bryan and Fritsch (2002) の全文訳

要旨

湿潤大気非静力学モデルの定式化とその定式化に用いた仮定の正確さや効率性, 性能の検証に役立つベンチマーク解を. このベンチマーク解を得るのに, ベンチマークのために設計されたモデル計算と初期条件を用いた. このモデル設定には, 可逆的な相変化と降水の無視が含まれる. また, 初期条件として中立安定な基本場と, 非線形的に発達する乾燥サーマルの検証に用いられるものと同一の初期浮力擾乱を与える. 湿潤条件でのシミュレーション結果に見られるいくつかの性質は, 乾燥条件でのシミュレーションに見られるものとよく似ている. この似通った結果と, 質量およびエネルギーの誤差が許容範囲内であったことから, 本論文で提示する新たな湿潤シミュレーションの設計は湿潤大気モデルの定式化の評価を行うベンチマークとして使用できるといえる.

このベンチマーク計算の有用性は, 過去の論文に見られる近似形の方程式系を用いた場合によく示される. 近似形の方程式系を用いた場合の結果は数値モデルの定式化を行うにあたりいくつかの示唆を与える. 例えば, 質量とエネルギーの両方を保存する方程式系は, ベンチマーク解を得るのに重要であることが示される. さらに, 数値モデルの質量を保存させるようなに努力を払ったとしても, エネルギーが保存されない限り, 計算結果に目に見えるほどの改善をもたらさないことが示唆される.

1.1　研究背景

数値モデルの性能を評価する方法は数多くある. 例えば, 観測された気象現象をモデルが無理なく再現できるかどうかで評価することができる. また, 研究対象となる現象の特徴や時間発展をそのモデルが実際に作り出せるかによっても評価される. 例として, 雲モデルは雲の細部を合理的に予報できるか, 大気境界層を研究する

よう設計されたモデルは境界層の統計的性質を正確に再現できるか等によってである.

数値モデルを評価するのに最も強力な方法は, 力学的解析により求められる既知の結果, または特定の条件下で収束するベンチマーク解と比較することである. 一般に使われるベンチマーク解の例には, 山岳波 (Clark 1977; Dudhia 1993), 内部重力波 (Skamarock and Klemp 1994), 非線形に成長する冷気塊と密度流 (Straka et al. 1993), 暖かいサーマルの上昇 (Tripoli 1992; Wicker and Skama rock 1998) がある. 新たな数値モデルの正確さの確立や, 新たな数値計算技法の正確さや効率, 性能の検証といった様々な理由から, これらのベンチマーク解を得るシミュレーション (ベンチマーク計算) は重要である.

残念なことに, 先に示した解析やベンチマーク計算の結果には湿潤過程を含んだものはない. その上, 数値モデルに湿潤過程を取り入れるために様々な方法が使われているものの, 湿潤大気モデルの定式化を評価するための標準的な方法として認められているものはまだない. 典型的な例として, 湿潤大気の深い対流の場合, 鉛直方向の速度や雲と雨水の混合比, 降水量といった物理量が妥当な値で計算されていることをモデル開発者は示そうとする. これは数値モデルの開発には重要かつ不可欠な手順であるが, 既存の参照解が足りないと, モデルの検証から引き出される結論が制限されてしまう. もう一つの一般的な方法は, 新たなモデルの結果を既存の他モデルの計算結果と比較することである. これは新たな数値モデルの忠実性を評価するのに重要な手順であるが, この方法では疑わしい仮定を広めることになる可能性がある.

この論文では, 湿潤大気の数値モデルの検証のためのベンチマークとして利用できる, 新たなシミュレーションを示す. シミュレーションの設定は Tripoli (1992) や Wicker and Skamarock (1998) で用いられた非線形の暖かいサーマルのベンチマーク計算に似ているが, 水蒸気と雲水の相変化を含む.

この研究で用いる数値モデルは第 2 節で述べる. 乾燥大気の暖かい乾燥サーマルシミュレーションは第 3 節にて, 湿潤大気の場合は第 4 節にて触れる. 第 5 章では本論文で示すシミュレーションの有用性を示す. 数値モデルでの一般的な仮定, およびその仮定がシミュレーション結果に与える影響を基に検証する. まとめと結論は第 6 節にて示す.

1.2　数値モデル

1.2.1　支配方程式

ベンチマーク計算では以下の過程が無視される. それは降水, 氷相の物理過程, コリオリ力, サブグリッドスケールの乱流である. これらの仮定の下で湿潤大気の支配方程式は以下のようになる.

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_a(1+r_t)}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3}g, \tag{A.1}$$

$$\frac{D\rho_a}{Dt} = -\rho_a\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \tag{A.2}$$

$$c_{vml}\frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{\rho_a}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (L_v - R_vT)\frac{Dr_v}{Dt}, \tag{A.3}$$

$$\frac{Dr_v}{Dt} = -\dot{r}_{cond}, \tag{A.4}$$

$$\frac{Dr_c}{Dt} = \dot{r}_{cond}, \tag{A.5}$$

(Bannon 2002 より). なお,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{A.6}$$

である. 本論文ではアインシュタインの規約を用いており, 式 (A.1) では添字 $i = 1, 2, 3$ がそれぞれ x, y, z 方向を示している. また, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. 記号 $\rho_a, p, T, r_v, r_c, r_t$ はそれぞれ, 乾燥大気の密度, 圧力, 温度, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 全水混合比を表す. 式 (A.3) の左辺では, 水滴の温度は常に気温に等しいという仮定を用いている.

本論文で用いる数値モデルでは, 無次元圧力 π と温位 θ を計算する. それぞれの定義は,

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\frac{R}{c_p}}, \tag{A.7}$$

$$\theta \equiv \frac{T}{\pi}. \tag{A.8}$$

ただし p_{00} = 1000 mb である. π と θ を用いた支配方程式の導出には, 状態方程式

$$p = \rho_a RT(1 + r_v/\epsilon) \tag{A.9}$$

と式 (A.2), 式 (A.3) を用いる. 式 (A.2), 式 (A.3) からは圧力の予報方程式

$$\frac{D\mathrm{lnp}}{Dt} = -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v c_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \tag{A.10}$$

が導ける. ここで式 (A.7), 式 (A.8) を用いると, 以下のような π と θ に対する予報方程式が得られる.

$$\frac{D\ln\pi}{Dt} = -\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v c_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \tag{A.11}$$

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = -\left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{Rc_{pml}}{c_p c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left[\frac{c_v L_v}{c_{vml}c_p T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R_v c_{pml}}{c_p R_m}\right)\right]\frac{Dr_v}{Dt}. \tag{A.12}$$

今回用いるモデルでは式 (A.11) と式 (A.12) を用いる. また, 式 (A.10) を用いて式 (A.3) 右辺の発散項を消去することで異なる形の温度方程式

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{1}{\rho_a c_{pml}}\frac{Dp}{Dt} - \frac{L_v}{c_{pml}}\frac{Dr_v}{Dt}, \tag{A.13}$$

が得られることを示しておくのは有用であろう. この方程式は MM5 (ペンシルバニア州立大学 -NCAR の大気メソスケールモデル ver.5; Dudhia 1993) で用いられている方程式の形と程近い.

ここに示されている熱力学方程式は, 多くの数値モデルで用いられている熱力学方程式とはわずかに異なる. 伝統的に水蒸気と液体の水の比熱は数値モデルでは無視され, $R_m \cong R$, $c_{pml} \cong c_p$, $c_{vml} \cong c_v$ となることから, 伝統的な温位方程式は,

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = -\frac{L_v}{c_p T}\frac{Dr_v}{Dt} \tag{A.14}$$

となる. しかし, Lipps and Hamler (1980) や Tripoli and Cotton (1981), Bannon (2002) 等のいくつかの研究から, 全エネルギーの正確な保存のためには水蒸気と液体の水の比熱の比熱を区別することは不可欠だということが示されている. 我々は, 熱力学方程式と圧力方程式の全ての項を無視することなくモデル化とシミュレーションを行う.

式 (A.12) 右辺第 1 項から, 温位方程式は相変化がなくても生成項を持つ. これより, 式 (A.8) で定義される温位は, 水がどの状態であっても存在するならば保存されない. また, 以下のような無次元圧力の別の定義を示すのは有意義である.

$$\tilde{\pi} \equiv \left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{R_m/c_{pml}}. \tag{A.15}$$

この無次元圧力の定義により, 温位は

$$\tilde{\theta} \equiv \frac{T}{\tilde{\pi}} \tag{A.16}$$

と定義される. これらの定義より, 予報方程式系は

$$\frac{D\ln\tilde{\pi}}{Dt} = -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{R_m L_v}{c_{pml}c_{vml}T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} + \ln\tilde{\pi}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\ln\left(\frac{\mathrm{R_m}}{\mathrm{c_{pml}}}\right), \quad \text{(A.17)}$$

$$\frac{D\ln\tilde{\theta}}{Dt} = -\frac{L_v}{c_{vml}}\frac{Dr_v}{Dt} - \ln\tilde{\pi}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\ln\left(\frac{\mathrm{R_m}}{\mathrm{c_{pml}}}\right) \quad \text{(A.18)}$$

となる. 式 (A.17) と式 (A.18) の右辺最終項は,

$$\ln\left(\frac{\mathrm{R_m}}{\mathrm{c_{pml}}}\right) = \left(\frac{\mathrm{R_v}}{\mathrm{R_m}} - \frac{\mathrm{c_{pv}}}{\mathrm{c_{pml}}}\right)\frac{\mathrm{Dr_v}}{\mathrm{Dt}} - \frac{\mathrm{c_{pl}}}{\mathrm{c_{pml}}}\frac{\mathrm{Dr_l}}{\mathrm{Dt}} \quad \text{(A.19)}$$

から相変化が起こる場合にのみ 0 ではない. したがって式 (A.18) で予報される温位 $\tilde{\theta}$ は湿潤過程が存在しないと保存されるため, 数値モデルではこの温位の定義を使用するのが好ましいように思われる. しかし, π の代わりに $\tilde{\pi}$ を用いると, 運動方程式の気圧傾度力項が複雑になってしまう, つまり $\dfrac{\partial\tilde{\pi}}{\partial x_i}$ を用いると r_v と r_c の空間微分に比例する付加項が現れるので, 我々は $\tilde{\pi}, \tilde{\theta}$ を用いなかった. また, $\tilde{\pi}$ と $\tilde{\theta}$ を用いて定式化されたモデルは, π と θ を用いたモデルと比べると精度面で目に見えるほどの進歩はなく, 不経済だとわかった.

