

系外地球型惑星を対象とした エネルギーバランスモデルについて

Energy Balance Model for Terrestrial Extrasolar Planets

学生番号: 22050145

山田 圭祐

YAMADA Keisuke

北海道大学 理学部 地球科学科

惑星宇宙グループ

Department of Earth Sciences, Undergraduate School of Science,

Hokkaido University

Planetary and Space Group

指導教官: 倉本 圭

KURAMOTO Kiyoshi

2010年3月12日

要旨

本論文は Williams and Kasting, 1997; Gaidos and Williams, 2004 にしたがって系外地球型惑星を対象とした南北 1 次元エネルギーバランスモデル (南北 1 次元 EBM) の定式化について調べたものである。

南北 1 次元 EBM は実際の気候を単純化したモデルの 1 つである (e.g., North *et al.*, 1981). このモデルにおいて恒星放射を与えると経度平均した惑星表層の温度と惑星放射が求まる。ただし大気や海洋の運動については解かずエネルギーの収支のみを考える。系外地球型惑星は軌道要素、赤道傾斜および大気と海洋の規模が多様であると考えられるため、それによる表面温度と惑星放射の振る舞いの違いを明らかにする必要がある。

また南北 1 次元 EBM はエネルギー保存則に基づくモデルであり、その基礎方程式は惑星表層における経度平均した単位地表面積、単位時間あたりの熱量の変化が、恒星放射の吸収による加熱率、惑星から射出される赤外線による冷却率および大気と海洋による南北方向の熱輸送の加熱率の収支と等しいことを表わす。ここで熱量の変化は惑星表層の熱容量と温度の時間変化との積であり、恒星放射の吸収による加熱率は恒星放射フラックスのうち大気上端に入射するものと大気上端で跳ね返されるものとの差であり、大気と海洋の熱輸送による加熱率は南北方向の温度勾配と熱輸送効率によって表わされる。

基礎方程式の各項を記述するには恒星放射、惑星アルベド、惑星放射、惑星表層の熱容量および南北方向の熱輸送効率について定式化を行う必要がある。これまでのところ現在の地球の大気成分、重力加速度および惑星半径を念頭においた定式化が最も進んでいる (e.g., Caldeira and Kasting, 1992; Williams and Kasting, 1997). 恒星放射は季節、緯度および経度により変化するが、南北 1 次元 EBM では経度平均した惑星表層の温度を求めするため、恒星放射フラックスは惑星の公転軌道上の位置および緯度の関数としてその日平均値を定式化する。地球型惑星の惑星アルベドと惑星放射には雲や雪氷が重要であるが雲量や積雪量の定式化は困難である。それゆえここでは惑星アルベドと惑星放射は大気分子による散乱と吸収のみを考慮し、雲の無い大気に覆われた惑星において N_2 分圧を固定し CO_2 分圧をパラメータと仮定して定式化する。ただし大気には飽和水蒸気圧分の H_2O が含まれているとする。地殻と海洋において温度が季節変化するのはある程度の深さまでの層であると考えられる。それゆえ地殻と海洋はその層の熱容量のみを考慮する。大気の熱容量

は大気の大質量とともに増すと考えられるため地表面気圧に比例すると仮定して定式化する。南北方向の熱輸送効率は、海洋が無い場合、大気の大質量とともに増すと考えられるため地表面気圧に比例すると仮定して定式化する。

目次

1	はじめに	1
1.1	目的	1
1.2	構成	2
2	南北 1 次元エネルギーバランスモデル	3
2.1	モデルの概要	3
2.2	基礎方程式の導出	3
2.3	恒星放射フラックス (S)	8
2.3.1	日平均の恒星放射フラックス (\bar{S}) の定式化	8
2.3.2	日平均の恒星放射フラックスの緯度分布	12
2.4	惑星アルベド (A)	18
2.4.1	実際の地球型惑星の全球アルベド	18
2.4.2	Caldeira and Kasting, 1992 モデル	19
2.4.3	Williams and Kasting, 1997 モデル	20
2.5	惑星放射フラックス (I)	20
2.5.1	大気が無い場合	21
2.5.2	Caldeira and Kasting, 1992 モデル	23
2.5.3	Williams and Kasting, 1997 モデル	25
2.6	惑星表層の熱容量 (C)	28

2.6.1	地殻の熱容量	28
2.6.2	大気の熱容量	30
2.6.3	海洋の熱容量	31
2.6.4	地表, 大気および海洋の熱容量の値の比較	32
2.7	南北方向の熱輸送効率 (D)	34
2.7.1	現在の地球における値	34
2.7.2	海洋が無い場合	34
3	詳説ノート	35
3.1	楕円運動の表現	35
3.1.1	楕円における 2 種類の極座標表示	35
3.1.2	ケプラー方程式	37
3.1.3	真近点離角 f の平均近点離角 M に関する展開	39
4	まとめ	42
A	Gaidos and Williams, 2004 部分訳	44
I	背景	45
II	モデル	47
B	球面三角形の余弦定理	48
C	陰関数の定理	51
I	展開係数 b_n	52

D	散乱, 吸収の効果の尺度	54
E	変数リスト	56

1 はじめに

1.1 目的

系外地球型惑星は様々な軌道要素, 赤道傾斜および大気と海洋の規模を持つと考えられている。公転運動に伴う惑星放射の季節変化にはそれらの情報が含まれている可能性がある。将来, 実際に系外地球型惑星の惑星放射の季節変化を直接観測することが可能となり, そのデータから系外地球型惑星の表層環境を明らかにすることができるかもしれない。そのためには様々な系外地球型惑星を想定して, それらの惑星放射の季節変化を理論的に予測しておく必要がある。したがってまずは惑星放射の季節変化を充分予測可能な南北 1 次元エネルギーバランスモデルの概要と定式化について理解する。

これまでに恒星のごく近くを周る木星型の系外惑星の直接撮像観測が成功している (Thalmann *et al.*, 2009)。将来には Terrestrial Planet Finder や Darwin などの宇宙望遠鏡によって, より小さく暗い天体である地球型の系外惑星 (系外地球型惑星) が放つ赤外線放射エネルギー (惑星放射) の変化を直接観測することも可能となると期待されている (Fridlund and Capaccioni, 2002)。惑星放射は惑星の表面温度に依存し, その季節変化の仕方は軌道要素, 赤道傾斜および大気と海洋の規模に依存していると考えられる。それゆえ惑星放射の季節変化の観測により, 系外地球型惑星の表層環境について知見を得ることができると期待される (Gaidos and Williams, 2004)。系外地球型惑星は軌道要素, 赤道傾斜および大気と海洋の規模が多様であると考えられるため, それによる表面温度と惑星放射の振る舞いの違いを明らかにする必要がある。

恒星放射を与えて惑星の表面温度と惑星放射を解くモデルは 4 つに分類される。より単純な順に紹介すると, 惑星全体の平均温度を解くボックスモデル, 1 次元的に鉛直方向の気温分布も同時に解く鉛直 1 次元モデル, 惑星表層の経度平均した温度と惑星放射について解く南北 1 次元エネルギーバランスモデル, 3 次元的に大気温度構造と運動について解く大循環モデルがある。各モデルにはそれぞれ利点と欠点があるため, より複雑なモデルを使用すれば良いという訳ではない。

系外地球型惑星に対して観測されるものは惑星放射を半球面について積分した値である。そのため空間解像度の高いモデル計算との直接対比は難しい。また惑星放射の季節変化の

特性を様々な表層環境に対して知るには, 多様な計算例が必要である. 南北 1 次元エネルギーバランスモデルは大循環モデルより単純で多数の計算を行いやすく物理を把握しやすいという利点があり, 惑星放射の季節変化を予測可能である. そのため今回は南北 1 次元エネルギーバランスモデルについて取り上げ, Gaidos and Williams, 2004 にしたがって概要と定式化の理解を目指す.

1.2 構成

2 章では南北 1 次元エネルギーバランスモデルの概要と定式化について述べる. 3 章では 2 章中に記述された式の導出などについて述べる. 4 章ではまとめを掲載する. 付録には Gaidos and Williams, 2004 の部分訳と本論文での補足を掲載する.

2 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

この章ではまず、南北 1 次元のエネルギーバランスモデルの概要について述べる (2.1 節)。次にその基礎方程式の導出を行う (2.2 節) さらに基礎方程式の各項を記述するための定式化について述べる (2.3–2.7 節)。

2.1 モデルの概要

エネルギーバランスモデルは実際の気候を単純化したモデルの 1 つである (e.g., North *et al.*, 1981)。その中でも南北 1 次元エネルギーバランスモデルは恒星放射を与えると惑星表層の経度平均した温度と惑星放射が求まるモデルである。ただし大気や海洋の運動については解かずエネルギーの収支のみを考える。一般的に恒星からの放射エネルギー (恒星放射) の吸収は緯度によっており大きな加熱を受ける緯度領域から小さな加熱しか受けていない緯度領域へと熱エネルギーが輸送されると考えられる。南北 1 次元エネルギーバランスモデルは大気と海洋の運動による南北方向への熱輸送を仮定しており、大まかに表面温度と惑星放射の季節変化を予測できる。なお系外地球型惑星に対して実際に観測されると期待される物理量は惑星放射を観測点から見える半球で積分した値の季節変化である。

南北 1 次元エネルギーバランスモデルはエネルギー保存則に基づくモデルであり、その基礎方程式は惑星表層における経度平均した単位地表面積、単位時間あたりの熱量の変化が、恒星放射の吸収による加熱率、惑星から射出される赤外線による冷却率および大気と海洋による南北方向の熱輸送の加熱率の収支と等しいことを表わす。ここで恒星放射の吸収による加熱率は恒星放射フラックスのうち大気上端に入射するものと大気上端で跳ね返されるものとの差であり、大気と海洋の熱輸送による加熱率は南北方向の温度勾配と熱輸送効率によって表わされる。

2.2 基礎方程式の導出

惑星表層の温度分布は経度方向に一様で自転軸に対して軸対称であると仮定し各緯度領域におけるエネルギー収支を考える (図 2.1 参照)。

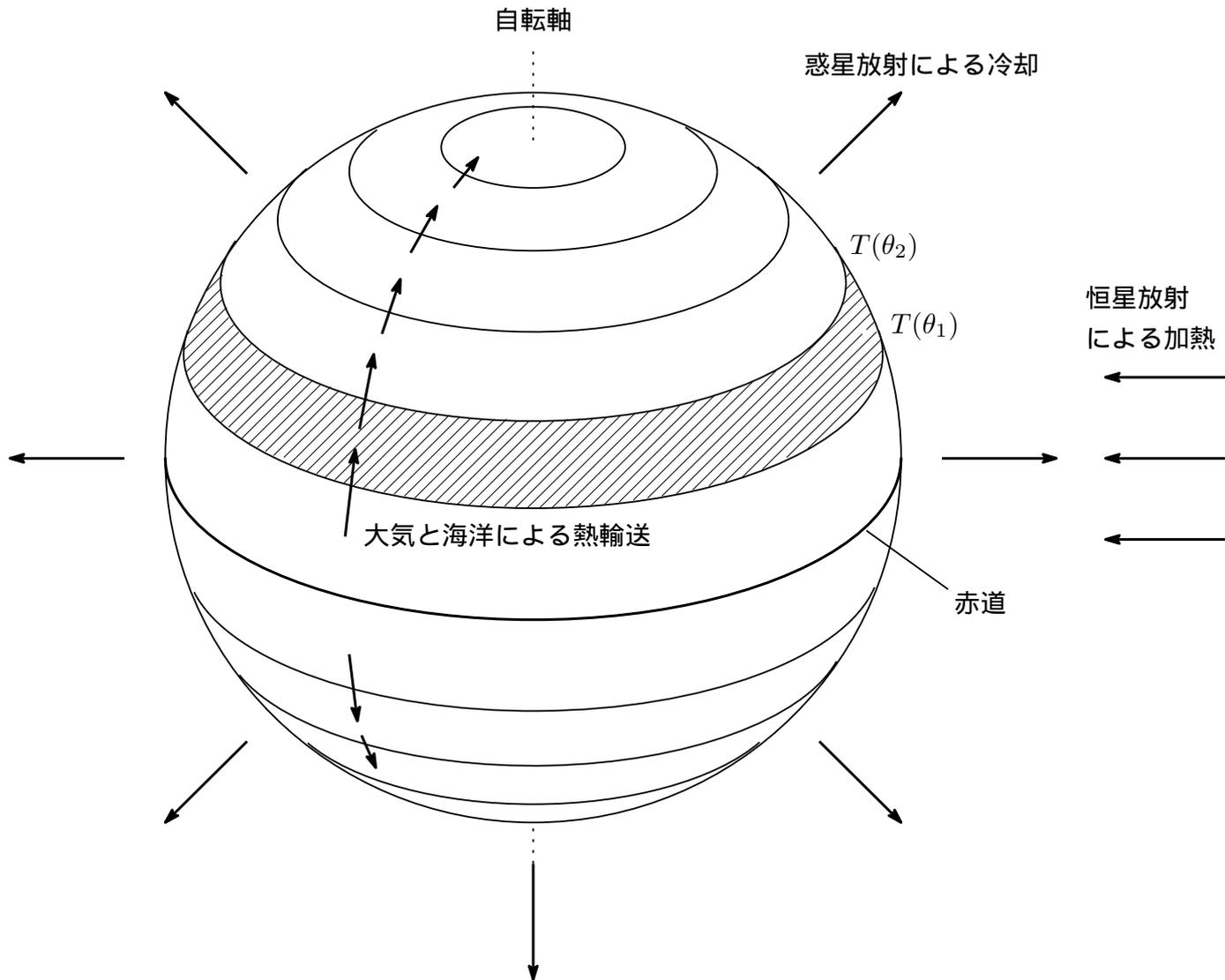


図 2.1 南北 1 次元エネルギーバランスモデルの模式図. 惑星表層の各緯度領域 (斜線部) におけるエネルギーの収支を考える. ただし惑星表層の温度分布は経度方向に一様で自転軸に対して軸対称であると仮定する. θ [rad] は緯度, $T(\theta)$ [K] は各緯度における惑星表層の経度平均した温度である.

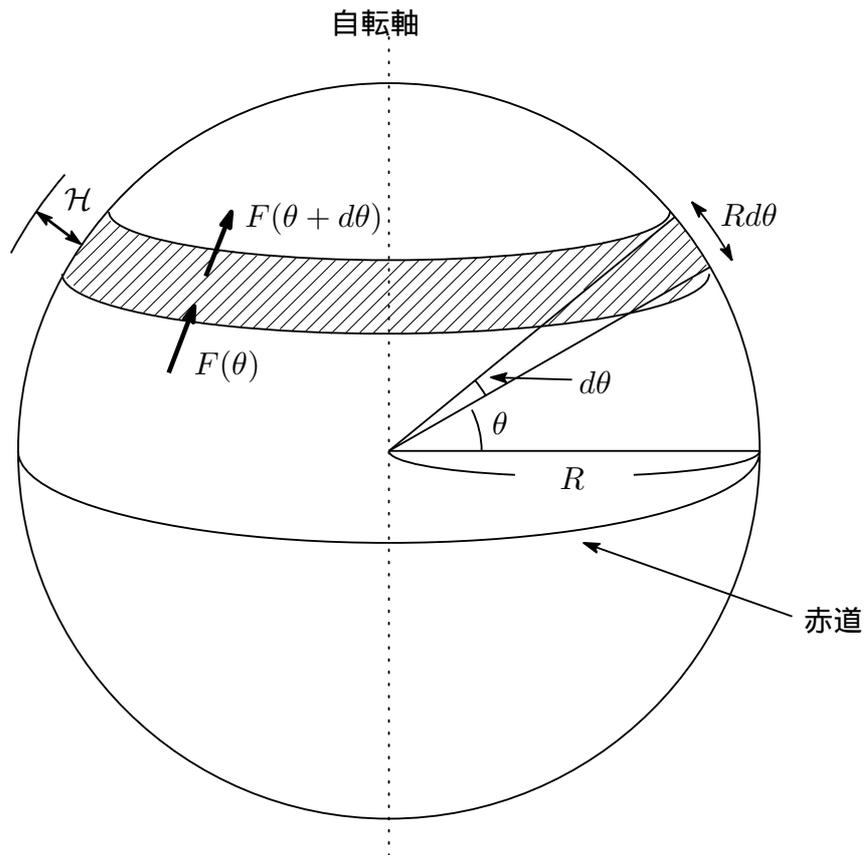


図 2.2 惑星表層におけるパラメータの関係. 斜線部は緯度 θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた領域である. ここで, θ [rad] は緯度, R [m] は惑星の半径, \mathcal{H} [m] は大気の厚さ, $F(\theta)$ [W m^{-2}] は θ を横切って領域へ流入する熱フラックス, $F(\theta + d\theta)$ [W m^{-2}] は $\theta + d\theta$ を横切って領域から流出する熱フラックスである.

まず南北方向の熱輸送による加熱量を定式化する. いま緯度を θ [rad], 各緯度における惑星表面の経度平均した温度を $T(\theta)$ [K] と置く. また θ と $\theta + d\theta$ で挟まれた緯度領域において θ を横切って単位地表線分, 単位時間あたりに流入する熱量を $F(\theta)$ [W m^{-1}] と置く (図 2.2 参照). $F(\theta)$ は緯度方向の温度勾配によると仮定して

$$F(\theta) = -\kappa(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \quad (2.1)$$

と表わす. ここで $\kappa(\theta)$ [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$] は熱輸送係数である. また θ を横切って $F(\theta)$ が通過する線分の全体の長さ $\mathcal{L}(\theta)$ [m] は

$$\mathcal{L}(\theta) = 2\pi R \cos \theta \quad (2.2)$$

と書ける. ここで R [m] は惑星の半径である. さらに $\theta + d\theta$ を横切って単位地表線分, 単位時間あたりに流出する熱量を $F(\theta + d\theta)$ [W m^{-1}] と置く. すると時間 Δt [s] の間に θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた緯度領域に流入する正味の熱量 $Q_D(\theta)$ [J] は

$$\begin{aligned} Q_D(\theta) &= (\text{流入する熱フラックス}) \times (\text{線分全体の長さ}) \times (\text{時間}) \\ &\quad - (\text{流出する熱フラックス}) \times (\text{線分全体の長さ}) \times (\text{時間}) \\ &= F(\theta) \mathcal{L}(\theta) \Delta t - F(\theta + d\theta) \mathcal{L}(\theta + d\theta) \Delta t \end{aligned} \quad (2.3)$$

と書ける. (2.3) 式に (2.1), (2.2) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} Q_D(\theta) &= 2\pi R \Delta t \left\{ \kappa(\theta + d\theta) \cos(\theta + d\theta) \frac{\partial T(\theta + d\theta)}{\partial \theta} - \kappa(\theta) \cos \theta \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right\} \\ &= 2\pi R \Delta t d\theta \left\{ \frac{\kappa(\theta + d\theta) \cos(\theta + d\theta) \frac{\partial T(\theta + d\theta)}{\partial \theta} - \kappa(\theta) \cos \theta \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta}}{(\theta + d\theta) - \theta} \right\} \\ &= 2\pi R \Delta t d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \kappa(\theta) \cos \theta \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる.

次に恒星放射の吸収による加熱量を定式化する. いま恒星から大気上端に入射する単位地表面積, 単位時間当たりの放射エネルギー量 (恒星放射フラックス) を S [W m^{-2}] と置く. 恒星放射の吸収による加熱量は恒星放射フラックスのうち大気上端に入射するものと大気上端で跳ね返されるものとの差である. 大気上端での恒星放射の反射率 (惑星アルベド) を A と置くと, 大気上端で跳ね返される恒星放射フラックスは SA と表わされる. すると

Δt の間に θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた緯度領域に入射する正味の熱量 $Q_S(\theta)$ [J] は

$$\begin{aligned} Q_S(\theta) &= (\text{入射する恒星放射フラックス}) \times (\text{面積}) \times (\text{時間}) \\ &\quad - (\text{跳ね返される恒星放射フラックス}) \times (\text{面積}) \times (\text{時間}) \\ &= S \times 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta \times \Delta t \\ &\quad - SA \times 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta \times \Delta t \\ &= 2\pi R^2 S(1 - A)\Delta t \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

と書ける. S と A の定式化については, それぞれ 2.3 節, 2.4 節で述べる.

次に惑星から射出される赤外放射 (惑星放射) による冷却量を定式化する. いま大気上端から宇宙空間へ射出される単位地表面積, 単位時間当たりの赤外線放射エネルギー量 (惑星放射フラックス) を I [W m^{-2}] と置く. すると Δt の間に θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた緯度領域から宇宙空間へ放出される正味の熱量 $Q_I(\theta)$ [J] は

$$\begin{aligned} Q_I(\theta) &= (\text{惑星放射フラックス}) \times (\text{面積}) \times (\text{時間}) \\ &= I \times 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta \times \Delta t \\ &= 2\pi R^2 I \Delta t \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

と書ける. I の定式化については 2.5 節で述べる.

最後に加熱により蓄えられるエネルギー量を定式化する. 表層において鉛直方向の温度上昇量は同じと仮定する. いま表層において比熱を c_p [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$], 密度を ρ [kg m^{-3}], 厚さを Δl [m] と置き, Δt の間に変化する温度を ΔT と置く. すると θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた領域に蓄えられる正味の熱量 $Q_C(\theta)$ [J] は

$$\begin{aligned} Q_C(\theta) &= (\text{比熱}) \times (\text{質量}) \times (\text{温度変化量}) \\ &= c_p \times \rho \cdot 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta \cdot \Delta l \times \Delta T \\ &= 2\pi \rho c_p R^2 \Delta l \Delta T \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

と書ける.

各緯度領域においてエネルギー保存則を適用すると

$$Q_C(\theta) = Q_S(\theta) - Q_I(\theta) + Q_D(\theta) \quad (2.8)$$

が成り立つ. 上式に (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) 式を代入して整理し, 微分形式で表わすと

$$\rho c_p \Delta l \frac{\partial T}{\partial t} = S(1 - A) - I + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\kappa(\theta)}{R} \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} \quad (2.9)$$

となる. ここで表層の単位面積あたりの熱容量を $C [\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1}]$, 南北方向の熱輸送効率を $D [\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$ と置き

$$C \equiv \rho c_p \Delta l \quad (2.10)$$

$$D \equiv \frac{\kappa(\theta)}{R} \quad (2.11)$$

と定義すると, (2.9) 式は

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = S(1 - A) - I + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (2.12)$$

となる. C , D の定式化については, それぞれ 2.6 節, 2.7 節で述べる. (2.12) 式のことを南北 1 次元エネルギーバランス方程式という. 次節以降では S , A , I , C , D の定式化について述べる.

2.3 恒星放射フラックス (S)

惑星表層は恒星からの放射エネルギーによって加熱される. 大気上端に入射する単位面積, 単位時間あたりの放射エネルギーを恒星放射フラックスという. 恒星放射フラックスは季節, 緯度および経度により変化する. 南北 1 次元エネルギーバランスモデルでは自転軸に対して軸対称な惑星表層の経度平均した温度を求めるため, 恒星放射フラックスには惑星の公転軌道上の位置および緯度の関数としてその日平均値を与える.

この節ではまず Williams and Kasting, 1997; Gaidos and Williams, 2004 にしたがって日平均の恒星放射フラックスの定式化を行う (2.3.1 節). 次に離心率と赤道傾斜によるその緯度分布の季節変化への影響を調べる (2.3.2 節).

2.3.1 日平均の恒星放射フラックス (\bar{S}) の定式化

まず恒星放射の入射角の効果を考える. いま大気上端を覆うある面積を $A_1 [\text{m}^2]$ と置き, A_1 を恒星放射に垂直な面へと射影した面積を $A_2 [\text{m}^2]$ と置く (図 2.3 参照). A_1 上における恒星放射フラックスを $q_1 [\text{W m}^{-2}]$ とし, 射影した面上における恒星放射フラックスを $q_2 [\text{W m}^{-2}]$ とすると

$$q_1 A_1 = q_2 A_2 \quad (2.13)$$

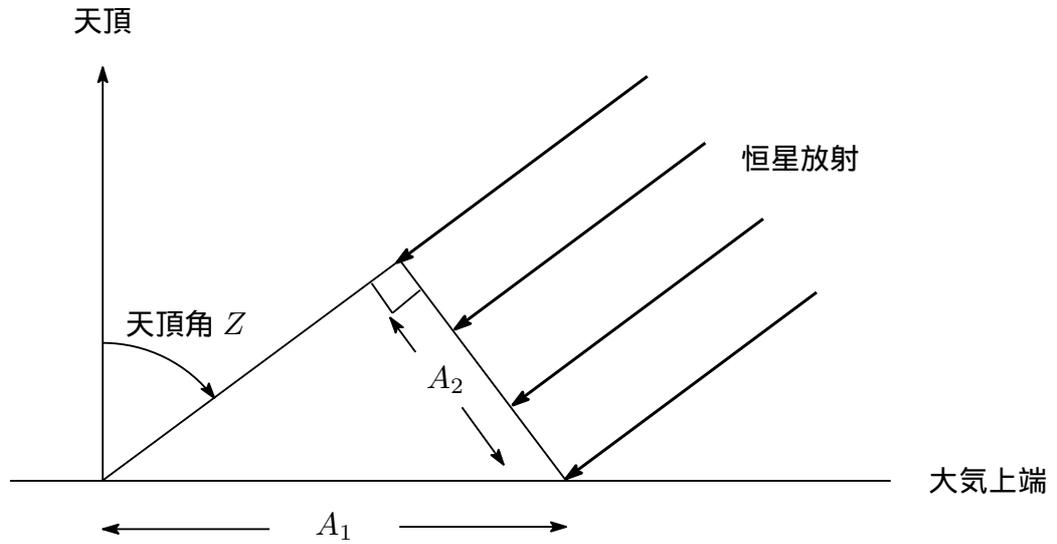


図 2.3 恒星の天頂角 Z と大気上端における恒星放射フラックスの関係. A_1 [m^2] は大気上端を覆うある面積, A_2 [m^2] は A_1 を恒星放射に垂直な面へと射影した面積である.

という関係が成り立つ. また天頂と恒星のなす角度である恒星の天頂角 (図 2.4 参照) を Z と置くと

$$A_2 = A_1 \cos Z \quad (2.14)$$

という関係が成り立つ. (2.13), (2.14) 式から, 大気上端における恒星放射フラックスは

$$q_1 = q_2 \cos Z \quad (2.15)$$

と表わされる. $\cos Z$ は, 惑星の自転運動に伴って変化し, 惑星を中心とした天球上において, 天頂, 天の北極および恒星の位置で作られる球面三角形 (図 2.4 参照) に球面三角形の余弦定理 (付録 B 参照) を用いると

$$\begin{aligned} \cos Z &= \cos(\pi/2 - \theta) \cos(\pi/2 - \delta) + \sin(\pi/2 - \theta) \sin(\pi/2 - \delta) \cos h \\ &= \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos h \end{aligned} \quad (2.16)$$

と表わすことができる. ここで θ は緯度, h は時角^{*1}, δ は赤緯^{*2}である. 赤緯は

$$\sin \delta = -\sin \delta_0 \cos(L + \pi/2) \quad (2.17)$$

$$L = f + L_p \quad (2.18)$$

*1 恒星が南中したときから回転した角度.

*2 恒星放射と惑星の赤道面のなす角度.

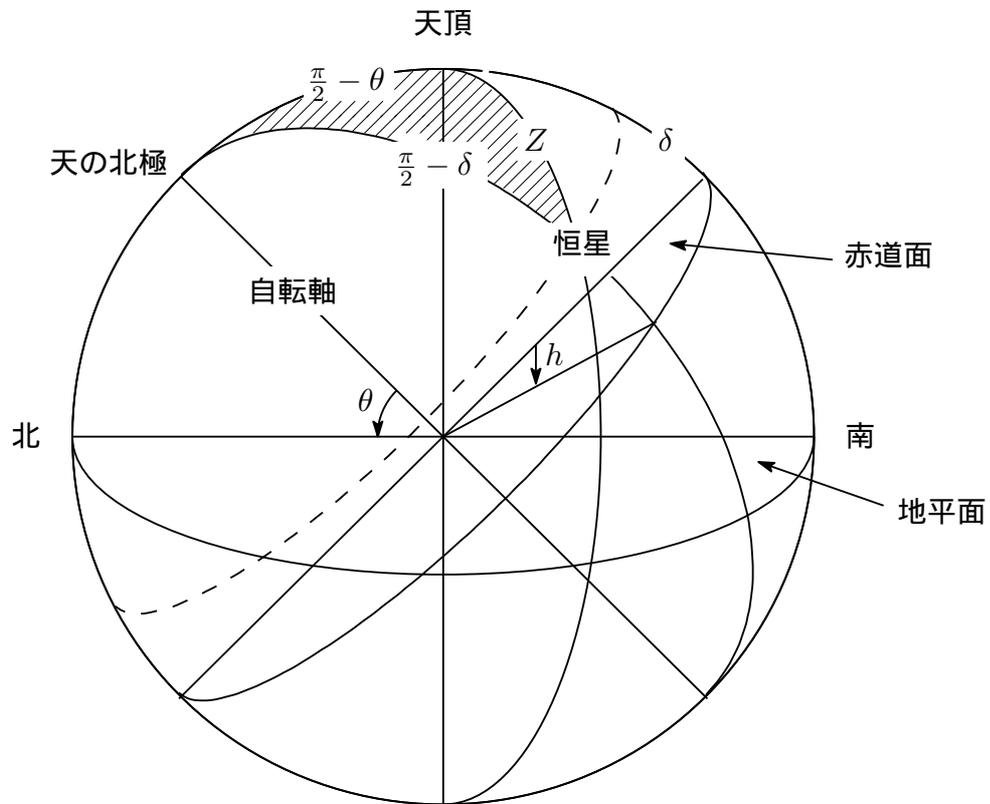


図 2.4 惑星を中心とした天球における角度の関係. ここで θ は惑星の緯度, δ は恒星の赤緯, Z は恒星の天頂角, h は恒星の時角である. 点線は恒星の移動経路である. 斜線部分は天頂, 恒星の位置, 天の北極で作られる球面三角形である. ここで球面三角形の角度のうち天頂, 天の北極, 恒星で作られる角度は時角 h となっている.