1.2.2　数値計算の方法

数値モデルで実際に解かれる方程式は以下の通りである.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - c_p\theta_\rho\frac{\partial\pi'}{\partial x_i} + \delta_{i3}g\left(\frac{\theta_\rho}{\theta_{\rho 0}} - 1\right) + K_d\frac{\partial D}{\partial x_i}, \quad \text{(A.20)}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j\pi)}{\partial x_j} + \pi\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \pi\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}\theta} - \pi\frac{Rc_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\dot{r}_{cond}, \quad \text{(A.21)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j\theta)}{\partial x_j} + \theta\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \theta\left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{Rc_{pml}}{c_p c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left[\frac{c_v L_v}{c_{vml}c_p\pi} - \theta\frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{Rc_{pml}}{c_p R_m}\right)\right]\dot{r}_{cond}, \quad \text{(A.22)}$$

$$\frac{\partial r_v}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j r_v)}{\partial x_j} + r_v\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \dot{r}_{cond}, \quad \text{(A.23)}$$

$$\frac{\partial r_c}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j r_c)}{\partial x_j} + r_c\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \dot{r}_{cond}. \quad \text{(A.24)}$$

移流項はフラックス形式の項と移流形式の項の和として記述されている (すなわち, 式 (A.20) から式 (A.24) の右辺の始めの 2 項). 式 (A.6) 右辺第 2 項に現れる移流形式ではなく, この方法を用いて移流項を記述すると, 数値モデル内で移流される変数の保存性を改善できることがある (例えば, Wilhelmson and Chen 1982; Dudhia 1993). Xue and Lin (2001) では, ほぼ保存的な流束形式と数値的に同等な移流形式を作ることは可能な場合があるとしている. しかし, 全ての項を保存形式で記述することができるわけではないことを強調しておく. 従って, 数値モデルは厳密に質量や運動量, エネルギーを保存しない.

式 (A.20) において下付き添字 0 は, 変数が鉛直方向においてのみ変化する静水圧平衡を満たす基本場を表し, プライムはこの基本場からの偏差を表す. 基本場における静水圧方程式は,

$$\frac{d\pi_0}{dz} = -\frac{g}{c_p\theta_{\rho 0}} \tag{A.25}$$

である. 相当温位 θ_ρ (Emanuel 1994, p.113 より) は

$$\theta_\rho = \theta\frac{1 + r_v/\epsilon}{1 + r_t} \tag{A.26}$$

と定義される.

Klemp and Wilhelmson (1978) で導入された手法に従い, 支配方程式の音波を表す項を他の項よりも小さい時間刻みで積分する. 式 (20) 右辺の最終項は K_d が定数, $D = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ の発散減衰項であり, これらの項は時間分割法 (Skamarock and Klemp 1992) の安定性を維持する. 本論文で示すシミュレーションでは, 移流項に対し 3 次のルンゲクッタ法と 5 次の風上差分を用いて積分を行った (Wicker and Skamarock 2002 を模範とした).

相変化を考慮するため, 本モデルでは Soong and Ogura (1973) で提案されたものと似た飽和調整法を用いる. この方法では, 方程式系は力学過程と微物理過程の 2 つの過程で時間発展する. 力学過程では, 本モデルの方程式系の全項にて相変化を無視し積分を行う. 微物理過程は相変化を含む項においてのみ適用される. この方法は Klemp and Wilhelmson (1978) にて用いられたものと同じである.

微物理過程には相変化に伴う気圧の時間変化が含まれる. 気圧変化が飽和水蒸気圧に影響を与えるため, 凝結過程を計算するためには反復法を用いなければならない. この反復法において, 式 (A.21)-(A.24) は $\dot{r}_{cond}$ の推定値を用いて積分される. このとき θ と π の新たな値が飽和混合比 r_{vs} の新たな値を計算するのに用いられ, この r_{vs} 値を用いて $\dot{r}_{cond}$ の次の推定値を計算する. この過程は θ の最新値が直前の値に (計算機の計算精度の範囲内において) 収束するまで繰り返される. 反復のそれぞれ

において, $\dot{r}_{cond}$ の値は Rutledge and Hobbs (1983) にある以下の式から定義される.

$$\dot{r}_{cond} \equiv \frac{r_v - r_{vs}}{\Delta t \left(1 + \frac{L_v^2 r_{vs}}{c_p R_v T^2}\right)}. \tag{A.27}$$

ここで, Δt は時間刻みである. この一連の計算は通常, 4 回から 6 回の反復で収束する.

数値モデルの質量およびエネルギーを保存する性能は, モデルの計算領域内における全質量 ρ_t と全エネルギー E_t を計算することで評価される. ここで,

$$\rho_t \equiv \rho_a(1 + r_c), \tag{A.28}$$

$$E_t \equiv \rho_a[c_v T + c_{vv} r_v T + c_{pv} r_l T - L_v r_l + (1 + r_t)\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + (1 + r_l)gz]. \tag{A.29}$$

乾燥大気の密度 ρ_a は状態方程式 (9) を用いて決められる. ここで用いられる全エネルギーの定義は, 内部エネルギー, 位置エネルギー, 運動エネルギー, 潜熱エネルギーの和である. この全エネルギーは, 他の研究で用いられているものとは湿潤過程の影響を説明するのに必要となる潜熱エネルギーを含んでいる点で異なる. 境界を横切る流れが無く, また質量や運動量, エネルギーの外部からの供給が無いとするシミュレーションでは, 領域内の ρ_t と E_t の総和は理論上常に保存される.

1.3　乾燥大気のシミュレーション

Wicker and Skamarock (1998) にて示されたシミュレーションを, 乾燥大気シミュレーションでの参照元とする. このシミュレーションは, 2 次元の鉛直 10 km, 水平 20 km の領域をとり, 領域の四方全ての境界を剛体壁とする. 初期の擾乱のない環境は静穏 (どこにおいても初期に風が無い) で, 静水圧平衡, 中立安定, 300 K の等温位大気で定められる. 地表面における初期気圧は 1000 mb, 初期の鉛直方向の圧力場は静水圧平衡の式を積分し得られる. 正の温位偏差は計算領域の中心にあり, これは

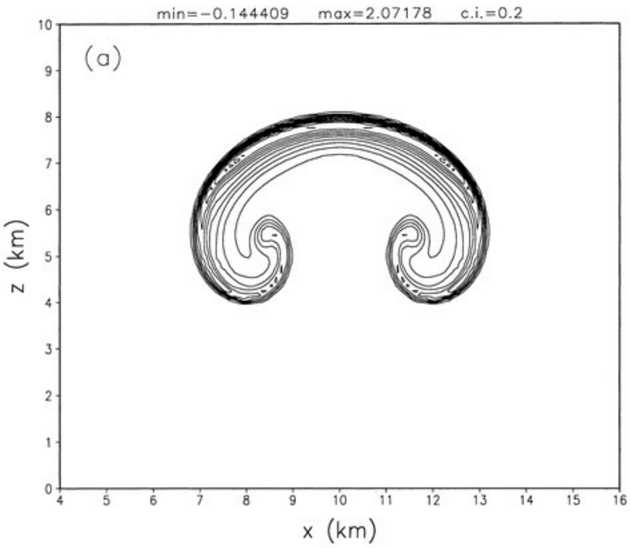
$$\theta' = 2\cos^2\left(\frac{\pi \mathrm{L}}{2}\right) \tag{A.30}$$

で定められる. ただし,

$$L = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2} \tag{A.31}$$

で, x_c = 10.0 km, z_c = 2.0 km, x_r = z_r = 2.0 km であり, 物理的及び数値的な拡散は適用されない.

空間格子間隔を 100 m として 1000 秒間の積分を行ったシミュレーションの結果を図 1 に示す. Wicker and Skamarock (1998) と同様に, サーマルは時間と共に上昇し拡大した. サーマルの横側に 2 つの回転する流れが発達し, その一方でサーマルの上部は拡大した. また θ の大きな勾配がサーマルの中央部に発達する (すなわち, 2 つの回転する流れの間にアーチ状の構造が作られる).



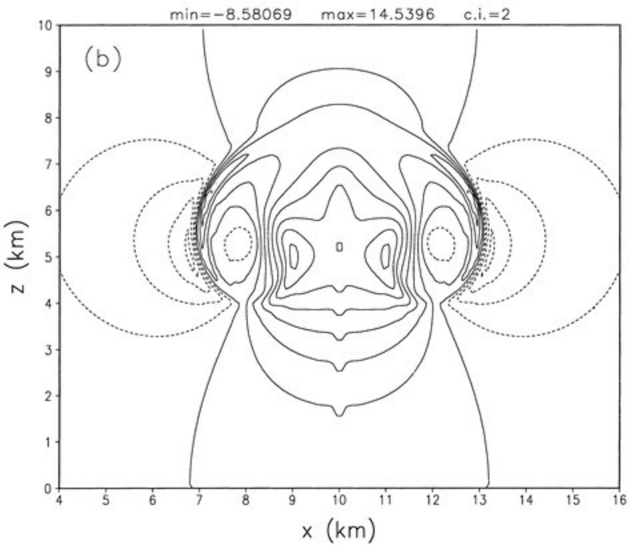


図 1. θ_0 = 300 K とした場合の乾燥大気におけるシミュレーション結果. (a) 温位偏差 θ'. 等値線間隔は 0.2 K で, $\theta' = 0$ の等値線は省略している. (b) 鉛直速度. 等値線間隔は 2 ms^{-1} で, 破線は負の値を示す.