と表わされる. ここで δ_0 は赤道傾斜, L は黄経, f は真近点離角, L_p は近日点黄経である (図 2.5 参照).

次に夜間は恒星放射が当たらないため昼の長さを考慮する必要がある. いま日の入りの時刻 ($Z = \pi/2$) における時角 h を H と置く. すると昼の長さは $2H$ で表わされる. (2.16) 式に $Z = \pi/2, h = H$ を代入して整理すると

$$\cos H = -\tan \theta \tan \delta, \quad (0 < H < \pi) \quad (2.19)$$

となる. 逆三角関数を用いると, H は

$$H = \cos^{-1}(-\tan \theta \tan \delta), \quad (0 < H < \pi) \quad (2.20)$$

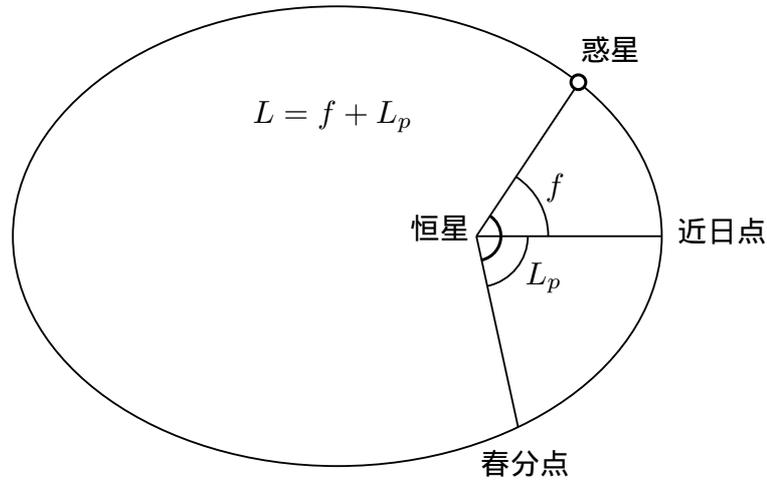


図 2.5 惑星の公転軌道上における黄経 L , 近日点経度 L_p , 真近点離角 f の位置関係.

となる. 惑星表層の各緯度領域において恒星放射が当たるのは $2H/2\pi$ の期間であるから (2.15) 式より, 大気上端に入射する恒星放射フラックス $S [\text{W m}^{-2}]$ は

$$S = q_2 \left(\frac{2H}{2\pi} \right) \cos Z \quad (2.21)$$

と表わされる.

さらに日平均の恒星放射フラックスを求める. つまり (2.21) 式における $\cos Z$ の日平均を求めればよい. いま $\mu \equiv \cos Z$ と置き $h = -H$ から $+H$ まで平均すると, μ の日平均 $\bar{\mu}$ は

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \frac{\int_{-H}^H \cos Z \, dh}{\int_{-H}^H dh} \\ &= \frac{\int_{-H}^H (\sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos h) \, dh}{\int_{-H}^H dh} \\ &= \frac{2H \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \, 2 \sin H}{2H} \\ &= \left(\sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \frac{\sin H}{H} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

と表わされる. 惑星の公転運動が真円軌道である場合は (2.21) 式の $\cos Z$ に (2.22) 式を

代入して, 日平均の恒星放射フラックス \bar{S} は

$$\begin{aligned}\bar{S} &= q_2 \left(\frac{2H}{2\pi} \right) \bar{\mu} \\ &= \frac{q_2}{\pi} (H \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \sin H)\end{aligned}\quad (2.23)$$

と表わされる. 上式において $H = \pi$ であれば常に水平線上に恒星が現れている場合である.

また惑星が楕円軌道である場合は放射の強さが距離の 2 乗に反比例するため, 日平均の恒星放射フラックスは

$$\bar{S} = \frac{q_0}{\pi} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (H \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \sin H)\quad (2.24)$$

と表わされる. ここで a [m] は長半径, r [m] は焦点 (恒星) を中心とした動径, q_0 [W m^{-2}] は長半径における恒星フラックスである. r を離心率 e を用いて表わすと (3.1.1 節参照), 上式は

$$\bar{S} = \frac{q_0}{\pi} \left(\frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \right)^2 (H \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \sin H)\quad (2.25)$$

となる. しかし f の時間変化量は軌道上の位置により増減するため計算には不便である. したがって f を時間 t の関数として表わしたい. e^5 以降の項は無視すると, $\cos f$ は

$$\begin{aligned}\cos f &\approx -e + \left(1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{25}{192}e^4 \right) \cos M \\ &\quad + \left(e - \frac{4}{3}e^3 \right) \cos 2M + \left(\frac{9}{8}e^2 \cos 3M - \frac{225}{128}e^4 \right) \cos 3M \\ &\quad + \frac{4}{3}e^3 \cos 4M + \frac{625}{384}e^4 \cos 5M + O(e^5)\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$M = n(t - t_0)\quad (2.27)$$

$$n = \frac{2\pi}{P}\quad (2.28)$$

と表わされる (3.1 節参照). ここで M は平均近点離角, n [s^{-1}] は平均運動, P [s] は公転周期である.

2.3.2 日平均の恒星放射フラックスの緯度分布

この節では日平均の恒星放射フラックス \bar{S} の緯度分布の季節変化に対する離心率 e と赤道傾斜 δ_0 の値による影響について述べる.

図 2.6 と図 2.7 では e の値だけを変えた場合の \bar{S} の緯度分布の変化を図示しており, それぞれ塗り分けを行う値の範囲を変えている. 長半径での放射強度は $q_0 = 1360 \text{ W m}^{-2}$, 赤道傾斜は $\delta_0 = 23.4\pi/180$, 近日点経度は $L_p = \pi/2$ としている. 惑星の公転速度は恒星に近いほど速くなるため e の値が大きくなほど強い恒星放射を受ける期間が短くなる (図 2.6 参照). また e の値が大きくなほど恒星放射の季節変化の振幅も大きくなる (図 2.7 参照).

図 2.8 と図 2.9 では δ_0 の値だけを変えた場合の \bar{S} の緯度分布の変化を図示しており, それぞれ塗り分けを行う値の範囲を変えている. 長半径での放射強度は $q_0 = 1360 \text{ W m}^{-2}$, 離心率は $e = 0.0$, 近日点経度は $L_p = \pi/2$ としている. $\delta_0 = 0$ では恒星放射が季節変化しない (図 2.8 左上参照). また δ_0 の値が大きくなほど恒星放射の季節変化の振幅も大きくなる (図 2.9 参照).

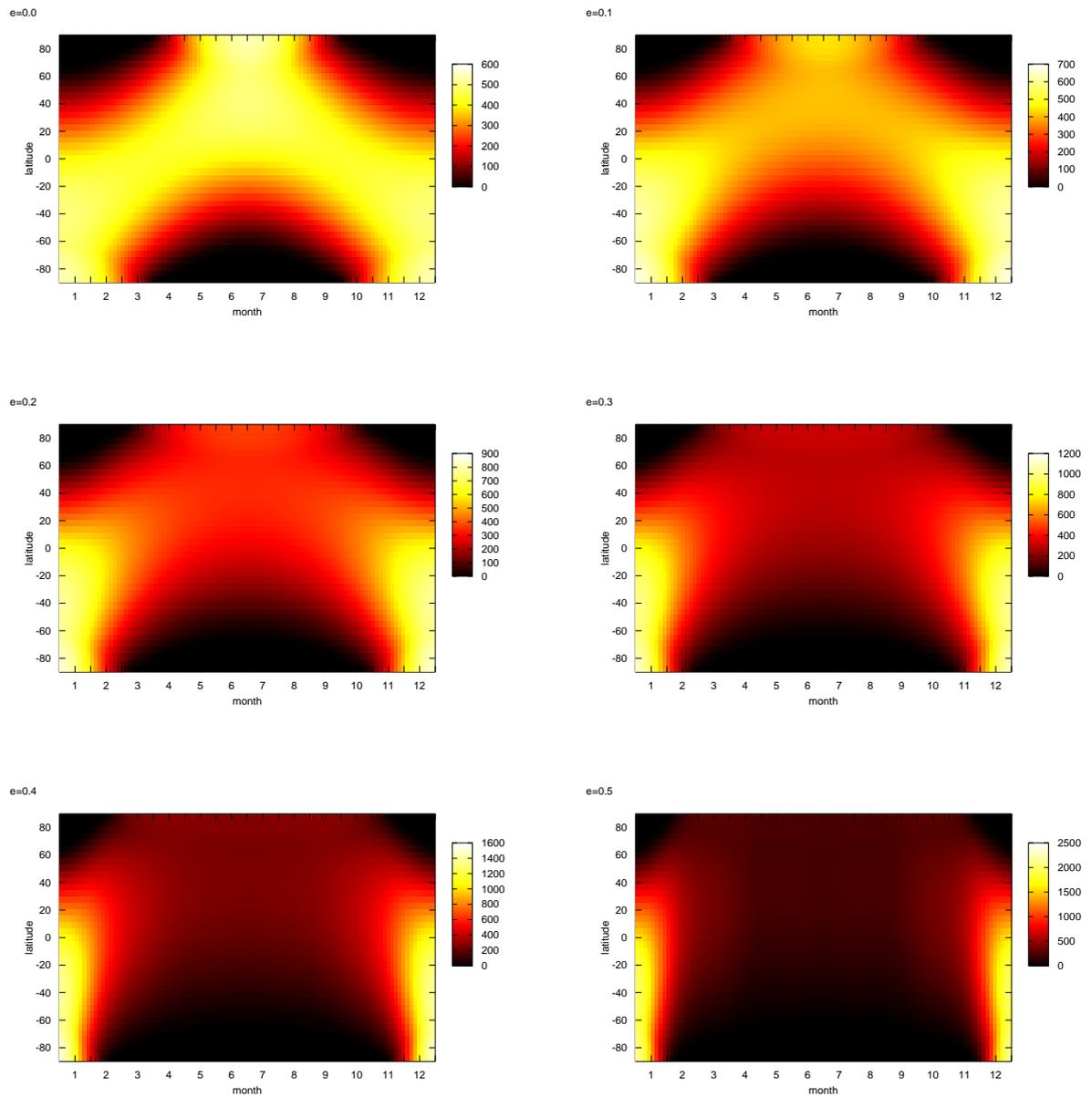


図 2.6 離心率 e の値を変えた場合の日平均の恒星放射フラックス \bar{S} [W m²] の緯度分布の季節変化 (塗り分けを行う値の範囲が異なる場合).

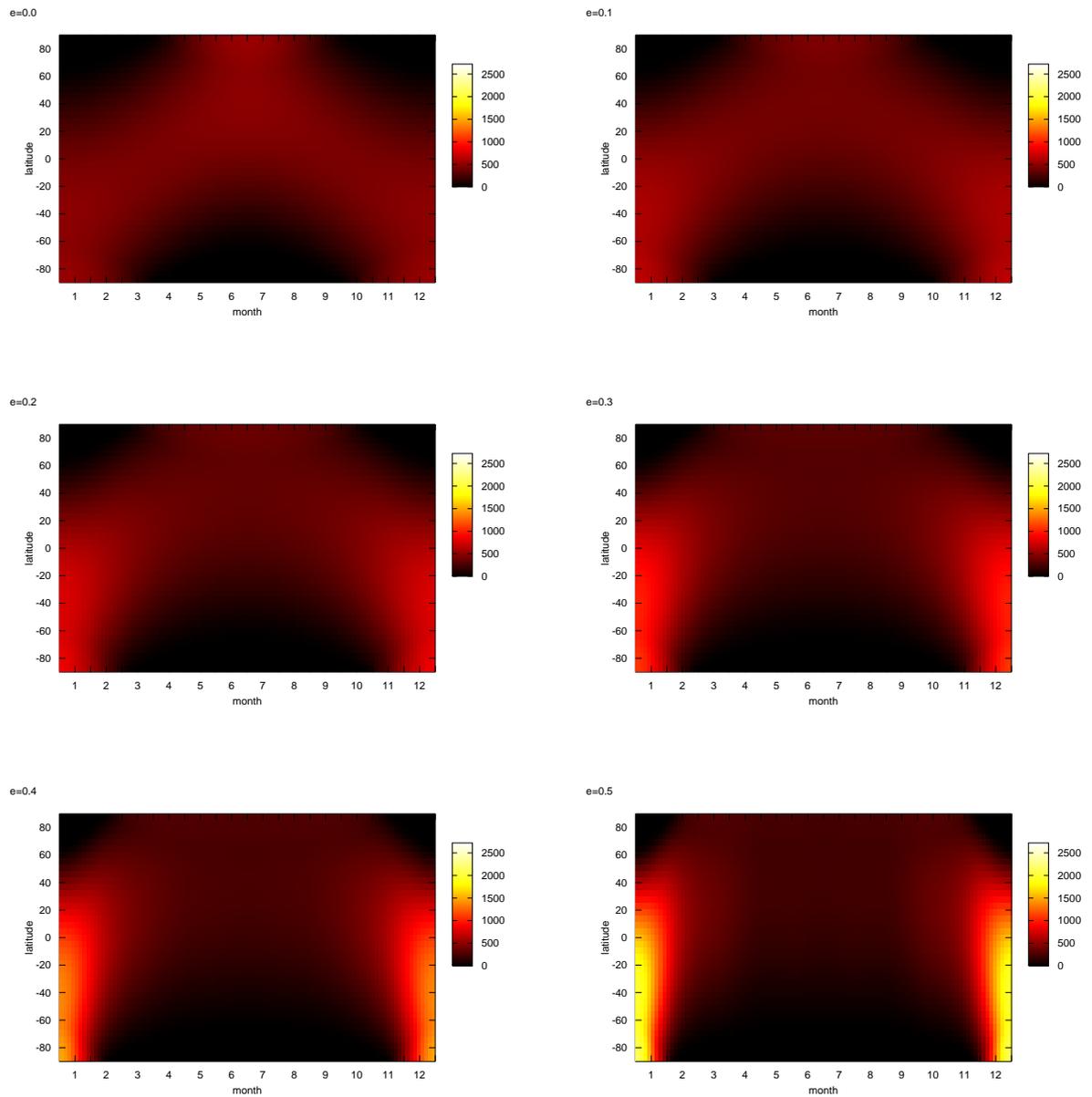


図 2.7 離心率 e の値を変えた場合の日平均の恒星放射フラックス \bar{S} [W m²] の緯度分布の季節変化 (塗り分けを行う値の範囲が同じ場合).

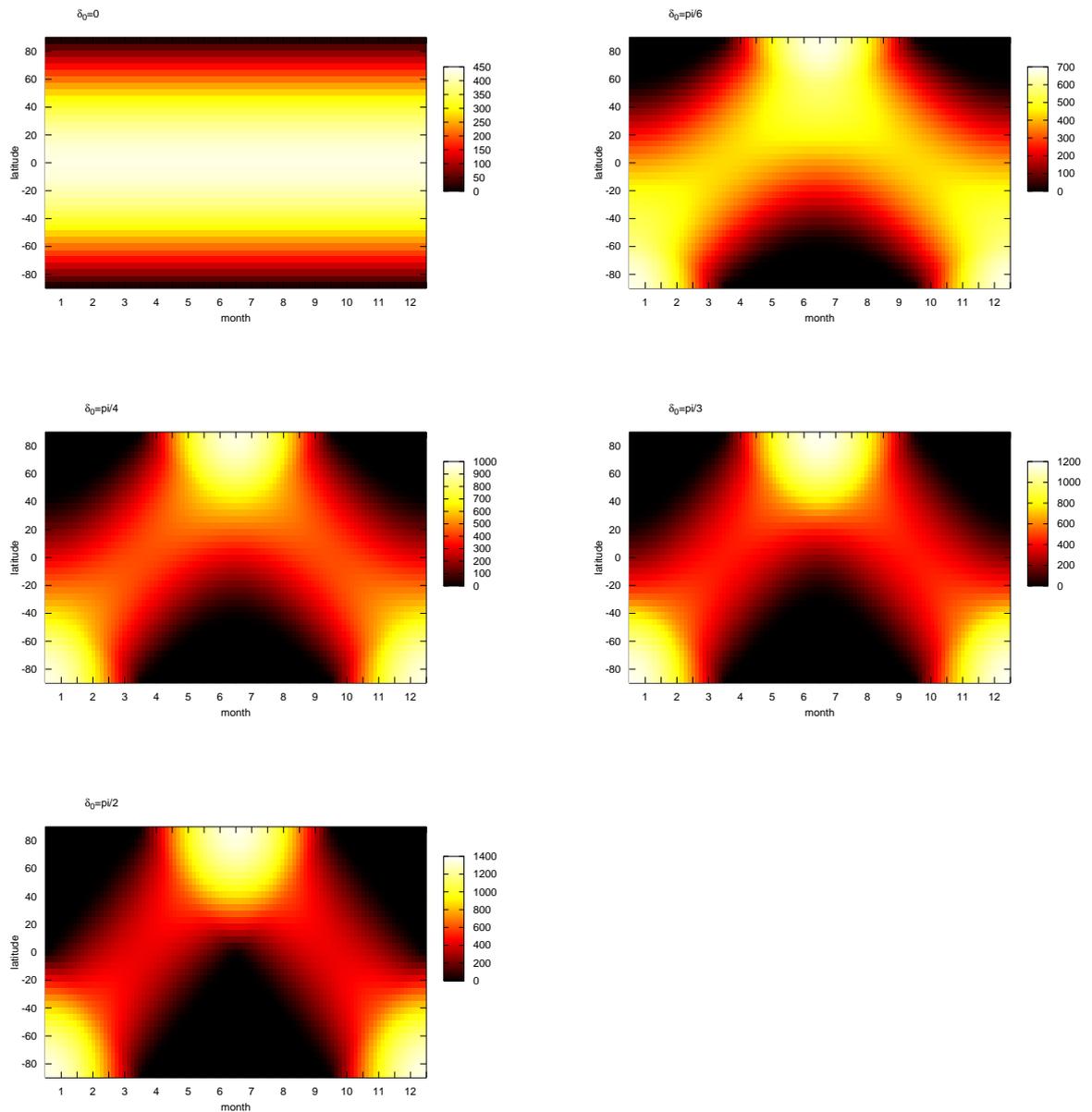


図 2.8 赤道傾斜 δ_0 の値を変えた場合の日平均の恒星放射フラックス \bar{S} [W m²] の緯度分布の季節変化 (塗り分けを行う値の範囲が異なる場合).

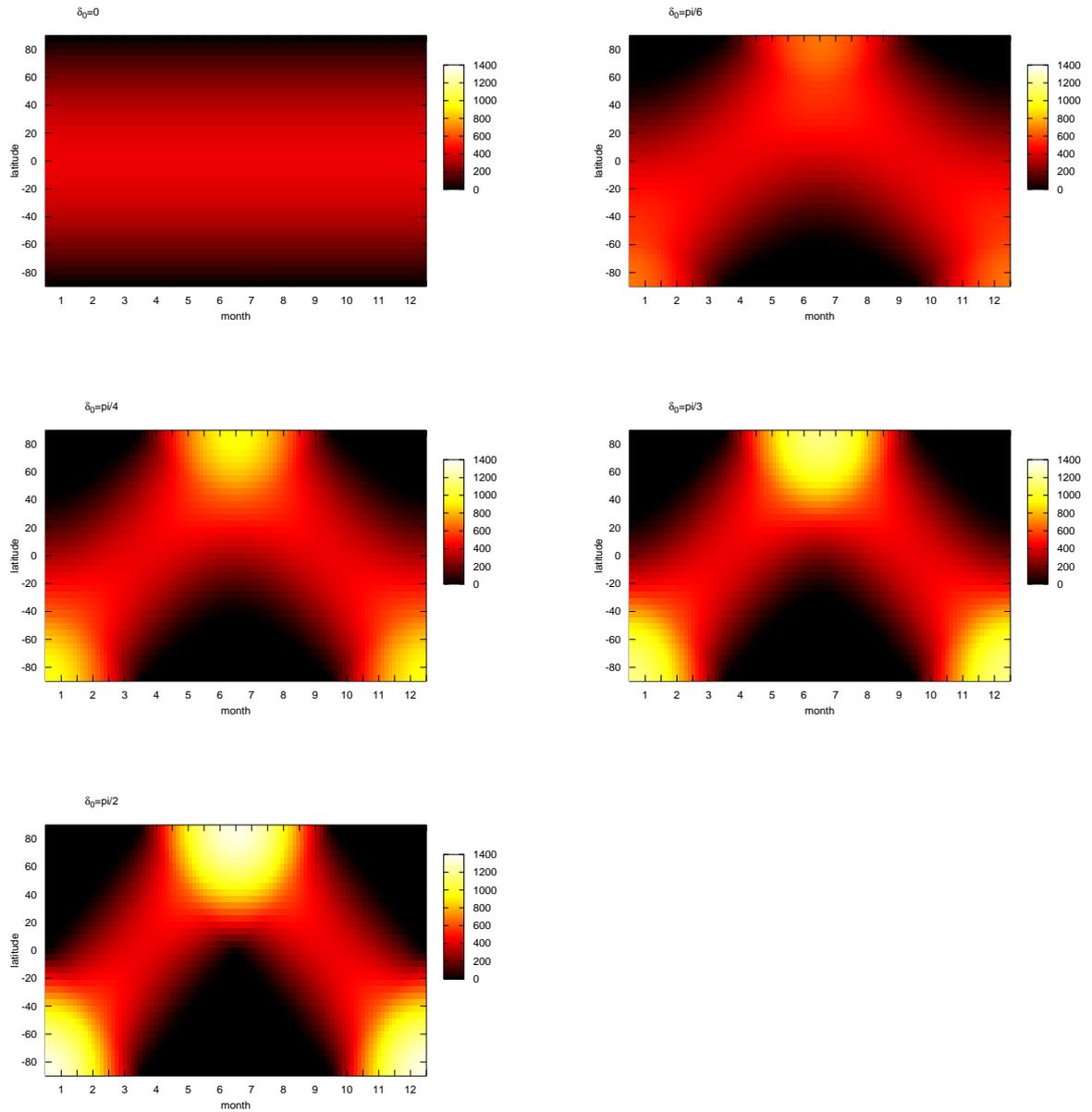


図 2.9 赤道傾斜 δ_0 の値を変えた場合の日平均の恒星放射フラックス \bar{S} [W m^2] の緯度分布の季節変化 (塗り分けを行う値の範囲が同じ場合).

2.4 惑星アルベド (A)

ある物体に放射エネルギーが入射するとき一部は物体の表面で反射され、一部は物体の表面に吸収され、残りは物体を透過する。入射する放射量に対する反射される放射量の割合のことを惑星科学ではアルベドと呼ぶ。一般的に雲や氷雪など色が白い物質が多いほどアルベドは増加する。

惑星アルベドは大気上端に入射する恒星放射エネルギーが大気中の気体分子、雲および地表面などによって散乱、反射され宇宙空間に跳ね返される割合である。惑星アルベドは大気中を恒星放射が通過する距離^{*3}、大気組成および雲量などに依存する。しかし南北 1 次元エネルギーバランスモデルには、基礎方程式を解析的に解くことが陽になるため、定数である全球アルベドが採用されることがある (e.g., Gaidos and Williams, 2004)。

この節ではまず実際の惑星における全球アルベドについて述べる (2.4.1 節)。次に雲が無い N_2 - CO_2 - H_2O 大気に覆われた惑星のアルベドの定式化について述べる (2.4.2 節, 2.4.3 節)。

2.4.1 実際の地球型惑星の全球アルベド

全球アルベドは惑星アルベドの全球平均値であり、観測による値は現在の地球が 0.30、火星が 0.16、金星が 0.78 である (小倉 義光, 1999)。実際の惑星における全球アルベドと地表面気圧の値から、大気の総質量や雲量の増加とともに全球アルベドの値は大きくなると考えられる (表 2.1 参照)。

表 2.1 太陽系の地球型惑星における全球アルベドと地表面気圧の値 (小倉 義光, 1999)

	全球アルベド	地表面気圧 (気圧)
金星	0.78	90.
地球	0.30	1.
火星	0.16	0.006

^{*3} 恒星の天頂角 (図 2.3, 図 2.4 参照) に依存する。

2.4.2 Caldeira and Kasting, 1992 モデル

アルベドは、恒星放射エネルギーが通過する距離^{*4}が長いほど、大気中の気体分子による散乱と吸収が起こるため、増加する。また大気組成、雲量および積雪量によっても散乱、吸収の振る舞いが異なるため惑星アルベドは影響を受ける。しかし雲量および積雪量の定式化は困難である。

これまでのところ惑星アルベドと惑星放射は、雲による効果は無視し、大気分子による散乱と吸収のみを考慮して、CO₂ 分圧と表面温度の関数として定式化が行われている (e.g., Caldeira and Kasting, 1992; Williams and Kasting, 1997)。ただし N₂ 分圧 1.0 bar に固定し、大気には飽和水蒸気圧分の H₂O が含まれているとする。また惑星アルベドには天頂角と地表アルベドに対する依存性も考慮する。CO₂ はレイリー散乱断面積^{*5}が N₂ の 2.5 倍以上なためアルベドの増加に大きく貢献する H₂O はレイリー散乱断面積は大きい近赤外波長においては良く吸収も起こす。現在の地球における酸素水準は植物の光合成に由来すると考えられ、O₂ は非極性分子であり散乱と吸収への寄与が小さいため、全て N₂ に置き換える。

Caldeira and Kasting, 1992 にしたがって、対流圏全体に H₂O が飽和してしており H₂O を凝結成分^{*6}、CO₂ および N₂ を非凝結成分と仮定する。さらに惑星平均の恒星放射フラックス ($q_0/4$) を与えて Kasting and Ackerman, 1986; Kasting, 1988, 1991 において用いられた鉛直 1 次元放射対流平衡モデルを解きフィッティングを行う。すると惑星アルベドは、 $194\text{ K} < T < 303\text{ K}$, $10^{-4}\text{ bar} < p < 2\text{ bar}$ において、

$$\begin{aligned}
 A = & -0.6711 + 1.573a_s - 0.01988p + 0.005749T + 0.03815\bar{\mu} \\
 & - 0.1003a_s p - 0.002478a_s T - 0.0006519a_s \bar{\mu} \\
 & + 0.0001603pT - 0.0001957p\bar{\mu} - 0.0001123T\bar{\mu} \\
 & - 0.1846a_s^2 + 0.01747p^2 - 0.00001143T^2 + 0.009790\bar{\mu}^2 \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

と表わされる。ここで p [bar] は CO₂ 分圧、 T [K] は表面温度、 $\bar{\mu}$ は恒星の天頂角 Z の余弦の日平均^{*7}、 a_s は地表面アルベドである。ただし恒星放射フラックスでの議論と同様に

^{*4} 恒星の天頂角により決まる。天頂角は図 2.3, 図 2.4 参照。

^{*5} レイリー散乱などの効果は散乱断面積で評価される。付録 D 参照。

^{*6} 温度により濃度が変化する大気成分。

^{*7} (2.22) 式参照。

(2.3 節参照), 南北 1 次元エネルギーバランスモデルでは惑星表層の経度平均した温度を求めるため, 惑星アルベドも恒星の天頂角の効果は日平均として考慮している.