このベンチマーク計算の発展形は興味深く, 我々の知る限りにおいては未知のものだった. この場合のシミュレーション結果は基本場の温位の値に比較的依存しない. 具体的には, もし初期擾乱のない状態が静水圧平衡しており, また同じように初期温位偏差が適用される場合, どんな基本場の温位の値を使うかに依らずシミュレーションの結果はどれも似通ったものとなる. 例として, 図 2 で初期の基本場の温位として 240 K と 270 K を用いたシミュレーションの結果を示す. 全ての場合において, 初期の浮力擾乱は同一である. ここで乾燥大気の場合における浮力の定義は

$$B = g\frac{\theta'}{\theta_0} \tag{A.32}$$

とする. 2 つのシミュレーションにおいて初期の浮力分布を同じにするため, 初期の温位偏差を

$$\theta' = \theta_0 \frac{\theta'|_{300}}{300\mathrm{K}} \tag{A.33}$$

と与える. ここで, θ_0 は新たな計算での温位の参照値であり, また $\theta'|_{300}$ は 式 (A.30) から得られる 300 K でのシミュレーションの擾乱の温位場である. 図 2 に示される結果は 300 K でのベンチマークシミュレーションとよく似ている. これらの様々なシミュレーションから得られる場は完全に同じではないが, 大事なことはサーマルが構造の細部まで一致しているということである. このことは中立安定な基本場の厳密な熱力学変数の値には比較的依存していないことを示唆する. したがって, このシミュレーションの結果に示される特徴は, 新たなモデルの定式化を検証するためのベンチマークとして提供される.

1.4　湿潤大気のシミュレーション

湿潤大気の場合にも乾燥大気の場合と同様の結果を得るために, 静水圧平衡が成り立っており, 中立安定である初期場を再設定する. 乾燥大気におけるシミュレーションでは, 中立安定な状態は, 1 つの熱力学変数, つまり温位のみによって定義される. しかし, 湿潤大気の場合は単純ではない. 湿潤大気の基本場の与え方を簡単にするために, 以下の 2 つの仮定を行う. 1 つ目の仮定として全水の混合比は全ての高度において一定, すなわち $r_t = r_v + r_c = \mathrm{const}$ とする. そして 2 つ目の仮定として相変化は可逆的に起こる, すなわち $\Delta r_v = \Delta r_{vs} = -\Delta r_c$ とする. これら 2 つの仮定の下で, 1 つの保存的な熱力学変数 (例えば Durran and Klemp 1982 を参照) を用いて中立安定な場を指定することができる. このような熱力学変数として我々は湿潤相当温位を用いる. 可逆的で断熱的な湿潤大気において, 湿潤相当温位は以下の式で定義される.

$$\theta_e = T\left(\frac{p_d}{p_{00}}\right)^{-R/(c_p+c_{pl}r_t)} \exp\left[\frac{\mathrm{L_v r_v}}{(\mathrm{c_p + c_{pl} r_t})\mathrm{T}}\right] \tag{A.34}$$

(Durran and Klemp 1982; Emanuel 1994, p.120 より). ただし, p_d は乾燥空気の分圧である. 式 (A.25), (A.26), (A.34) を用い, θ_e と r_t が与えられた場合に, π , θ, r_v, r_c の鉛直分布が得られる. 初期の場は飽和しており, $r_c > 0$ が常に成り立つことから, r_t の値は全ての高度にて常に r_{vs} より大きくなる.

他の全てのパラメータは乾燥大気におけるシミュレーションと同一である. すなわち地表面気圧は 1000 mb, 初期状態で無風, 空間格子間隔は 100 m であり, 乾燥大気でのシミュレーションと同じ 2 次元の領域を用いる. 相変化が可逆的という仮定の他に, 微物理的なパラメタリゼーションは用いられないとする. また, 降水は起こ

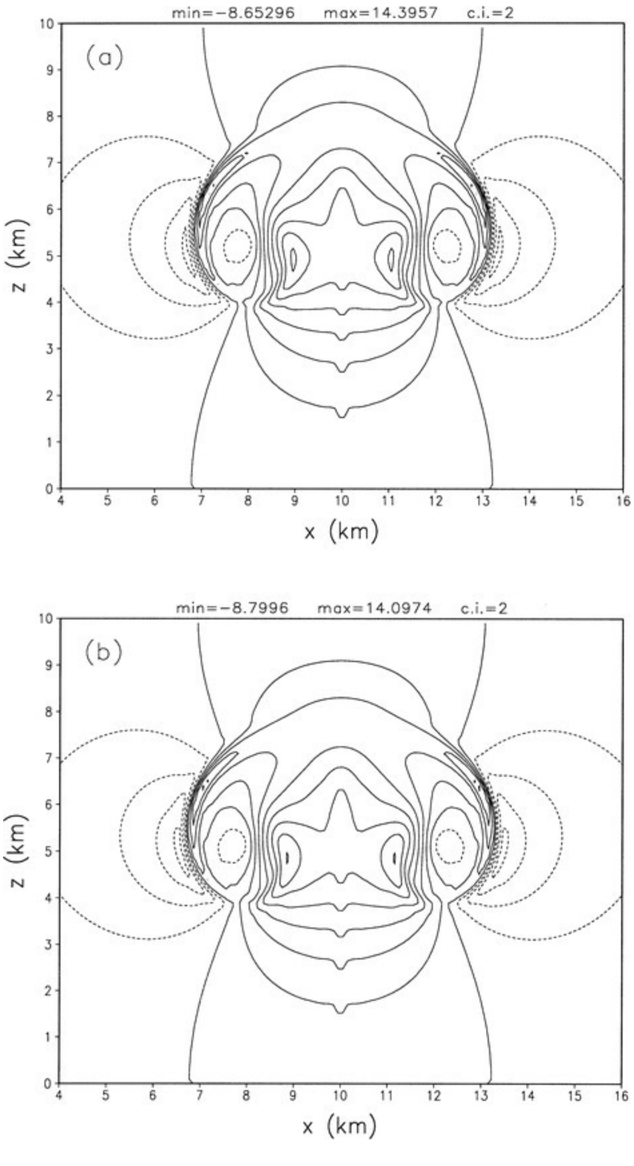


図 2. 乾燥大気におけるシミュレーションの鉛直速度. (a) θ_0 = 270 K の場合, (b) θ_0 = 240 K の場合. 等値線間隔は 2 ms^{-1} で, 破線は負の値を示す.

らない.

以下に示す数値モデルを用いた簡単な実験の結果から, 初期状態が正確に計算されているか, 数値モデルはベンチマーク計算のために適切に設計されているかどうか確かめることができる. もし初期に浮力擾乱が与えられていなければ, 運動は起こらない. 我々は, 初期の浮力擾乱がない場合に運動が生じないよう注意して数値コードを作成しているが, 実際には $10^{-4}\mathrm{ms}^{-1}$ オーダーの小さな鉛直速度が生じてしまう. これは鉛直方向の運動方程式 (特に鉛直方向の気圧傾度力と浮力の釣り合い) と (または) 微物理過程の数値コード (特に凝結に関連する項) の打ち切り誤差による. 湿潤大気サーマルの完結したシミュレーションを行うために, 初期の浮力場は θ_0 が 300 K のときの乾燥大気のベンチマークと同一のものとする. 湿潤大気では, 浮力は

$$B = g\left(\frac{\theta_p}{\theta_{\rho 0}} - 1\right) \tag{A.35}$$

で与えられる. これより湿潤大気の場合は式 (A.35) , 乾燥大気の場合は式 (A.32) を, θ_ρ の定義と共に用いると初期の θ の場は

$$\theta = \theta_{\rho 0}\frac{(1+r_t)}{1+r_{vs}/\epsilon}\left(\frac{\theta'|_{300}}{300\mathrm{K}} + 1\right) \tag{A.36}$$

である. ここで r_t は一定, $r_v = r_{vs}(p,T)$ と仮定するので, 浮力擾乱の内部では周辺の基本場に比べ水蒸気がわずかに多く, 雲水がわずかに少ない.

θ_e= 320 K, r_t = 0.020 として 1000 秒間の時間積分を行った結果を図 3 に示す. この湿潤大気のシミュレーションの結果は乾燥大気の場合 (図 1) の結果とよく似ている. 特にサーマルの両側に形成される 2 つの回転する流れとこれらを結ぶ薄いアーチ状の構造などといった細部において類似性がよく見られる. 湿潤大気でのサーマルは乾燥大気におけるサーマルに比べ少し速く上昇し, 1000 秒後では鉛直方向の速度場の最大値と最小値はいずれも大きい. とはいえ, 構造の細部は驚くほど似ている.

繰り返して言うが, このシミュレーション用モデルの方程式系において乾燥大気の場合に比べ, 支配方程式のいずれの項も無視されていないことが非常に重要である. とりわけ, 用いる方程式系は液体の水の比熱 c_{pl} を含み, 圧力方程式への非断熱加熱の寄与を含んでいる. 従来の数値モデルにおいて, これら 2 つの影響を無視することはごく一般的な仮定である. 更に, 支配方程式の特定の項 (次節にて紹介する) を無視した場合の定式化と比較すると, 全体の質量とエネルギーの保存に対する誤差は極めて少ない (約 10^{-4} %). 質量およびエネルギーがよく保存されており, 乾燥大気でのシミュレーションとよく似ていることから, この湿潤大気のシミュレーションは湿潤大気の数値モデルの比較に用いることのできる湿潤大気用のベンチマー

クといえる. 加えて, 乾燥大気の場合では, ここで示されたシミュレーションは, 初期の中立安定状態を定義するために用いられる熱力学変数の値には明らかに依存していなかった. 例として, 図 4 に θ_e = 360 K , r_t = 0.024 の場合と θ_e = 280 K, r_t = 0.004 の場合のシミュレーション結果を示す. 図 4 における結果もまた, ほぼ似通っている. これらの結果から湿潤大気におけるシミュレーションの設計がしっかりしていること, すなわち, 正しい結果は特定の初期熱力学的環境に依存しないというのがわかる. これはシミュレーションの結果が正しくベンチマーク解となるかどうかを左右する重要な点である.