2.4.3 Williams and Kasting, 1997 モデル

Williams and Kasting, 1997 にしたがって, 2.4.2 節と同様の仮定をおき, かつ成層圏が等温であると仮定する. すると惑星アルベドは, $190 \text{ K} < T < 360 \text{ K}$, $10^{-5} \text{ bar} < p < 10 \text{ bar}$ において,

(i) $190 \text{ K} < T < 280 \text{ K}$ のとき

$$\begin{aligned}
 A = & -6.8910 \times 10^{-1} + 1.0460a_s + 7.8054 \times 10^{-3}T \\
 & - 2.8373 \times 10^{-3}p - 2.8899 \times 10^{-1}\bar{\mu} - 3.7412 \times 10^{-2}a_s p \\
 & - 6.3499 \times 10^{-3}\bar{\mu}p + 2.0122 \times 10^{-1}a_s\bar{\mu} - 1.8508 \times 10^{-3}a_s T \\
 & + 1.3649 \times 10^{-4}\bar{\mu}T + 9.8581 \times 10^{-5}pT + 7.3239 \times 10^{-2}a_s^2 \\
 & - 1.6555 \times 10^{-5}T^2 + 6.5817 \times 10^{-4}p^2 + 8.1218 \times 10^{-2}\bar{\mu}^2
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

(ii) $280 \text{ K} < T < 370 \text{ K}$ のとき

$$\begin{aligned}
 A = & 1.1082 + 1.5172a_s - 5.7993 \times 10^{-3}T \\
 & + 1.9705 \times 10^{-2}p - 1.8670 \times 10^{-1}\bar{\mu} - 3.1355 \times 10^{-2}a_s p \\
 & - 1.0214 \times 10^{-2}\bar{\mu}p + 2.0986 \times 10^{-1}a_s\bar{\mu} - 3.7098 \times 10^{-3}a_s T \\
 & - 1.1335 \times 10^{-4}\bar{\mu}T + 5.3714 \times 10^{-5}pT + 7.5887 \times 10^{-2}a_s^2 \\
 & + 9.2690 \times 10^{-6}T^2 - 4.1327 \times 10^{-4}p^2 + 6.3298 \times 10^{-2}\bar{\mu}^2
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

と表わされる. ここで上式が $T = 280 \text{ K}$ で分割されている理由は, 全体の $190 \text{ K} < T < 370 \text{ K}$ に対してフィッティングの精度を上げるためである.

2.5 惑星放射フラックス (I)

惑星表層は赤外線として宇宙空間へ射出される放射エネルギーによって冷却される. 大気上端から射出される単位面積, 単位時間あたりの放射エネルギー量を惑星放射フラックスという. 惑星放射フラックスは表面温度, 大気組成および大気の総質量により変化する. なお系外地球型惑星に対して実際に観測されると期待される物理量は惑星放射を観測点から見える半球面について積分した値である.

アルベドでの議論と同様に, 南北 1 次元エネルギーバランスモデルでは, 基礎方程式を解析的に解くことが陽になるため, 惑星放射フラックスを表面温度の関数としてしばしば $I(T) = B_1 + B_2T$ で表わされる古典的な線形モデルが採用される (e.g., Caldeira and Kasting, 1992; North *et al.*, 1981). しかし基礎方程式を数値的に解く場合には I は T の非線形モデルが採用されることもある (e.g., Williams and Kasting, 1997).

この節ではまず, 大気が無い場合の定式化を行う (2.5.1 節). 次に, 雲による効果は無視し, 大気分子による散乱と吸収のみを考慮して, CO_2 分圧と表面温度の関数とした定式化について述べる (2.5.2 節, 2.5.3 節).

2.5.1 大気が無い場合

大気が無い場合は惑星放射はほぼ黒体放射であると見なすことができる. したがってステファン・ボルツマンの法則より, 惑星放射フラックスは

$$I(T) = \sigma T^4 \quad (2.32)$$

と表わされる. ここで $\sigma [\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}]$ はステファン・ボルツマン定数である. また基礎方程式を解析的に解くことが容易になるため黒体放射の有効放射温度*⁸付近での一次近似を求める. テイラー展開により有効放射温度 $T_e [\text{K}]$ 付近で一次近似すると (2.32) 式は

$$I(T) \approx B_1 + B_2T \quad (2.33)$$

$$B_1 = -3\sigma T_e^4 \quad (2.34)$$

$$B_2 = 4\sigma T_e^3 \quad (2.35)$$

となる. 地球の有効放射温度 $T_e = 255 \text{ K}$ では上式の定数部分の値は

$$\begin{aligned} B_1 &= -3 \times (5.67 \times 10^{-8}) \times 255^4 \\ &= -719 \text{ W m}^{-2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= 4 \times (5.67 \times 10^{-8}) \times 255^3 \\ &= 3.76 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる. 黒体放射とその一次近似は温度とともに単調に増加する (図 2.10).

*⁸ 恒星放射と惑星放射のつり合いで決まる温度.

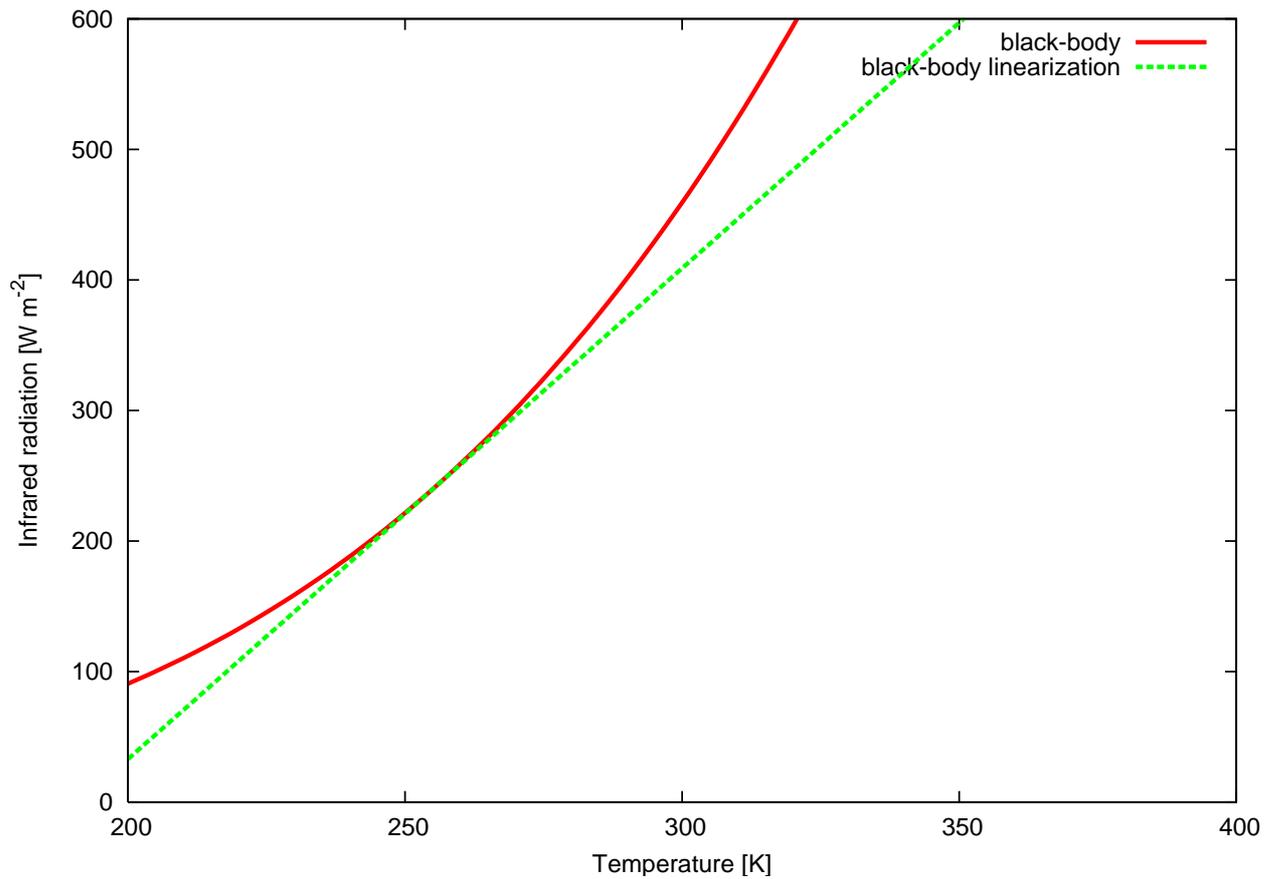


図 2.10 黒体放射 (2.32 式) と有効放射温度 $T_e = 255$ K 付近における黒体放射の一次近似 (2.33 式) の比較. 縦軸は惑星放射フラックス I [W m^{-2}] であり, 横軸は惑星の表面温度 T [K] である.

2.5.2 Caldeira and Kasting, 1992 モデル

惑星放射の一部は大気中の気体分子により散乱, 吸収される (大気の温室効果). よって実際の惑星放射は黒体放射とずれが生じる. 現在の地球大気の温室効果への寄与のうち, 約六割を H_2O , 約三割を CO_2 が占めている. 系外地球型惑星においても大気中に安定に存在できる H_2O と CO_2 が最も重要であると予想される. それゆえ惑星放射はアルベドでの議論と同様に, 雲による効果は無視し, 大気分子による散乱と吸収のみを考慮して, CO_2 分圧と表面温度の関数として定式化が行われている.

Caldeira and Kasting, 1992 にしたがって, 2.4.2 節と同様に仮定しフィッティングを行う. すると惑星放射フラックスは, $10^{-4} \text{ bar} < p < 2 \text{ bar}$, $194 \text{ K} < T < 303 \text{ K}$ において,

$$I(T) = B_1 + B_2 T \quad (2.38)$$

$$B_1(\varphi) = -326.4 + 9.161\varphi - 3.164\varphi^2 + 0.5468\varphi^3 \quad (2.39)$$

$$B_2(\varphi) = 1.953 - 0.04866\varphi + 0.01309\varphi^2 - 0.002577\varphi^3 \quad (2.40)$$

と表わされる. ここで $\varphi = \ln(p/p_0)$ であり, p_0 [bar] は基準面である 300 ppm の濃度の CO_2 分圧である. したがって p が 330 ppm の濃度の CO_2 分圧であるときは $\varphi = \ln(330/300)$ であるから (2.39), (2.40) 式の値は

$$B_1 = -325.6 \text{ W m}^{-2} \quad (2.41)$$

$$B_2 = 1.949 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (2.42)$$

となる. 大気がある場合は, 温室効果によって, 惑星放射の値が黒体放射の場合より低下する (図 2.11).

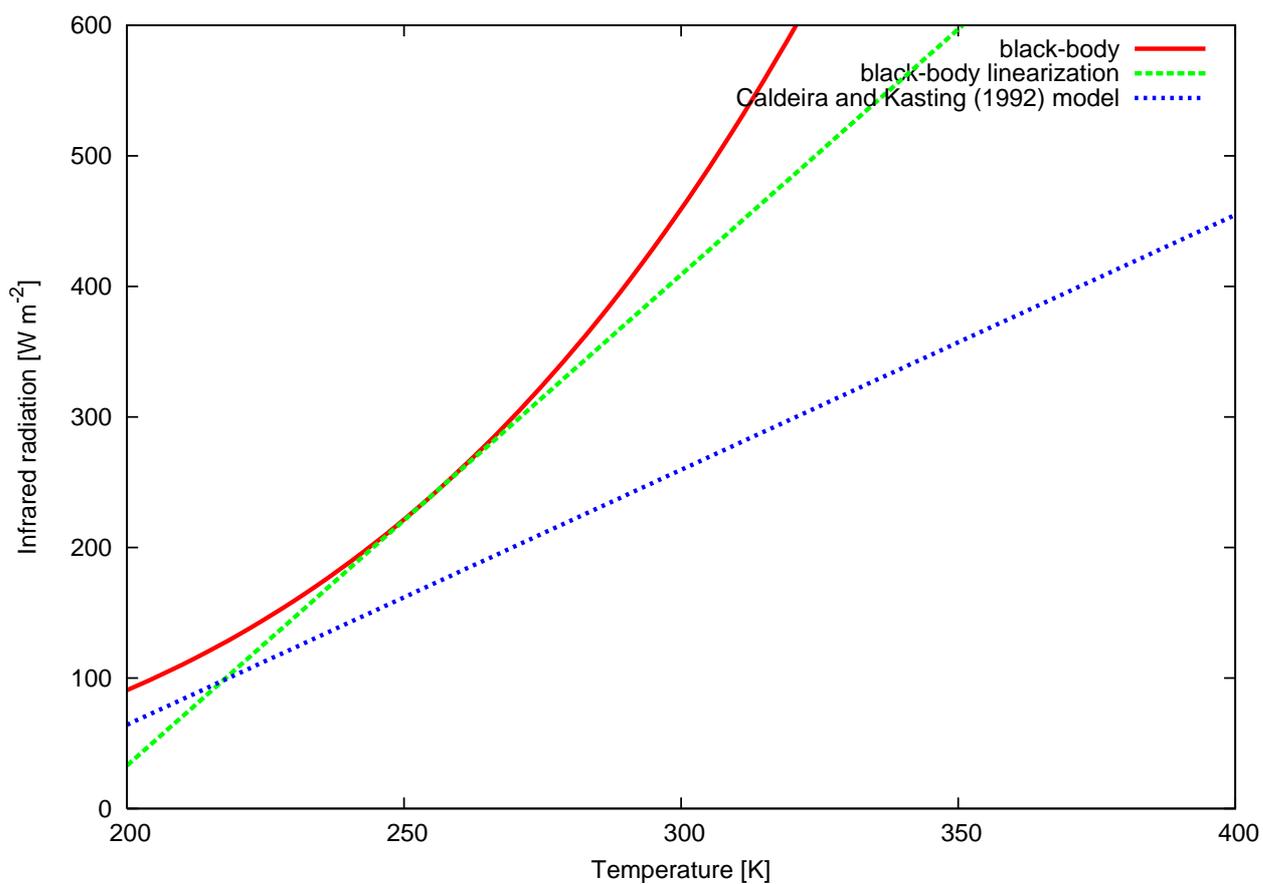


図 2.11 黒体放射と Caldeira and Kasting, 1992 モデルの比較. 図 2.10 に Caldeira and Kasting, 1992 モデルを加えている.