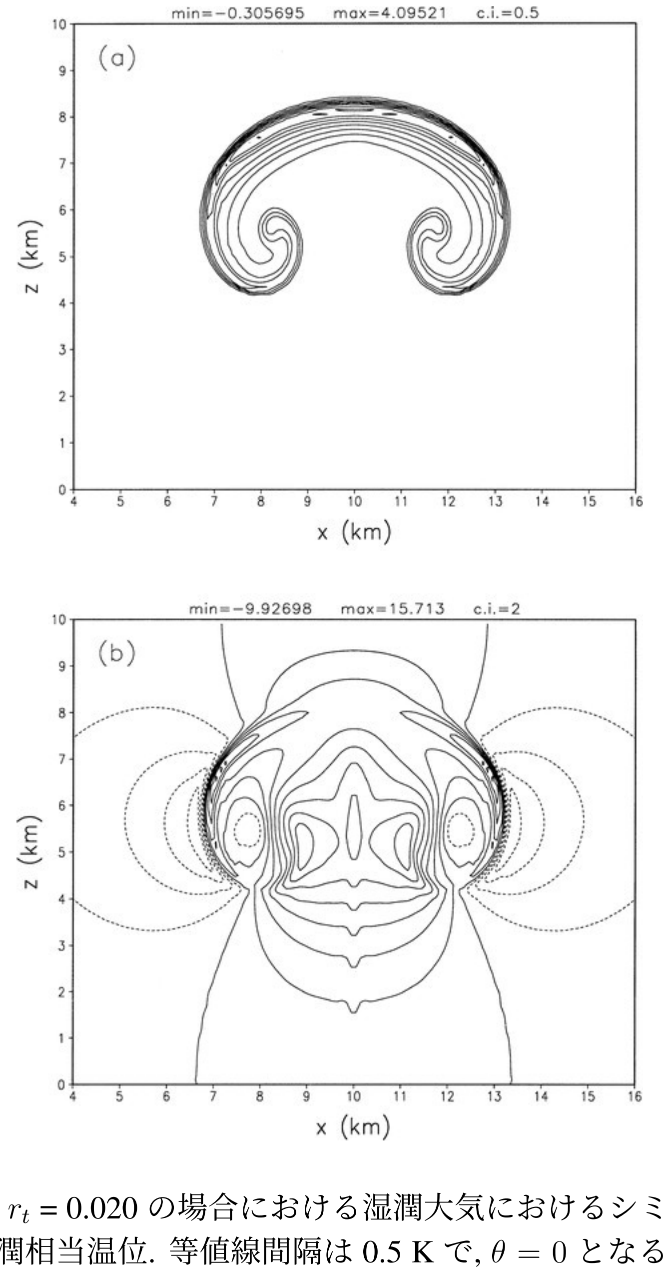
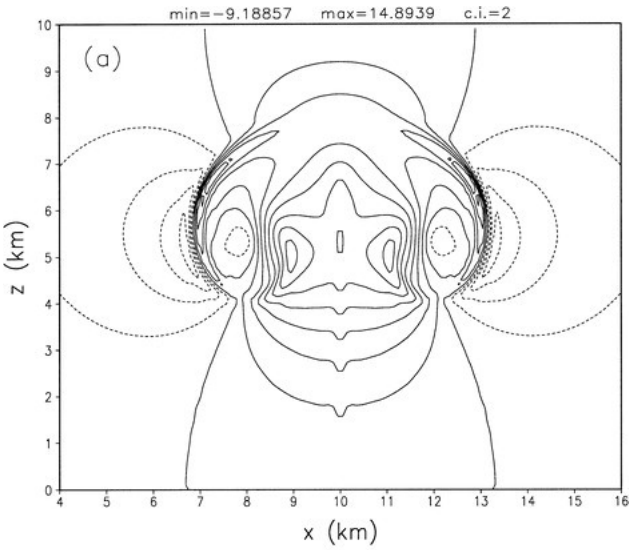


図 3. θ_0 = 320 K, r_t = 0.020 の場合における湿潤大気におけるシミュレーション結果. (a) 擾乱の湿潤相当温位. 等値線間隔は 0.5 K で, $\theta = 0$ となる等値線は省略している. (b) 鉛直速度. 等値線間隔は 2 ms^{-1} である.

1.5 モデルの定式化の変更に対するシミュレーション結果の応答

1.5.1 支配方程式

可逆的な相変化と降水がないという仮定から, 第 4 節で示したテストケースは現実を目に見えて簡単化したものといえる. しかし我々は, このテストケースはモデル



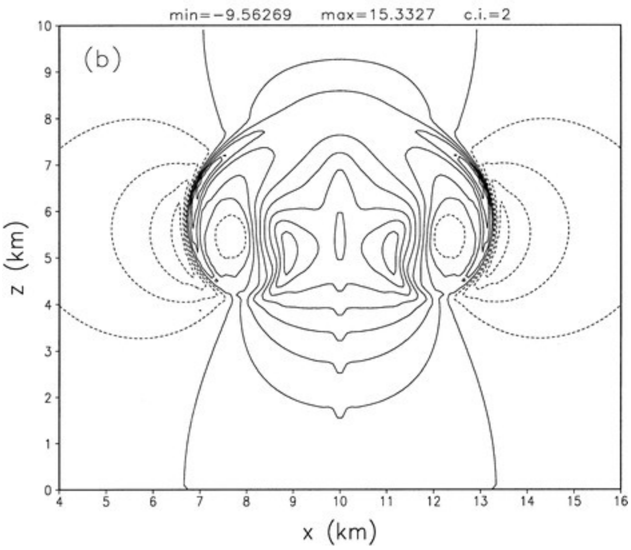


図 4. (a) θ_0 = 360 K および r_t = 0.024; または (b) θ_0 = 280 K および r_t = 0.004 それぞれの場合における湿潤大気におけるシミュレーションの鉛直速度結果. 等値線間隔は 2 ms^{-1} である.

の支配方程式の定義や湿潤大気に関わる項を含む数値計算法の試験といった, 数値モデルの定式化を検証するのに高い有効性を持つことを見出している. その例として, 本章にて 4 つの異なったモデルの定式化に対するテストを行い, その結果を示す. これらのモデルのうち 3 つについては第 2 節において説明している. 4 つ目のモデルでは, 温位の式においてスケール解析の結果微量な寄与しか及ぼさないと示された項を無視する. これら 4 つのモデルの全てにおいて, 熱力学方程式と (または) 圧力方程式だけが修正される.

4 つのモデルの方程式系を表 1 にまとめる. 方程式系 A は非静力学雲解像モデルで一般的に用いられる 2 つの近似 (圧力方程式における非断熱過程の寄与の無視, 水蒸気および液体の水の比熱の無視) を用いる. この方程式系は Klemp-Wilhelmson モデル (Klemp and Wilhelmson 1978) や MM5 (ペンシルバニア州立大学-NCAR メソスケールモデル ; Dudhia 1993), ARPS (Advanced Regional Prediction Model; Xue et al. 2000), その他のいくつかの数値モデルで用いられているものと似ている. 方程式系 B では, 熱力学方程式と圧力方程式にて水蒸気と液体の水の比熱のみが無視される. 圧力方程式において非断熱過程の寄与が含まれるので, この方程式系では質量が保存される. この定式化は COAMPS (Coupled Ocean-Atmosphere Mesoscale Prediction System: COAMPS; Hodur 1997) で用いられ, また圧力方程式よりも密度方程式を積分したモデル (例えば, WRF (Weather Research and Forecasting) モデル, Skamarock et al. 2001) といくつかの点で似ている. 方程式系 C では水蒸気と液体の水の比熱を含むが, 熱力学方程式の発散を含んだ項 (式 (12) の右辺第 1 項) を無視する. スケール解析でこの発散を含んだ項は小さいと推定され, これにより無視してよい. 我々の知る限り, この方程式系は先行研究において使用されたことはないが, 近似された方程式系がどのように数値的にテストされるのかを示す一例としてここに含めた. 方程式系 D は Tripoli and Cotton (1981) の氷 - 水温位 θ_{il} を熱力学方程式に用いた. ここで θ_{il} は

$$\theta_{il} \equiv \theta \left(1 + \frac{L_{v0} r_l}{c_p \max(\mathrm{T}, 253)} \right)^{-1} \tag{A.37}$$

と定義される. ここで, r_l は液体の水の混合比 (これはベンチマーク計算では r_c に

Equation set	Thermodynamic equation	Pressure equation
A	$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{L_v}{c_p \pi} \dot{r}_{\mathrm{cond}}$	$\frac{D\pi}{Dt} = -\pi \frac{R}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$
B	$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{L_v}{c_p \pi} \dot{r}_{\mathrm{cond}}$	$\frac{D\pi}{Dt} = -\pi \frac{R}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left(\frac{RL_v}{c_p c_v \theta} - \pi \frac{R_v}{c_v} \right) \dot{r}_{\mathrm{cond}}$
C	$\frac{D\theta}{Dt} = \left[\frac{c_v L_v}{c_p c_{\mathrm{vml}} \pi} - \frac{R_v}{c_{\mathrm{vml}}} \theta \left(1 - \frac{R}{c_p} \frac{c_{\mathrm{pml}}}{R_m} \right) \right] \dot{r}_{\mathrm{cond}}$	$\frac{D\pi}{Dt} = -\pi \frac{R}{c_p} \frac{c_{\mathrm{pml}}}{c_{\mathrm{vml}}} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left(\frac{RL_v}{c_p c_{\mathrm{vml}} \theta} - \pi \frac{RR_v c_{\mathrm{pml}}}{c_p R_m c_{\mathrm{vml}}} \right) \dot{r}_{\mathrm{cond}}$
D	$\frac{D\theta_{\mathrm{il}}}{Dt} = 0$	$\frac{D\pi}{Dt} = -\pi \frac{R}{c_v} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$

表 1. 熱力学方程式と圧力方程式のまとめ

単純化する) であり, 氷相は無視される. 方程式系 D もまた圧力方程式において非断熱過程の寄与と水蒸気と液体の水の比熱の違いを無視する. この方程式系は RAMS (地域的大気モデルシステム; Pielke et al. 1992) やウィスコンシン大学非静力学モデルシステム (Tripoli 1992) にて用いられている.