2.5.3 Williams and Kasting, 1997 モデル

Williams and Kasting, 1997 にしたがって, 2.4.3 節と同様に仮定しフィッティングを行う。すると惑星放射フラックスは, $10^{-5} \text{ bar} < p < 10 \text{ bar}$, $190 \text{ K} < T < 380 \text{ K}$ において,

$$\begin{aligned}
 I(T) = & 9.468980 - 7.714727 \times 10^{-5} \phi \\
 & - 2.794778T - 3.244753 \times 10^{-3} \phi T \\
 & - 3.547406 \times 10^{-4} \phi^2 + 2.212108 \times 10^{-2} T^2 \\
 & + 2.229142 \times 10^{-3} \phi^2 T + 3.088497 \times 10^{-5} \phi T^2 \\
 & - 2.789815 \times 10^{-5} \phi^2 T^2 - 3.442973 \times 10^{-3} \phi^3 \\
 & - 3.361939 \times 10^{-5} T^3 + 9.173169 \times 10^{-3} \phi^3 T \\
 & - 7.775195 \times 10^{-5} \phi^3 T^2 - 1.679112 \times 10^{-7} \phi T^3 \\
 & + 6.590999 \times 10^{-8} \phi^2 T^3 + 1.528125 \times 10^{-7} \phi^3 T^3 \\
 & - 3.367567 \times 10^{-2} \phi^4 - 1.631909 \times 10^{-4} \phi^4 T \\
 & + 3.663871 \times 10^{-6} \phi^4 T^2 - 9.255646 \times 10^{-9} \phi^4 T^3
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

と表わされる。ここで $\phi = \ln(p/p_0')$ であり, p_0' [atm] は基準面である 330 ppm の濃度の CO_2 分圧である。したがって p が 330 ppm の濃度の CO_2 分圧であるときは $\phi = 0$ であるから (2.43) 式は

$$\begin{aligned}
 I(T) = & 9.468980 - 2.794778T \\
 & + 2.212108 \times 10^{-2} T^2 - 3.361939 \times 10^{-5} T^3
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

となる。

次に, 2.5.2 節のモデルとの比較のため, 現在の地球の有効放射温度付近における一次近似を求める。(2.44) 式を微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{dI(T)}{dT} = & -2.794778 + 2 \times 2.212108 \times 10^{-2} T \\
 & - 3 \times 3.361939 \times 10^{-5} T^2
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。したがって (2.44) 式を全球平均気温 \bar{T} [K] 付近でテイラー展開して一次近似す

ると

$$\begin{aligned}
 I(T) &= I(\bar{T}) + \frac{dI(\bar{T})}{dT}(T - \bar{T}) \\
 &= 9.468980 - 2.212108 \times 10^{-2}\bar{T}^2 \\
 &\quad + 2 \times 3.361939 \times 10^{-5}\bar{T}^3 \\
 &\quad + (-2.794778 + 2 \times 2.212108 \times 10^{-2}\bar{T} \\
 &\quad - 3 \times 3.361939 \times 10^{-5}\bar{T}^2)T
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

となる. 地球の全球平均気温 $\bar{T} = 288 \text{ K}$ では, 上式は

$$I(T) = B_1 + B_2T \tag{2.47}$$

$$B_1 = -219.1505 \text{ W m}^{-2} \tag{2.48}$$

$$B_2 = 1.581384 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \tag{2.49}$$

である. このモデルでも, 惑星放射の値は黒体放射より低く, 地球の全球平均気温付近での一次近似を行うと前節のモデルともほぼ一致する (図 2.12).

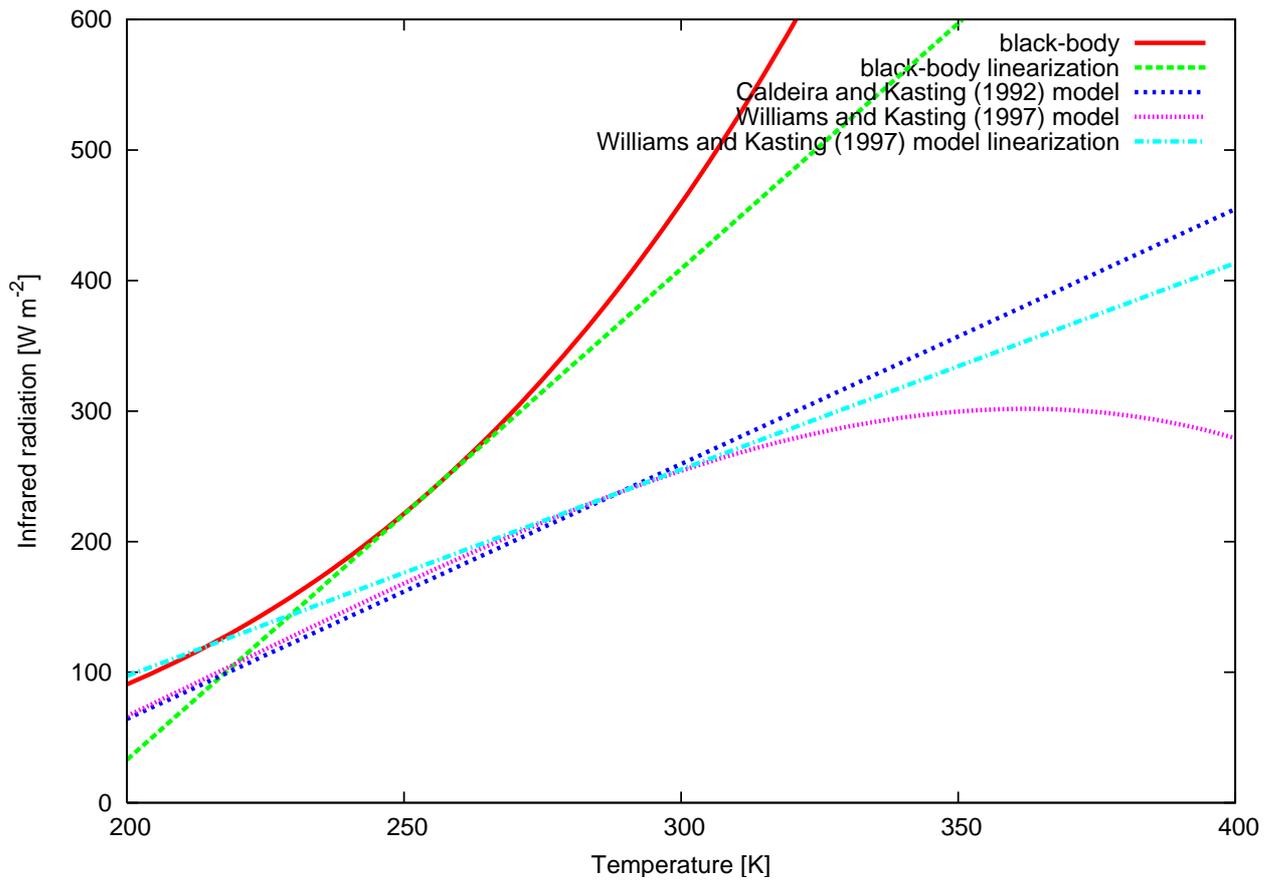


図 2.12 黒体放射と Caldeira and Kasting, 1992 モデルと Williams and Kasting, 1997 モデルの比較. 図 2.11 に Williams and Kasting, 1997 モデルとその全球平均気温付近での一次近似をを加えている.

2.6 惑星表層の熱容量 (C)

惑星表層が恒星放射により受け取る放射エネルギーの一部は地殻, 大気および海洋により吸収され蓄えられる. 単位地表面積, 単位時間あたりに惑星表層の温度を 1 K 上昇させるために必要なエネルギーを惑星表層の熱容量という. 大気組成, 大気の総質量, 惑星表層に占める海洋の割合および地殻の物性値などにより惑星表層の熱容量は変化する. この節ではまず, 地殻, 大気および海洋の熱容量を定式化する (2.6.1–2.6.3 節). 次にそれぞれの熱容量に対して, 現在の地球の地表面気圧が変化した場合, 値がどのように変化するかを調べる (2.6.4 節).

2.6.1 地殻の熱容量

地殻の熱容量を定式化する. 恒星放射により加熱を受ける惑星地表から地下へと熱エネルギーは輸送される. いま熱が流れる方向である鉛直下向きを正として, 深さを z [m], 各深さにおける地下の温度を T_z [K] と置く. フーリエの熱伝導則により鉛直下向きに単位体積, 単位時間あたりに熱が通過する量である熱フラックス Q_z [W m^{-2}] は

$$Q_z = -\kappa_z \frac{\partial T_z}{\partial z} \quad (2.50)$$

と表わされる. ここで κ_z [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$] は熱伝導率である. また地下の層が単位地表面積, 単位時間あたりに受け取る熱の量は

$$\rho_s c_{ps} \frac{\partial T_z}{\partial t} = -\frac{\partial Q_z}{\partial z} \quad (2.51)$$

と表わされる. ここで ρ_s [kg m^{-3}] は密度, c_{ps} [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] は定圧比熱である. (2.51) 式に (2.50) 式を代入して変形すると, 1 次元熱伝導方程式

$$\frac{\partial T_z}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} \quad (2.52)$$

となる. ただし K_z [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] は熱拡散率

$$K_z \equiv \frac{\kappa_z}{\rho_s c_{ps}} \quad (2.53)$$

である。いま日射が自転により周期変化する場合を考える。このとき、温度も周期変化して、温度変化は z 方向に減衰して伝わるため、温度の解を

$$T_z = T_0 e^{-i\omega t} e^{i\alpha z} \quad (2.54)$$

と置く。ここで i は虚数単位、 ω [s^{-1}] は惑星の自転角速度である。上式を (2.52) 式に代入して解くと、係数 α は

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{K_z}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} \right) \quad (2.55)$$

となる*9。上式を代入すると、(2.54) 式は

$$T_z = T_0 e^{-i\omega t} e^{\pm i \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z} e^{\mp \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z} \quad (2.56)$$

となるが、 $z \rightarrow \infty$ の極限では $e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z}$ が発散してしまう。そのため物理的に意味のある解として

$$T_z = T_0 e^{-i\omega t} e^{i \sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} z} \quad (2.57)$$

のみを選択する。(2.57) 式は深さとともに減衰する解を示している。いま温度の時間変化の振幅が e^{-1} になる深さ (熱的な表皮深さ) を、地表の厚さ Δl_s [m] とすると

$$e^{-1} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2K_z}} \Delta l_s} \quad (2.58)$$

という関係が成り立つから

$$\Delta l_s = \sqrt{\frac{2K_z}{\omega}} \quad (2.59)$$

と表わすことができる。実質的に恒星放射によって加熱を受けるのは、この深さまでの領域である。そこで単位地表面積あたりにおける、この領域の実質的な熱容量を

*9 ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} &= \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \\ &= \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。

C_s [$\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1}$] と置き

$$\begin{aligned} C_s &= (\text{密度}) \times (\text{定圧比熱}) \times (\text{地表の厚さ}) \\ &= \rho c_p \Delta l_s \end{aligned} \quad (2.60)$$

と表わすことにする. さらに (2.53), (2.59) 式を代入して整理すると, 上式は

$$\begin{aligned} C_s &= \sqrt{\kappa_z \rho_s c_{ps}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \\ &= J \sqrt{\frac{2}{\omega}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

となる. ここで J [$\text{J m}^{-1} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1/2}$] は熱慣性である. 熱慣性が大きなものほど, 温まりにくく冷めにくい.

現在の地球における値を求める. 地殻が主に玄武岩で構成されていた場合 $\kappa_z = 2 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, $\rho_s = 2900 \text{ kg m}^{-3}$, $c_{ps} = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ である (e.g., Gaidos and Williams, 2004). これらの値を代入すると, 熱慣性の値は

$$J \approx 2400 \text{ J m}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1/2} \quad (2.62)$$

となる. 地殻がレゴリス^{*10}やダストに覆われている場合は高い空隙率により熱伝導率が非常に小さくなるため, 熱慣性の値はせいぜい $30 \text{ J m}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1/2}$ である (Mellon *et al.*, 2000). さらに現在の地球の自転角速度 $\omega \approx 2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ を用いた場合, 単位地表面積あたりの熱容量の値は

$$C_s \approx 7.6 \times 10^6 \text{ J m}^{-2} \text{K}^{-1} \quad (2.63)$$

となる.

2.6.2 大気熱容量

大気熱容量を定式化する. まず単位地表面積上に存在する大気の塊 (気柱) を考える. いま大気全質量を M_a [kg], 惑星半径を R [m], 定圧比熱を c_{pa} [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] と置く. すると気柱の熱容量 C_a [$\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1}$] は, 地球の曲率を無視して近似を行うと,

$$\begin{aligned} C_a &= (\text{気柱の質量}) \times (\text{定圧比熱}) \\ &\approx \frac{M_a}{4\pi R^2} \times c_{pa} \end{aligned} \quad (2.64)$$

^{*10} 月や水星などの地表を覆っている粉塵.

と表わされる. 大気圧は単位面積上にある気柱の重さであるから, 地表面上における重力加速度を g [m s^{-2}], 地表面気圧を p_s [Pa] とすると

$$M_a g \approx p_s \times 4\pi R^2 \quad (2.65)$$

という関係が成り立つ. また 1 mol あたりの質量^{*11}を μ_a [kg mol^{-1}] とすると, 気柱 1 mol あたりの定圧比熱 C_p [$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$] は

$$C_p = \mu_a c_{pa} \quad (2.66)$$

と書ける. よって (2.64) 式に (2.65), (2.66) 式を代入して整理すると, 地表の単位面積あたりの大気の熱容量は

$$C_a(p_s) = \frac{C_p}{\mu_a g} p_s \quad (2.67)$$

となる.

現在の地球の大気では $C_p \approx 30 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, $\mu_a \approx 30 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $p_s \approx 1000 \times 10^2 \text{ Pa}$ であるから, $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$ とすると, 地表の単位面積上にある大気の熱容量は

$$C_a \approx 1.0 \times 10^7 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (2.68)$$

となる.

2.6.3 海洋の熱容量

海洋の熱容量を定式化する. 地殻での議論と同様に温度が季節変化するのは海水面からある程度の深さまでの層 (表層混合層) であるため表層混合層の熱容量のみ考える. ただし海洋での議論と同様に地球の曲率は無視して近似を行う. いま密度を ρ_w [kg m^{-3}], 定圧比熱を c_{pw} [$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$], 厚さを Δl_m [m] と置く. すると海洋の熱容量 C_o [$\text{J m}^{-2} \text{ K}^{-1}$] は

$$\begin{aligned} C_o &= (\text{密度}) \times (\text{定圧比熱}) \times (\text{厚さ}) \\ &\approx \rho_w c_{pw} \Delta l_m \end{aligned} \quad (2.69)$$

と表わされる.

^{*11} 例えば分子量が 29 なら, 1 mol あたりの質量は $2.9 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$

水は $\rho_w = 1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $c_{pw} = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ であるから, $\Delta l_m = 50 \text{ m}$ とすると, 海洋の単位面積あたりの熱容量の値は

$$C_o = 2.1 \times 10^8 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (2.70)$$

となる.