先に進む前に, 表 1 に示した全ての方程式系は, 水が存在しないベンチマーク計算の方程式系と同一であるということを指摘しておく. したがって, 第 3 節での乾燥大気サーマルのシミュレーションはここで示した全てのモデルを用いて水を与えずに行ったシミュレーションと同じ結果となる. しかし, 水蒸気が存在するが液体の水が生じない場合 (例えば, 相変化が起こらないか禁止されている場合), これら 4 つの方程式系は同一とならない. これは熱力学方程式と圧力方程式内で発散を含む項 (式 (A.11), (A.12) の右辺の 2 つの項) が, 水蒸気と液体の水の混合比が両方とも 0 となる場合においてのみ 0 となるためである.

これらのシミュレーションで, 初期の基本場は θ_e = 320 K と r_t = 0.020 で定義される. 図 5, 6 にて示されている結果から, 熱力学方程式と圧力方程式でいくつかの項を無視することにより, 図 3 のベンチマーク計算結果とは異なった結果が示されるという劇的な影響がもたらされることがわかる. 図 3 のベンチマーク計算でのサーマル上昇は約 8.2 km であったが, 図 5,6 の全てのシミュレーションにおいてサーマルの上昇は遅い. θ_e の場は, 全てのシミュレーションの場合においてベンチマーク計算よりも過小評価されている場所がある (図 6 にて破線で表している異常に低い値がそれである).

これら種々の結果から, 他にも有益な結論が得られる. とりわけ, 方程式系 A と B のシミュレーション結果における w と θ_e の場はとても似ている. A, B の結果の両方共サーマルが 6.9 km まで上昇し, 鉛直方向の運動の様子がほぼ同一である. この結果から, 数値モデルで (圧力方程式に非断熱過程の寄与を含むことでなされる) 質量を保存するために必要な追加の努力は, 全エネルギーも (ベンチマーク計算におけるように) 同時に保存されるようにしなければ, 結果に目に見えた発達をもたらさないと推測される. w と θ_e の類似性にも関わらず, 図 7 に示されるように質量とエネルギーの誤差の時系列には大きな違いがある. 図 7 にて短い破線で表される方程式系 A でのシミュレーションの時系列は約 62 秒の周期で振動する. 対照的に, 図 7 にて点線で表される方程式系 B でのシミュレーションの時系列は穏やかに変化し, シミュレーションを通して極めて小さな変化しか起きない. 更に方程式系 A でのシミュレーション結果では, シミュレーションを通してかなりの質量とエネルギーが失われており, その 1000 秒後における喪失量はベンチマーク計算での 1000 秒後の喪失量に比べ 30 倍の値となっている. 方程式系 B でのシミュレーションでは, 質量の誤差はベンチマーク計算と比べるとほぼ同一の量となっており, エネルギーにおいては少し増加している. このような質量とエネルギーの誤差の振る舞いの大きな差異が, 図 5,6 に見られるような力学的・熱力学的な場の類似性をどのよ

うにもたらすのかはよく解らない.

方程式系 C でのシミュレーションの結果は驚くべきものであった. 全てのシミュレーションの中で, このシミュレーションが最もベンチマークとかけ離れている. サーマルは 5.8 km までしか上昇せず, 鉛直流の分布は他のシミュレーションと比べ大きく異なっている. だが, 方程式系 C でのシミュレーションにおける質量とエネルギーの誤差が, ベンチマーク計算でのそれらの値 (図 7) と同程度であったのは興味深い. 方程式系 C のモデルが許容できない結果を示したのは, 用いた近似が熱の式だけに成り立ち, 他の式に対しては整合性のとれないものであったことによるのは明らかである. もしかすると圧力方程式の中での欠点を打ち消すような仮定が存在することにより, 結果が改善されているのかもしれない. C 以外の方程式系では系全体で一貫した近似を用いている (例えば, 方程式系 B では水の比熱はどの方程式においても無視されている) ことに注意されたい. 一方で, 方程式系 A では圧力方程式中の 1 項を無視し, 他の方程式ではこの省略による欠点を補う近似は用いないが, 方程式系 A を用いたシミュレーション結果は方程式系 C での結果よりも受け入れやすいものである. 方程式系 C を用いたシミュレーション結果が良くなかった理由が何であろうとも, スケール解析において重要ではないように見える項を無視するのは危険であることがこのテストによりよく分かる.

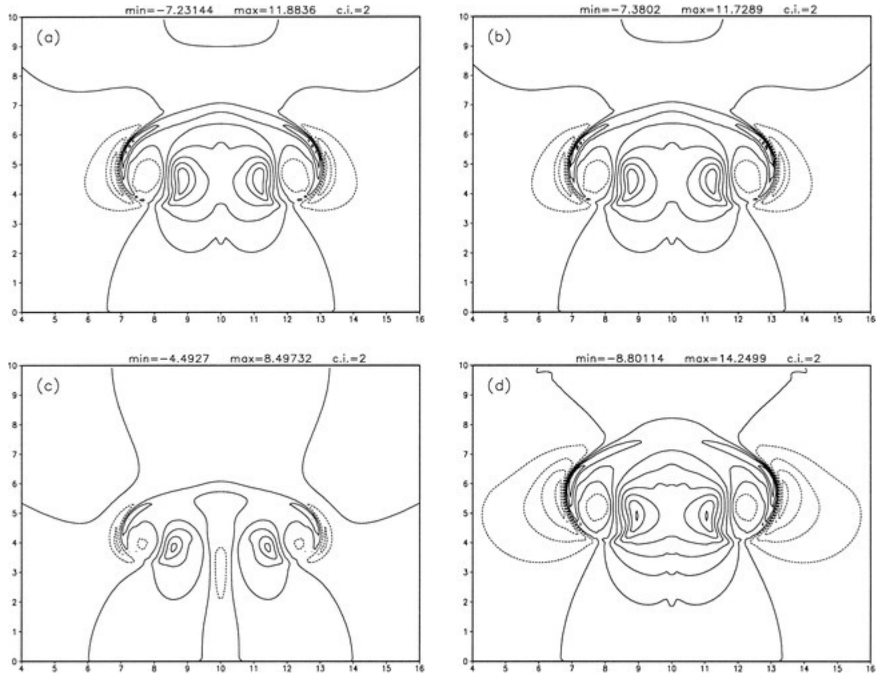


図 5. 4 つのモデル定式化を用いた場の湿潤大気におけるシミュレーションに見られる鉛直速度: (a) 方程式系 A, (b) 方程式系 B, (c) 方程式系 C, (d) 方程式系 D の場合を示す. 詳細は本文および表 1 を参照されたい. 等値線間隔は 2 ms^{-1} である.

θ_{il} を支配変数として用いたシミュレーション (方程式系 D でのシミュレーション) は, ベンチマーク計算の結果に最もよく合致した w と θ_e の場を作った. サーマルは 7.6 km まで至り, サーマルの形は少し歪められたのみである. 方程式系 D を用いたシミュレーション計算の w と θ_e の結果はよいものだったが, この D の定式化を用いた場合の全質量と全エネルギーの誤差は, 全てのシミュレーションの中で最大となった (図 7 参照). 一方で, θ_{il} はこのテストケースでは明らかになっていない他の利点がある. Tripoli and Cotton (1981) によれば, θ_{il} はサブグリッドスケールの乱流クロージャの混合項で用いられる適当な変数である. ここで示したテストケースはサブグリッドスケールの乱流過程を含まず, 係数一定の拡散も加えられない. 支配方程式の定式化に注目するために, そして数値モデルでの質量とエネルギー保存の重要性を際立たせるためにここでは係数一定の拡散は無視している. このシミュレーションで明らかになった θ_{il} の欠点は, 混合過程をより正確に描写することで打ち消される可能性がある.

本論文で用いられるモデルは厳密に質量や運動量, エネルギーを保存しない. 場合によっては, 正確なシミュレーション結果を得るためにはこれらの基本量の保存が不可欠である. それゆえ, 保存則に沿って数値モデルを構築する必要性が生じ, このことは近年のモデルの改良のための様々な努力 (Ooyama 2001; Skamarock et al.

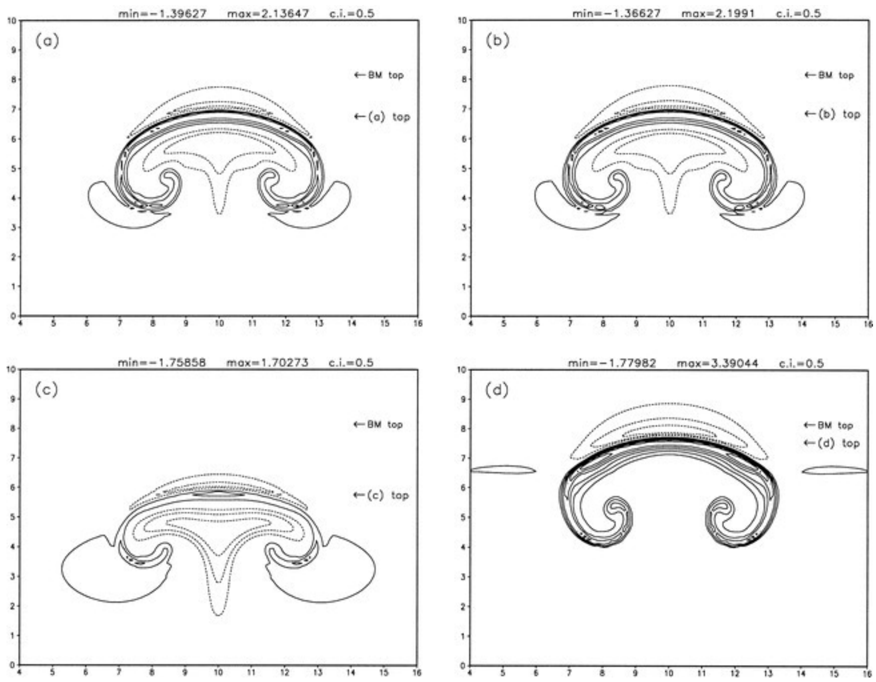


図 6. 図 5 と同様. ただし擾乱の湿潤相当温位 θ'_e の場合. 等値線間隔は 0.5 K , 破線は負の値を示す. また $\theta'_e 0$ の等値線は省略している. それぞれの枠内の右側には, ベンチマーク (BM) シミュレーションおよび各方程式系を用いた場合のサーマル頂上の高さが示されている.

2001; Satoh 2002) の背景となっている.

本章の結果から, 数値モデルで用いられる支配方程式の形は湿潤大気の深い対流に大きな影響を与えるだろうことがわかる. 一方で我々の結果が, はたしてベンチマーク計算の結果を得るためには必要であった物理的でない初期場によってもたらされたものかどうか疑問に思うであろう. 非物理的な側面はあるものの, このモデル設計は適切にベンチマーク計算の結果を得るのに必要である. このモデル設計がなければ参照可能な正しい解は判らず, 様々なモデル方程式の枠組みを客観的に

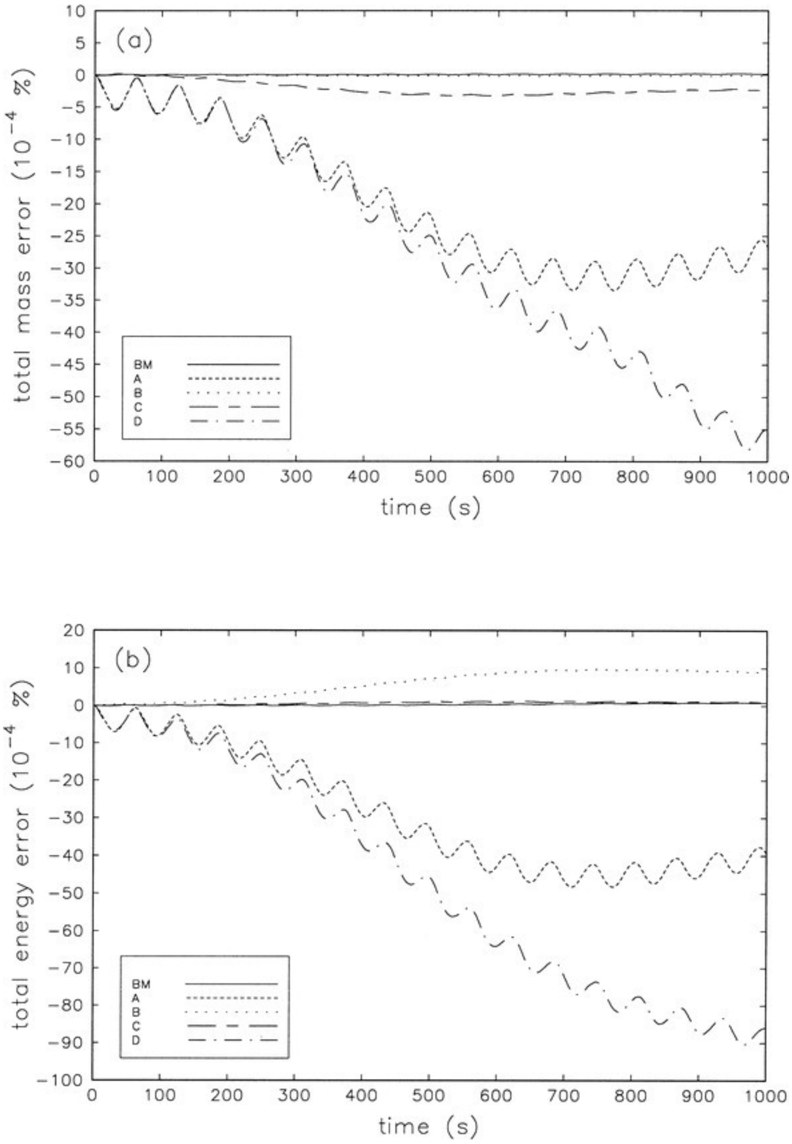


図 7. 5 つの方程式系を用いた場のシミュレーションの (a) 総質量誤差, および (b) 総エネルギー誤差の時系列. 誤差はシミュレーション開始時の総質量および総エネルギー値に対する 10^{-4} % のオーダーで表される.

評価するのは不可能であろう.

本章で示したシミュレーションにおいて他に批判されうる箇所としては r_t の値がある. これは与えた温度の基本場に対して異常に高いものとなっている. 異なる θ_e と r_t の値を用いたシミュレーション結果を比較することにより, 図 5,6 で示された差異がより「通常な」基本場においても見出されるだろうことが明らかになった. それにも関わらず, 熱力学方程式と圧力方程式を質量保存とエネルギー保存を満たすように作ることにより, どのような場を与えても望ましい結果を得ることができる. そしてそのような方程式系を用いるほうが近似された方程式系を用いるよりも良い.

我々は, 本論文の結論が数値モデルがより典型的な使われ方をした場合にも成立するかどうか判断するために, 現実的な初期場 (例えば条件付き不安定で未飽和な初期状態) を与えた追加のシミュレーションを行った. これまで, 様々な方程式系での 3 次元数値モデルを用いて様々な形態の深い対流, 例えば多重セルを持つ雷雨や, スーパーセル, スコールラインなどのシミュレーションを行ってきた. これらのシミュレーションでは, ケスラーの微物理パラメタリゼーションが用いられ, 降水は考慮されず, 完全なサブグリッド乱流モデルが用いられている. 全体的に, 5 つの方程式系を用いたシミュレーション結果は似通っていた. しかし, 本論文で述べる結論の一部はちょっとした方法で明らかになる. 例えば, 質量保存とエネルギー保存が満たされる方程式系を用いたシミュレーションで, 上昇運動は最も強く, 雲の頂上は高く, 降雨量も多い傾向がある. ベンチマーク計算の結果は方程式系 A でのシミュレーション結果よりも, 降雨量にしておよそ 10 % は多いようである. これらの結果から, 実際の使用例では多くの場合僅かな影響しか及ぼさないが, 数値モデルで用いられる支配方程式の形が結果に影響を与えるという結論が得られる.

1.5.2　数値計算法と用いた仮定

本論文で示してきた湿潤大気におけるベンチマーク計算はまた, モデルシステムの他の要素を試すのに使うことができる. 例えば, 我々はルンゲクッタ法を行う度に飽和調整を行う必要があるかどうかを調べた. 1 つの試行として, 乾燥大気過程に対し, ルンゲクッタ法を 3 ステップ行った後に飽和調整を一度だけ適用した. このシミュレーションは, 1 時間ステップ毎に飽和調整を行いつつ 3 次のルンゲクッタ法を進める場合と比較することができる. これら 2 つの結果はほぼ同一であった. 前者の方法のほうがかなり手間がかからないため, 我々のモデルシステムではこの方法を使い続けることにした.

もうひとつの試験として, 式 (A.20) 右辺第 4 項で示されるような近似を行っていない浮力項を, 浮力の定式化で一般的に用いられる以下の近似で置き換えた実験を

行った.

$$B \simeq g \left(\frac{\theta'}{\theta_0} + 0.61 r'_v - r'_l \right). \tag{A.38}$$

これもまた, 結果がベンチマーク計算とほぼ同一となり, この近似の有用性を裏付けている. これらは本論文で提案したベンチマーク計算の有用性を示す一例である.

1.6　まとめと結論

本研究では湿潤大気の非静力学モデルの評価を行うためのベンチマークシミュレーションの設計を行った. このシミュレーションの結果には, これまでの研究で用いられてきた乾燥大気のベンチマーク計算と多くの共通した特徴が示されている. 中立安定な初期場と, 同一の浮力擾乱を与えると, 湿潤大気のシミュレーション結果は乾燥大気のそれと, ほぼ同じ構造を持つなど定性的に似たものとなることがわかった. そして乾燥大気のシミュレーションと同じように, 湿潤大気のシミュレーションは, 中立安定な場を与える初期の熱力学的な値には実質的に依存しない. これらの理由から, 本研究で設計された実験設定は, 湿潤大気の非静力学モデルの設計を評価するために使用可能なベンチマークと考えることができる.

このベンチマークを用いると, 支配方程式の定式化がサーマル上昇の発達にどのように影響するのかがわかる. この定式化の試験から得られた結果は以下のようにまとめられる.

- 許容可能な結果を得るためには, 質量保存とエネルギー保存の両方を満たす必要がある.
- 熱力学方程式の一般的な形を用いた場合, 圧力方程式を質量保存を満たすようにしても結果の改善に寄与しなかった.
- 熱力学方程式のわずかな項を無視したら予期せずして最も好ましくない結果が得られた. これによりスケール解析を行って支配方程式中の項を無視することの危険性がわかった.
- 全質量と全エネルギーの誤差が行ったシミュレーションの中で最大だったにも関わらず, 氷と水の温位 (Tripoli and Cotton 1981 より) を用いたシミュレーションの結果が最もベンチマーク解と近かった.

このベンチマーク計算には, 物理的・数値的な混合の無視や氷相の無視, 降水の無視, 相変化が可逆的とする仮定などいくつもの理由により制限がある. これらの制

限にも関わらず, このベンチマーク計算は数値計算法の正確さや効率性, また湿潤大気の数値モデルの仮定を評価するのに極めて有用であるとわかった.

謝辞
Dave Stauffer と Richard James よりもたらされた識見に大きな感謝を贈る. 本論文の全ての図の作成には Grid Analysis and Display System (GrADS) を用いた. また本研究は NSF Grant ATM 9806309 から支援を受けた.