2.6.4 地表, 大気および海洋の熱容量の値の比較

現在の地球の元素組成, 自転角速度における地殻, 大気および海洋の熱容量について地表面気圧に対する変化を調べた. 大気の総質量を増加させると, 地表面気圧が上昇し, 大気の熱容量は大きくなる (図 2.13). しかし, 現在の地球の地表面気圧 (1013 hPa) 付近では, 地殻と大気の熱容量に比べ海洋のそれが圧倒的に大きい. 海洋の熱容量が大きな原因は主に水の定圧比熱が大きいためである. したがって惑星表層に占める海洋の割合が大きくなるほど惑星全体の熱容量が大きくなる. その場合, 熱量が時間変化しても温度変化量が小さくなるので, 惑星放射の季節変化の振幅は小さくなる.

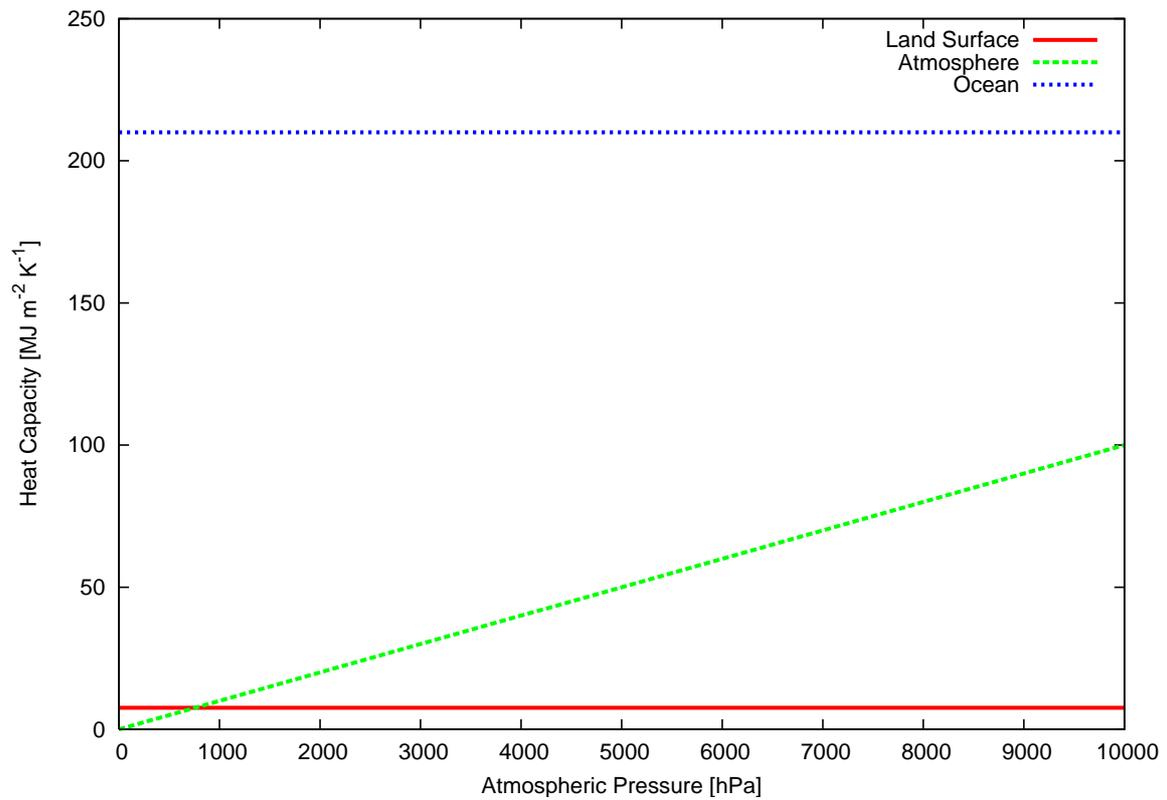


図 2.13 地殻, 大気および海洋の熱容量と地表面気圧の関係. 縦軸は単位面積あたりの熱容量 ($\text{MJ m}^{-2} \text{K}^{-1}$), 横軸は地表面気圧 (hPa) である.

2.7 南北方向の熱輸送効率 (D)

惑星表層において恒星放射の吸収は緯度によっており、大気と海洋の運動によって、大きな加熱を受ける緯度領域から小さな加熱しか受けない緯度領域へと熱エネルギーが輸送されると考えられる。単位地表面積、単位時間あたりに惑星表層の温度を 1 K 上昇させるために必要なそのエネルギーを南北方向の熱輸送効率という。南北方向の熱輸送効率は大気と海洋の規模による。この節ではまず、現在の地球における値について述べる (2.7.1 節)。次に、海洋のない場合の定式化について述べる (2.7.2 節)。

2.7.1 現在の地球における値

南北方向の熱輸送効率 D [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$] は、大気も海洋も無い場合 $D = 0$ である。大気の総質量が増加するほど D の値は大きくなると考えられる。しかし D の定式化は困難であり、基礎方程式を解析的に解くことが陽になるため、現在の地球の気温分布を再現する値が採用されることがある。緯度方向の温度勾配を再現する値は $D = 0.58$ であり (Williams and Kasting, 1997)、全球平均温度を再現する値は $D = 0.38$ である (Gaidos and Williams, 2004)。

2.7.2 海洋が無い場合

海洋が無い場合は、熱輸送効率が気圧に比例すると考えられる (Gierasch and Toon, 1973)。傾圧不安定による熱輸送を仮定すると、地表面気圧 p_s [Pa] の関数として、南北方向の熱輸送効率は

$$D(p_s) = \beta D_0 \times \frac{p_s}{1013 \times 10^2} \quad (2.71)$$

と表わされる (e.g. 横畠, 2003)。ここで D_0 [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$] は現在の地球の気圧の下での水平熱輸送係数である。本論文のモデルでは大気の運動については解かないため無次元パラメータ β を導入し、ある程度の幅を与える。

大気の総質量を増加させると、地表面気圧が上昇するため、南北方向の熱容量は大きくなる。それにより緯度による温度差も小さくなる。

3 詳説ノート

この節では 2 章において使用されている式の導出と補足を行う。

3.1 楕円運動の表現

惑星の公転運動は焦点に位置する恒星を中心とした楕円運動である。よって惑星の位置を表わすには焦点を中心とした角度を用いて、さらにその角度を時間の関数として表わしたい。この節では真近点離角^{*12} f を時間 t を用いて表記することを目指す。

3.1.1 楕円における 2 種類の極座標表示

楕円の極座標表示として楕円の中心を原点としたものと、焦点を原点としたものの 2 種類がある。この節ではその 2 種類の座標の関係について導く。また焦点を原点とする動径を 2 通りに表記する。図 3.14 から楕円の中心を原点とした座標 x, y は

$$x = r \cos f + ae \quad (3.1)$$

$$y = r \sin f \quad (3.2)$$

と書ける。ここで r は焦点を原点とする動径、 a は軌道長半径、 e は軌道離心率であり、角度 f のことを真近点離角という。まず r を e と f を用いて表わす。楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad (3.3)$$

である。ここで b は軌道短半径である。 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ であるから $b^2 = a^2(1 - e^2)$ を代入すると、上式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (3.4)$$

となる。(3.1), (3.2) 式を代入して整理すると、上式は

$$[r(1 + e \cos f) - a(1 - e^2)][r(1 - e \cos f) + a(1 - e^2)] = 0 \quad (3.5)$$

^{*12} 焦点を中心とし近日点から惑星まで回転した角度。図 3.14 参照。

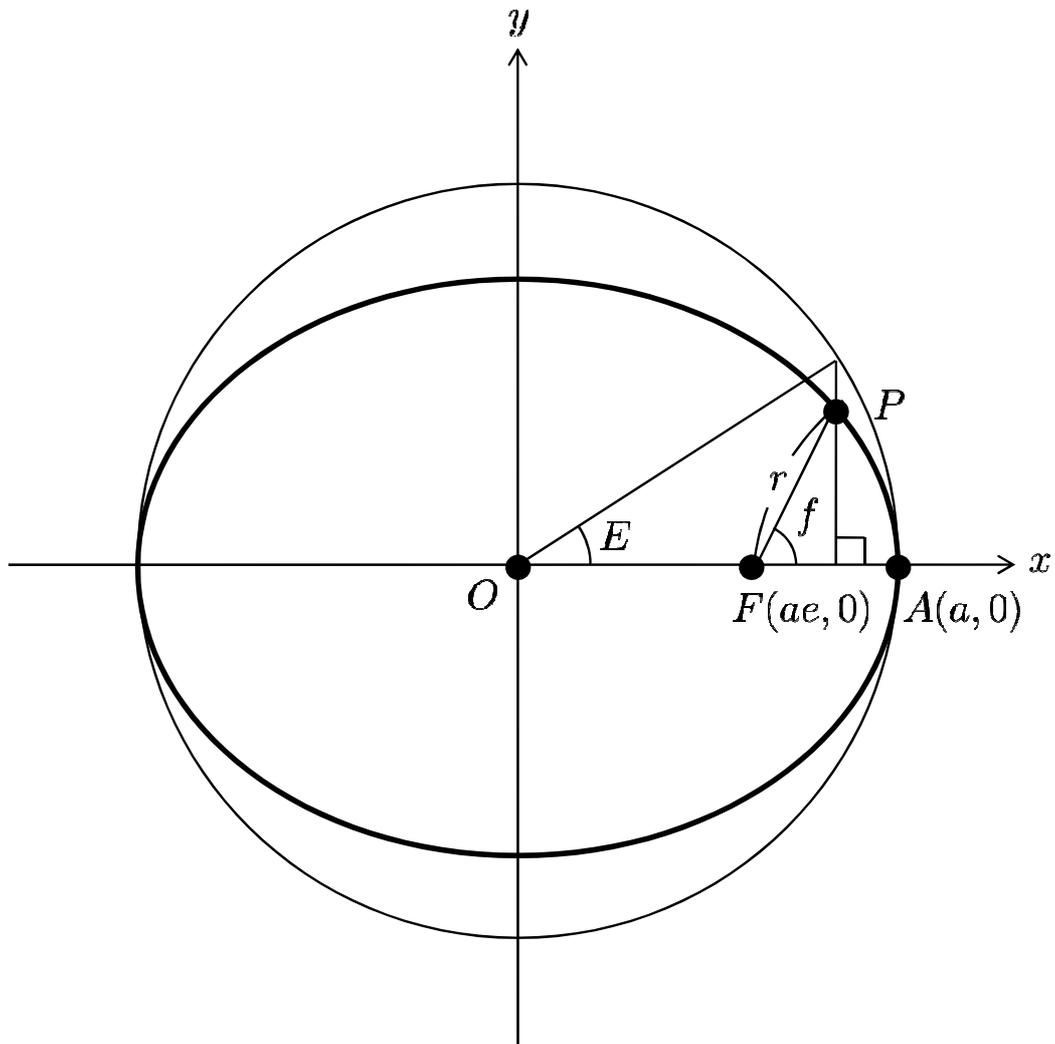


図 3.14 真近点離角 f と、離心近点離角 E の位置関係. 太線は惑星の公転軌道であり, P は惑星の位置, F は焦点 (恒星の位置), A は近日点の位置, O は楕円の中心, a は軌道長半径, e は軌道離心率, r は焦点を原点とする動径 (恒星と惑星との距離) である.

となる. $0 < e < 1$ であるため上式の左辺第 2 因子は正であるから, 焦点を原点とする動径は

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (3.6)$$

となる.

次に r を媒介変数 E を用いて表わす. 図 3.14 のように E を

$$x = a \cos E \quad (3.7)$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (3.8)$$

と定義する. これは楕円の式を満たしており, この角度 E のことを離心近点離角という. また図 3.14 から焦点を原点とした座標 x^* , y^* は

$$x^* = r \cos f = a(\cos E - e) \quad (3.9)$$

$$y^* = r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (3.10)$$

と書ける. この 2 式の両辺の二乗の和から, 焦点を原点とする動径は

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (3.11)$$

となる.

3.1.2 ケプラー方程式

面積速度を 2 通りに表記することでケプラー方程式の導出を行う. まず焦点, 近日点, 惑星の位置によって作られる扇形の面積を時間 t の関数 $S_k(t)$ [m^2] とすると, ケプラーの第 2 法則 (面積速度一定の法則) より面積速度は

$$\frac{dS_k(t)}{dt} = \text{一定} = k \quad (3.12)$$

と書ける. ここで k は比例定数である. 上式を時間で積分すると S_k は

$$S_k(t) = k(t - t_0) \quad (3.13)$$

と書ける. ここで t_0 は惑星が近日点 A を通過する時刻であり近日点通過時刻という. 公転周期を P [s] とすると上式から, 一周分の面積は

$$S_k(t_0 + P) = kP \quad (3.14)$$

となる. また一周分の面積は楕円の面積であるから

$$\begin{aligned} S_k(t_0 + P) &= \pi ab \\ &= \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

とも表わされる. (3.14), (3.15) 式より

$$k = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{P} \quad (3.16)$$

と書ける. また公転周期 P の代わりに

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (3.17)$$

で定義される平均運動 n を導入する. 真円の場合には n は公転運動の角速度である. (3.16), (3.17) 式を代入すると (3.12) 式は

$$\frac{dS_k}{dt} = \frac{1}{2} n a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (3.18)$$

となる.

一方微小時間 dt 後の微小面積 dS_k は, 微小量を無視すると

$$dS_k \approx \frac{1}{2} \cdot r \cdot (r + dr) \sin df \approx \frac{1}{2} r^2 df \quad (3.19)$$

と書けるため, 面積速度は

$$\frac{dS_k}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{df}{dt} \quad (3.20)$$

とも書ける. 上式の f の時間微分を E を用いて表わす. (3.9), (3.10) 式の中辺と右辺を時間について微分すると

$$\dot{r} \cos f - r \dot{f} \sin f = -a \dot{E} \sin E \quad (3.21)$$

$$\dot{r} \cos f + r \dot{f} \cos f = a \sqrt{1 - e^2} \dot{E} \cos E \quad (3.22)$$

となる. この 2 式から

$$r \dot{f} = a \dot{E} (\sin E \sin f + \sqrt{1 - e^2} \cos E \cos f) \quad (3.23)$$

と書ける. (3.9), (3.10) 式を代入して f を消去し, さらに (3.11) 式を代入すると, f の時間微分は

$$\dot{f} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{r} \dot{E} \quad (3.24)$$

と表わされる. (3.11), (3.24) 式を代入すると, (3.20) 式は

$$\frac{dS_k}{dt} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\frac{dE}{dt} \quad (3.25)$$

となる.