1.7　参考文献

Bannon, P. R., 2002: Theoretical foundations for models of moist convection. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 1967-1982.
Clark, T. L., 1977: A small-scale dynamic model using a terrainfollowing coordinate transformation. *J. Comput. Phys.*, **24**, 186-215.
Dhudia, J., 1993: A nonhydrostatic version of hte Penn State-NCAR Mesoscale Model: Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 1493-1513.
Durran, D. K., and J. B. Klemp, 1982: On the effects of moisture on the Brunt-Väisälä frequency. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 2152-2158.
Emanuel, K. A., 1994: *Atmospheric Convection*. Oxford University Press, 580 pp.
Hodur, R. M., 1997: The Naval Research Laboratory's coupled Ocean/Atmosphere Mesoscale Prediction System (COMPAS). *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 1967-1982.
Klemp, J. B., and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimentional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
Lipps, F. B., and R. S. Hemler, 1980: Another look at the thermodynamic equation for deep convection. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, 78-84.
Ooyama, K. V., 2001: A dynamic and thermodynamic foundation for modeling the moist atmosphere with parameterized microphysics. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2073-2102.
Pielke, R. A., and Coauthors, 1992: A comprehensive meteorological modeling system–RAMS. *Meteor. Atmos. Phys.*, **49**, 69-91.
Rutledge, S. A., and P. V. Hobbs, 1983: The mesoscale and microscale structure and organization of clouds and precipitation in mid-latitude cyclones . VIII:A model for the ”seeder-feeder” process in warm-frontal rainbands. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1185-1206.
Satoh, M., 2002: Conservative scheme for the conpressible nonhydrostatic models with the horizontally explicit and vertically implicit time integration scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1227-1245.
Skamarock, W. C., and J. B. Klemp, 1992: The stability of time-split numerical meth-

ods for the hydrostatic and nonhydrostatic elastic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.
—-, and —-, 1994: Efficiency and accuracy of the Klemo-Wilhelmson time-splitting technique. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 2623-2630.
—-, —-, and J. Dudhia, 2001: Prototypes for the WRF (Weather Research and Forecasting) model, Preprints, *14th Conf. on Numerical Weather Prediction*, Fort Lauderdale, FL, Amer. Meteor. Soc., J11-J15.
Soong, S.-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893.
Straka, J. M., R. B. Wilhelmson, L. J. Wicker, J. R. Anderson, and K. K. Droegemeier, 1993: Numerical solutions of a non-linear density current: A benchmark solution and conparisons. *Int. J. Numer. Methods*, **17**, 1-22.
Tripoli, G. J., 1992: A nonhydrostatic mesoscale model designed to simulate scale interaction. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1342-1359.
—-, and W. R. Cotton, 1981: The use of ice-liquid water potential temperature as a thermodynamic variable in deep atmospheric models. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 1094-1102.
Wicker, L. J., and W. C. Skamarock, 1998: A time-splitting scheme for the elastic equations incorporating second-order Runge-Kutta time differencing. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 1992-1999.
—-, and —-, 2002: Time-splitting methods for elastic models using forward time schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088-2097.
Wilhelmson, R. B., and C.-S. Chen, 1982: A simulation of the devalopment of successive cells along a cold outlow boundary. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1466-1483.
Xue, M., and S.-J. Lin, 2001: Numerical equivalence of advection in flux and advective forms and quadratically conservative high-order advection schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 561-565.
—-, K. K. Droegemeier, and V. Wong, 2000: The Advanceed Regional Prediction System (ARPS)–A multiscale nonhydrostatic atmospheric simulation and prediction model. Part I: Model dynamics and verification. *Meteor. Atmos. Phys.*, **75**, 161-193.

付 録B　基礎方程式の導出

本付録では第 2 章で紹介した基礎方程式の導出を行う.

2.1　支配方程式

2.1.1　連続の式

空間に固定された体積 V, 表面積 S の領域を考える. 単位体積あたりの流体の物理量を χ と表すと, χ の保存の式

$$\int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} dV = -\int_S \chi u_\chi \cdot dS + \int_V \dot{\chi} dV \tag{B.1}$$

が得られる. ここで, u_χ は χ が移流される速度を表す. V を任意とすると,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi u_\chi) = \dot{\chi}$$

が成り立つ. 乾燥大気の密度を ρ_a, その移送速度を u_χ とし, χ に代入すると,

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a u_a) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + u_a \nabla \cdot \rho_a + \rho_a \nabla \cdot u_a = 0.$$

これより, 連続の式

$$\frac{d\rho_a}{dt} = -\rho_a \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{B.2}$$

が求められる. ただし, $\dfrac{d}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}$ である. 式 (B.2) は本文中の式 (2) に相当する.

2.1.2 運動方程式

直交座標系をとる. 流体とともに運動する領域 D' を考える. 流体の応力は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

で表されるとし, 領域 D' に働く力は領域 D' を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力と保存力である.

これらの力と流体に働く慣性力が釣り合わなければならないので,

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho v_i dV = \int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS' + \int_{D'} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dV. \tag{B.3}$$

ただし n'_k は閉曲面 $\partial D'$ の外向き単位法線ベクトルである. 応力テンソル σ_{ik} の各成分は, k 方向に垂直な面の単位面積あたりに働く応力の i 成分を表す. Φ は保存力のポテンシャルエネルギーである.

流体の単位体積あたりのとある物理量 A に対して,

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho A dV = \int_{D'} \rho \frac{dA}{dt} dV$$

という関係が成り立つため, 式 (B.2) の左辺は

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho v_i dV = \int_{D'} \rho \frac{dv_i}{dt} dV$$

と変形できる. また Gauss の定理を使って, 式 (B.3) の右辺第 1 項は

$$\int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS' = \int_{D'} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV$$

と変形できる. これらより以下の式が得られる.

$$\int_{D'} \left(\frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dV = 0$$

領域 D' が任意にとれることから,

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ を用いると,

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0. \tag{B.4}$$

ここで粘性を無視し, 保存力は鉛直方向において重力のみが働く (すなわち $\Phi = gx_3$) という仮定を行うと, 式 (B.4) は

$$\rho\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\delta_{i3}g = 0 \tag{B.5}$$

となる. ただし, g は重力加速度を表す. また, 考える湿潤大気の密度 ρ は大気全体の水の混合比 r_t および乾燥大気の密度 ρ_a を用いて,

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_a + r_t\rho_a \\ &= \rho_a(1 + r_t)\end{aligned}$$

と表せる. これを式 (B.5) に代入すると,

$$\rho_a(1 + r_t)\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\delta_{i3}g = 0$$

. 両辺を $\rho_a(1 + r_t)$ で割り, 整理すると

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_a(1 + r_t)}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3}g. \tag{B.6}$$

よって, 考える仮定における運動方程式が導出できた. この式 (B.6) は本文中の式 (1) に相当する.

2.1.3　熱力学方程式

流体の内部エネルギーを ϵ, 外部から供給される熱量を Q とすると, 流体の全エネルギーは

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \epsilon + \Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}(pv_k - \sigma'_{ik} + q_k) = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Q \tag{B.7}$$

で表される. ここで式 (B.4) より

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}.$$

両辺に v_i を掛け,

$$v_i\rho\frac{dv_i}{dt} = -v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} - v_i\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$

となる. これを整理すると,

$$\frac{1}{2}\rho\frac{dv_i^2}{dt} = p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial p v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik} v_i}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho\frac{d\Phi}{dt},$$
$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi\right) = p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}(p v_i - \sigma'_{ik} v_i) + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$
$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi\right) + \frac{\partial}{\partial t}(p v_i - \sigma'_{ik} v_i) = p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{B.8}$$

式 (B.7) の両辺から式 (B.8) の両辺を引くと,

$$\rho\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + Q,$$
$$\rho\frac{d\epsilon}{dt} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + Q. \tag{B.9}$$

理想大気の内部エネルギー $\epsilon = c_{vml}T$ を式 (B.9) に代入すると,

$$\rho\frac{d}{dt}(c_{vml}T) = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + Q,$$
$$c_{vml}\rho\frac{dT}{dt} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + Q.$$

$\rho = \rho_a$ と仮定し, 整理すると

$$c_{vml}\frac{dT}{dt} = -\frac{p}{\rho_a}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{Q}{\rho_a}. \tag{B.10}$$

潜熱などの影響を考慮し, $\dfrac{Q}{\rho_a} = -(L_v - R_v T)\dfrac{Dr_v}{Dt}$ とおくと, 式 (B.10) は

$$c_{vml}\frac{dT}{dt} = -\frac{p}{\rho_a}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - (L_v - R_v T)\frac{Dr_v}{Dt} \tag{B.11}$$

となる. 式 (B.11) は本文中の式 (3) に相当する.

2.1.4　水蒸気混合比の保存式

水蒸気の密度を ρ_v, 移流速度は乾燥大気と同一の u_{aj} となる. これらを式 (B.1) に代入すると,

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_j u_{aj}) = -\rho_a \dot{r}_{cond}$$

となる. ただし $\dot{r}_{cond}$ は凝結による生成項を表す. これを変形すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \rho_v \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} + u_{aj} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} &= -\rho_a \dot{r}_{cond}, \\
\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\rho_v}{\bar{}_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} + \frac{u_{aj}}{\rho_a} \frac{\partial \rho_v}{\partial x_j} &= -\dot{r}_{cond}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_v}{\rho_a} - \rho_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} + u_{aj} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} \right) - u_{aj} \rho_v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho_a} \right) &= -\dot{r}_{cond}, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} \right) - \rho_v \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} &= -\dot{r}_{cond}.
\end{aligned}
$$

水蒸気の混合比 $r_v \equiv \dfrac{\rho_v}{\rho_a}$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{dr_v}{dt} - \rho_v \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho_a} + \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} &= -\dot{r}_{cond}, \\
\frac{dr_v}{dt} - \rho_v \left(-\frac{1}{\rho_a^2} \right) \frac{d\rho_a}{dt} + \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} &= -\dot{r}_{cond}.
\end{aligned}
$$

乾燥大気の連続の式 (B.2) を用いると,

$$
\frac{dr_v}{dt} + \frac{\rho_v}{\rho_a^2} \left(-\rho_a \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} \right) + \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial u_{aj}}{\partial x_j} = -\dot{r}_{cond}.
$$

よって, 水蒸気混合比の保存式

$$
\frac{dr_v}{dt} = -\dot{r}_{cond} \tag{B.12}
$$

が求められる. 式 (B.12) は本文中の式 (4) に相当する.

2.1.5　雲水混合比の保存式

雲水混合比 r_c は $r_c \equiv \dfrac{\rho_c}{\rho_a}$ で定義される. 水蒸気混合比の保存式と同様に, 凝結による生成項の符号が水蒸気混合比の混合比の式と逆になることに注意し導出すると, 雲水混合比の保存式は

$$
\frac{dr_c}{dt} = -\dot{r}_{cond} \tag{B.13}
$$

と求められる. 式 (B.13) は本文中の式 (5) に相当する.

こうして 2.1.1 節から 2.1.5 節までの議論から本文中の支配方程式 (1)-(5) が導出できた.

2.2　圧力の予報方程式と無次元圧力・温位の予報方程式

次に, 圧力の予報方程式や無次元圧力・温位の予報方程式を導出する.

2.2.1　圧力の予報方程式

圧力の予報方程式

$$\frac{D\,\mathrm{lnp}}{Dt} = -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}$$

を導出する. 状態方程式

$$p = \rho_a RT(1 + r_v/\epsilon) \tag{B.14}$$

より,

$$\begin{aligned} p &= \rho_a RT\left(1 + \frac{r_v}{\epsilon}\right) \\ &= \rho_a(R + r_v R_v)T \\ &= \rho_a R_m T. \end{aligned} \tag{B.15}$$

これと熱力学方程式 (B.11) を用いて, 圧力の予報方程式を導出する. 式 (B.11) を変形すると,

$$\begin{aligned} c_{vml}\frac{DT}{Dt} &= -\frac{p}{\rho_a}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (L_v - R_v T)\frac{Dr_v}{Dt}, \\ \frac{DT}{Dt} &= -\frac{p}{\rho_a c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

式 (B.15) を変形し, $T = \dfrac{p}{\rho_a R_m}$. これを式 (B.16) の左辺に代入すると,

$$\frac{1}{\rho_a R_m}\frac{Dp}{Dt} = -\frac{p}{\rho_a c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}.$$

両辺に $\dfrac{\rho_a R_m}{p}$ を掛けると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{Dp}{Dt} &= -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\rho_a R_m}{p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \\
&= -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{T}\left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \\
&= -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{c_{pml}}{R_m}\frac{1}{p}\frac{Dp}{Dt} &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{c_{pml}}{R_m}\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \\
\frac{D\mathrm{lnp}}{Dt} &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v c_{pml}}{R_m c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

となる. こうして圧力の予報方程式 (本文中の式 (9)) が求められた.

2.2.2　無次元圧力 π を予報変数とする式

無次元圧力 π の定義式

$$
\pi \equiv \left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\dfrac{R}{c_p}}
$$

を変形し,

$$
p = p_{00}\pi^{\frac{c_p}{R}}.
$$

この式を圧力の予報方程式 (B.17) に代入し,

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\ln\left(\mathrm{p}_{00}\pi^{\frac{\mathrm{c_p}}{\mathrm{R}}}\right) &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{D}{Dt}\mathrm{lnp}_{00} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\ln\pi^{\frac{\mathrm{c_p}}{\mathrm{R}}} &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}.
\end{aligned}
$$

ここで, p_{00} は定数なので, $\mathrm{lnp}_{00} = 0$ となる. よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\ln\pi^{\frac{\mathrm{c_p}}{\mathrm{R}}} &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{c_p}{R}\frac{D}{Dt}\ln\pi &= -\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{D}{Dt}\ln\pi &= -\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

となり, 無次元圧力 π の予報方程式 (本文中の式 (10)) が導出できた.

2.2.3　温位 θ を予報変数とする式

温位 θ の定義式

$$\theta \equiv \frac{T}{\pi}$$

を変形し,

$$\pi = \frac{T}{\theta}$$

となる. この式を式 (B.18) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\ln\left(\frac{\mathrm{T}}{\theta}\right) &= -\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{D}{Dt}\ln\mathrm{T} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\ln\theta &= -\frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
-\frac{D}{Dt}\ln\theta &= -\frac{D}{Dt}\ln\mathrm{T} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{c_p}}\frac{\mathrm{c_{pml}}}{\mathrm{c_{vml}}}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x_j}} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{c_p}}\left(\frac{\mathrm{L_v}}{\mathrm{c_{vml}T}} - \frac{\mathrm{R_v}}{\mathrm{R_m}}\frac{\mathrm{c_{pml}}}{\mathrm{c_{vml}}}\right)\frac{\mathrm{Dr_v}}{\mathrm{Dt}} \qquad \text{(B.19)}
\end{aligned}$$

と変形できる. ここで, 状態方程式 (B.14) を変形し,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho_a} &= (R + r_v R_v)T \\
&= R_m T
\end{aligned}$$

とする. この式を熱力学方程式 (B.11) を変形した式

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{\rho_a}\frac{1}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}$$

に代入し変形すると,

$$\begin{aligned}
\frac{DT}{Dt} &= -\frac{R_m T}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}} - \frac{R_v T}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{1}{T}\frac{DT}{Dt} &= -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}, \\
\frac{D\ln\mathrm{T}}{Dt} &= -\frac{R_m}{c_{vml}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt}.
\end{aligned}$$

この式を式 (B.19) に代入し整理すると,

$$
\begin{aligned}
-\frac{D}{Dt}\ln\theta &= \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left\{\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\right\}\frac{Dr_v}{Dt} \\
&= \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left(\frac{L_v}{c_{vml}T} - \frac{RL_v}{c_{vml}c_pT} - \frac{R_v}{c_{vml}} + \frac{R}{c_p}\frac{R_v}{R_m}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{Dr_v}{Dt} \\
&= \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left\{\frac{C_pL_v - RL_v}{c_{vml}c_pT} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R}{C_p}\frac{c_{pml}}{R_m}\right)\right\}\frac{Dr_v}{Dt}.
\end{aligned}
$$

ここで $c_p = c_v + R$ より,

$$
\begin{aligned}
-\frac{D}{Dt}\ln\theta &= \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left\{\frac{(C_v + R)L_v - RL_v}{c_{vml}c_pT} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{R_m}\right)\right\}\frac{Dr_v}{Dt} \\
&= \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left\{\frac{C_vL_v}{c_{vml}c_pT} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R}{C_p}\frac{c_{pml}}{R_m}\right)\right\}\frac{Dr_v}{Dt}.
\end{aligned}
$$

これより,

$$
\frac{D}{Dt}\ln\theta = -\left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R}{c_p}\frac{c_{pml}}{c_{vml}}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left\{\frac{C_vL_v}{c_{vml}c_pT} - \frac{R_v}{c_{vml}}\left(1 - \frac{R}{C_p}\frac{c_{pml}}{R_m}\right)\right\}\frac{Dr_v}{Dt} \tag{B.20}
$$

と変形できるため, 温位 θ の予報方程式 (本文中の式 (11)) が導出できた.

付 録C　湿潤大気モデルにて実際に解かれる式

2.2 節で説明した基礎方程式において, 移流項を変数の保存性を改善するためにフラックス形式の項と移流形式の項の和として記述する. 実際にシミュレーション計

算において用いられる式は以下のようになる.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - c_p \theta_\rho \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \left(\frac{\theta_\rho}{\theta_{\rho 0}} - 1 \right) + K_d \frac{\partial D}{\partial x_i}, \tag{C.1}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j \pi)}{\partial x_j} + \pi \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \pi \frac{R}{c_p} \frac{c_{pml}}{c_{vml}} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{R}{c_p} \left(\frac{L_v}{c_{vml} \theta} - \pi \frac{R c_{pml}}{R_m c_{vml}} \right) \dot{r}_{cond}, \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j \theta)}{\partial x_j} + \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \theta \left(\frac{R_m}{c_{vml}} - \frac{R c_{pml}}{c_p c_{vml}} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left[\frac{c_v L_v}{c_{vml} c_p \pi} - \theta \frac{R_v}{c_{vml}} \left(1 - \frac{R c_{pml}}{c_p R_m} \right) \right] \dot{r}_{cond}, \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial r_v}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j r_v)}{\partial x_j} + r_v \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \dot{r}_{cond}, \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial r_c}{\partial t} = -\frac{\partial (u_j r_c)}{\partial x_j} + r_c \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \dot{r}_{cond}. \tag{C.5}$$

式 (C.1) において下付き添字 0 は, 変数が z 方向においてのみ変化する静水圧平衡を満たす基本場を表し, プライムはこの基本場からの偏差を表す. 基本場における静水圧方程式は,

$$\frac{d\pi_0}{dz} = -\frac{g}{c_p \theta_{\rho 0}}$$

である. 相当温位 θ_ρ は

$$\theta_\rho = \theta \frac{1 + r_v/\epsilon}{1 + r_t}$$

と定義される.

付 録D　変数リスト

変数	説明	値または定義
c_p	乾燥大気の定圧比熱	1004 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
c_{pl}	液体の水の定圧比熱	4186 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
c_{pml}	湿潤大気の定圧比熱	$c_{pml} = c_p + c_{pv} r_v + c_{pl} r_l$
c_{pv}	液体の水の定積比熱	1885 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
c_v	乾燥大気の定積比熱	717 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
c_{vml}	湿潤大気の定積比熱	$c_{vml} = c_v + c_{vv} r_v + c_{pl} r_l$
c_{vv}	水蒸気の定積比熱	1424 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
g	重力加速度	9.81 m s^{-2}
L_v	蒸発の潜熱	$L_v = L_{v0} - (c_{pl} - c_{pv})(T - T_0)$
L_{v0}	L_v の基準値	2.5 $\times$ 10^{-6} J kg^{-1}
r_l	液体の水の混合比	本研究では $r_l = r_c$
R	乾燥大気の気体定数	287 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
R_m	湿潤大気の気体定数	$R_m = R + R_v r_v$
R_v	水蒸気の気体定数	461 J $\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$
T_0	基準温度	273.15 K
ϵ	R と $\mathrm{R_v}$ の比	ϵ = R / $\mathrm{R_v}$