最後にケプラー方程式を導く. (3.18), (3.25) 式で面積速度を 2 通りに表わした. この 2 式を比較すると

$$(1-e\cos E)\frac{dE}{dt} = n \quad (3.26)$$

となる. 上式を t で積分すると

$$E - e\sin E = n(t - t_0) \quad (3.27)$$

となる. 離心近点離角 E と時間 t を結ぶ上式のことをケプラー方程式という. また (3.27) 式の右辺は

$$M = n(t - t_0) \quad (3.28)$$

と表わされ, この角度 M のことを平均近点離角という.

3.1.3 真近点離角 f の平均近点離角 M に関する展開

恒星放射フラックス S の導出のため, 離心率 e と平均近点離角 M を用いて, 真近点離角 f の余弦を表わしたい.

まずは e と M を用いて離心近点離角 E の余弦を表わすことにする. (3.27), (3.28) 式よりケプラー方程式は

$$E = M + e\sin E \quad (3.29)$$

と表わされる. 陰関数の定理 (付録 C 参照) により, 上式を展開すると

$$E = M + \Delta E \quad (3.30)$$

$$\Delta E = e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + O(e^3) \quad (3.31)$$

となる. この節では e^3 以降の項は無視する. (3.30) 式から $\cos E$ は

$$\begin{aligned}\cos E &= \cos(M + \Delta E) \\ &= \cos M \cos \Delta E - \sin M \sin \Delta E \\ &= \left\{1 - \frac{1}{2}(\Delta E)^2\right\} \cos M - \Delta E \sin M + O\{(\Delta E)^3\}\end{aligned}\quad (3.32)$$

と書ける. (3.31) 式を代入すると, 上式は

$$\begin{aligned}\cos E &= -\frac{1}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right) \cos M \\ &\quad + \frac{1}{2}e \cos 2M + \frac{3}{8}e^2 \cos 3M + O(e^3)\end{aligned}\quad (3.33)$$

となる. 同様にして $\sin E$ も

$$\begin{aligned}\sin E &= \left(1 - \frac{1}{8}e^2\right) \sin M + \frac{1}{2}e \sin 2M \\ &\quad + \frac{3}{8}e^2 \cos 3M + O(e^3)\end{aligned}\quad (3.34)$$

となる.

次に $\cos f$ を e と M を用いて表わす. まず (3.9) 式より, $\cos f$ は

$$\cos f = \frac{x^*}{r} = \frac{a}{r} \cdot \frac{x^*}{a}\quad (3.35)$$

と表わせる. ここで (3.11) 式より $a/r = 1/(1 - e \cos E)$ であるから, 無限等比級数の和の公式から

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e \cos E} = 1 + e \cos E + e^2 \cos^2 E + O(e^3)\quad (3.36)$$

と変形でき, (3.33) 式を代入すると, 上式は

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + O(e^3)\quad (3.37)$$

となる. 一方 (3.9) 式を変形して, これに (3.33) 式を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{x^*}{a} &= \cos E - e \\ &= -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right) \cos M \\ &\quad + \frac{1}{2}e \cos 2M + \frac{3}{8}e^2 \cos 3M + O(e^3)\end{aligned}\quad (3.38)$$

となる. したがって (3.37), (3.38) 式を代入すると, (3.35) 式は

$$\begin{aligned}\cos f = & -e + \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right) \cos M \\ & + e \cos 2M + \frac{9}{8}e^2 \cos 3M + O(e^3)\end{aligned}\tag{3.39}$$

となる. これが離心率と平均近点離角 M を用いた, 真近点離角 f の余弦の表現である.

ここまでは e^2 までの表現であったが, (3.31) 式以降において, 展開する次数を e^4 まで上げた場合には, (3.39) 式は

$$\begin{aligned}\cos f = & -e + \left(1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{25}{192}e^4\right) \cos M \\ & + \left(e - \frac{4}{3}e^3\right) \cos 2M + \left(\frac{9}{8}e^2 \cos 3M - \frac{225}{128}e^4\right) \cos 3M \\ & + \frac{4}{3}e^3 \cos 4M + \frac{625}{384}e^4 \cos 5M + O(e^5)\end{aligned}\tag{3.40}$$

となる.

4 まとめ

系外地球型惑星は様々な軌道要素, 赤道傾斜および大気と海洋の規模を持つと考えられている. 公転運動に伴う惑星放射の季節変化にはそれらの情報が含まれている可能性がある. 将来, 実際に系外地球型惑星の惑星放射の季節変化を直接観測することが可能となり, そのデータから系外地球型惑星の表層環境を明らかにすることができるかもしれない. そのためには様々な系外地球型惑星を想定して, それらの惑星放射の季節変化を理論的に予測しておく必要がある.

そこで本論文では, 軌道要素, 赤道傾斜および大気と海洋の規模による表面温度と惑星放射の振る舞いの違いを明らかにできるモデルである, 南北 1 次元 EBM の基礎方程式とその各項を記述するための定式化について調べることを目的とする.

この目的のために Williams and Kasting, 1997; Gaidos and Williams, 2004 を参照した. Gaidos and Williams, 2004 は, 惑星放射の季節変化の観測により, 系外地球型惑星の赤道傾斜と大気と海洋の存在について情報を得られる可能性があると述べた論文である. そのレビューにより系外地球型惑星を対象とした基礎方程式の定式化の背景, 仮定および物理的意味を学ぶことができる. また惑星放射の季節変化を計算するために必要な手順の記述もあるため, 今後の研究にも有用である. さらに各項の一部は, より複雑な定式化を行っている Williams and Kasting, 1997 の付録を参照する.

南北 1 次元 EBM はエネルギー保存則に基づくモデルであり, その基礎方程式は惑星表層における経度平均した単位地表面積, 単位時間あたりの熱量の変化が, 恒星放射の吸収による加熱率, 惑星放射による冷却率および南北方向の熱輸送による加熱率の収支と等しいことを表わす. ここで熱量の変化は惑星表層の熱容量と表面温度の時間変化量との積であり, 大気と海洋の熱輸送による加熱率は南北方向の温度勾配と熱輸送効率によって表わされる.

基礎方程式の各項を記述するには恒星放射, 惑星アルベド, 惑星放射, 惑星表層の熱容量および南北方向の熱輸送効率について定式化を行う必要がある. これまでのところ現在の地球の大気成分, 重力加速度および惑星半径を念頭においた定式化が最も進んでいる.

恒星放射には, 離心率と赤道傾斜を考慮し, 惑星の公転軌道上の位置および緯度の関数と

して、恒星放射フラックスの日平均値を与える。離心率と赤道傾斜が大きくなるほど恒星放射の季節変化の振幅が大きい。

惑星アルベドと惑星放射は、雲による効果は無視し、大気分子による散乱と吸収のみを考慮して、 CO_2 分圧と表面温度の関数として定式化される。ただし N_2 分圧は現在の地球を模擬して 1.0 bar に固定し、大気には飽和水蒸気圧分の H_2O が含まれているとする。また惑星アルベドには恒星の天頂角と地表面アルベドに対する依存性も考慮する。現在の地球の有効放射温度付近では、表面温度を増加させるほど惑星放射の値は増加する。

惑星表層の熱容量について、地殻と海洋に関しては温度が季節変化する表皮層のそれを定式化する。現在の地球では海洋は地殻に比べ熱容量が非常に大きいため、惑星表面に占める海洋の割合が大きくなるほど惑星全体の熱容量が大きくなる。大気の熱容量と南北方向の熱輸送効率は、地表面気圧に比例すると仮定して定式化しており、大気の総質量を増加させると大きくなる。惑星表層の熱容量が大きい場合、熱量が時間変化しても温度変化量が小さくなるので惑星放射の季節変化の振幅は小さくなる。また、大気が厚くなると南北方向の熱輸送効率も上昇するため、緯度による温度差も小さくなる。

これらの定式化により、大気の総質量や海洋の規模による、表面温度と惑星放射の振る舞いの違いを明らかにできる。ただしすでに述べたように、ここでの定式化は地球と同様の質量とサイズ、大気成分、中心星放射スペクトルを持つ惑星を想定しており、これらが地球とは異なった惑星に対しては改めて定式化を行う必要がある。

A Gaidos and Williams, 2004 部分訳

系外地球型惑星の季節性

—赤外線光度曲線による赤道傾斜と表層環境の推定—

要旨

仮想的な系外地球型惑星の季節性と、その赤外線の光度曲線との関連について調査した。地球の自転軸がある程度傾いているために日射と地表温度は季節変化し、その結果として惑星から宇宙空間へ放射される赤外線も季節変化する。既知の系外惑星の軌道要素や惑星形成論は系外地球型惑星の離心率や赤道傾斜の値が地球以上である可能性を示唆している。そのような系外惑星では恒星からの放射量が大きく変化するであろう。そこで今後観測によって公転に伴う赤外線フラックスの変化が検出される可能性と、惑星の公転による光度曲線に他のデータ (例:分光学) を補足するような赤道傾斜と熱的性質の情報が含まれている可能性を提示する。さらに緯度方向の熱輸送と海洋や大気の熱慣性の両方を含む解析的なエネルギーバランスモデルを提示する。このモデルは異なる赤道傾斜、軌道離心率および軌道面の向きに関して赤外線の光度曲線を計算するために使用する。この論文では以下の3点について示す。(1) 大気も海洋も無い黒体惑星は公転に伴う赤外線の変化の大きさがその平均値の大きさに匹敵する。(2) 光度曲線の形は惑星の赤道傾斜や公転軌道上の春秋分点の位置に敏感である。(3) 黒体惑星と比較すると地球のように全球的な海洋や大気を持つ惑星は光度曲線が劇的に減衰して位相がずれる。そこで黒体惑星と地球のような惑星の統計集合における赤外線の光度曲線の振幅分布を調査した。光度曲線の唯一性の問題を調べた結果、独立に主要パラメータを制約するためには高調波の光度曲線の振幅や位相を測定する事が必要であると結論付けた。あるいはまた赤外線フラックス以外の季節変化するパラメータの測定が必要である。

I 背景

TPF やダーウィンのような未来の宇宙望遠鏡では恒星付近を周る系外地球型惑星を観測し、その地表や大気のスpekトルを直接取得するような設計がなされるであろう (Fridlund and Capaccioni, 2002). 太陽系の惑星が多様である事から系外惑星も様々な地表, 大気, 運動学的性質を持つであろう. それ故にただ地球サイズであるだけなのか, それとも地球の様に生命が住める星であるのかを識別することが重要である. 生命が住める星であるかを確認する技法として重要な大気成分 (H_2O , CO_2 , CH_4 , O_2 など) を分光学的に検出するという方法が幅広く議論されてきた (Des Marais *et al.*, 2002). また可視波長における日変化が大きい事も地球の様な惑星の特徴だと提示されてきた (Ford *et al.*, 2001).

先行研究 (Williams and Kasting, 1997; Williams and Pollard, 2002, 2003) と同様に系外地球型惑星の赤道傾斜, 離心率は幅広い値を持つであろうということ, つまり赤道傾斜か離心率が大きな地球のような惑星が地球の「双子」以上に存在するであろうということを示す. 現在の太陽系内において地球以外の惑星は全て地球より赤道傾斜か離心率が大きい. 主系列星を周る既知の系外惑星において長半径が 0.06 AU 以上のものの離心率は平均 0.35 である. 地球と金星の長期間における離心率の平均は 0.03 であるが (Chambers and Wetherill, 1998; Weidenschilling, 2000) 地球型惑星形成の数値実験では離心率が 0.05–0.15 の天体ができる. 地球が真円軌道であるのは実験に含まれていない消散的過程の結果かもしれないが太陽系が統計的に外れた値だという可能性がある. 数値実験によって高い離心率は質量の大きな惑星の共鳴の結果であるという可能性も示されている (Murray *et al.*, 2002; Nags *et al.*, 2003).

同様に赤道傾斜が大きな値になることについての理論もある. 巨大衝突段階での少数個の原始惑星の集積が惑星の最終的な自転を決めるという説である. 地球の自転状態は月ができた衝突に加え, その後の潮汐進化によって決まったのかもしれない (Neron de Surgy and Laskar, 1997). 惑星形成論によると原始赤道傾斜の確率分布は

$$p(\delta_0) = \frac{\sin \delta_0}{2} \quad (\text{A.1})$$

と表わされると予想されており, この式は数値実験によって裏付けされている (Agnor *et al.*, 1999). (A.1) 式によれば 92% の惑星の赤道傾斜は地球の 23.5° より大きな値であろう. また親星が太陽質量であり約 1 AU の軌道を周る惑星の原始赤道傾斜は恒星の潮汐

による影響を受けない (Harris and Ward, 1982). けれども火星で起こった様な自転と公転間での共鳴は赤道傾斜の増大の原動力となり得る (Touma and Wisdom, 1993). 地球と月の系はそのような壊滅的な共鳴からは免れているようだが (Laskar *et al.*, 1993), 赤道傾斜が大きくなる事により, かつて低緯度に氷河が存在していたという説もあった (Williams, 1993).

離心率や赤道傾斜が大きな場合, 季節や南北半球によって恒星から惑星に入射する放射量は大きく異なる. 例えば離心率が 0.2 である場合に, 近星点と遠星点での放射の変化は地球の中緯度での季節変化に匹敵する (Williams and Pollard, 2002). また地球の赤道傾斜を 85° にすると極での夏至のフラックスは 2.5 倍になる. よって離心率や赤道傾斜が大きな場合, エネルギーバランスモデルや三次元全球気候モデルを作成すると地球に似た惑星の表面温度は様々な分布を示す (Williams and Kasting, 1997; Williams and Pollard, 2002, 2003). しかしながら同じ研究によると, 極端な地表温度は高緯度の大陸内部に限られ他の地域では海洋や大気により温度変化は穏やかである. もし惑星の公転が (太陽質量の恒星で 0.95-1.2 AU の) 真円軌道であり恒星からの平均放射量がハビタブルゾーンの水準内であるなら, その惑星は生命が存在可能な星かもしれない (Kasting *et al.*, 1993). これらの研究結果によると惑星の赤道傾斜の推定は季節変化の観測によって行われてきた. さらに地球の様な惑星の表面温度は厚い大気と海洋によって穏やかであるから, 大気と海洋の推定には入念な季節変化のモデル化が必要であろう.

我々は「公転に伴う惑星の見かけの変化はスペクトルや光度の日変化の情報を持つ」という説を唱える. ここでは惑星円盤平均において惑星から放射される赤外線フラックスの公転に伴う変化に注目するが, 後の研究では他の特性についても調べたいと考えている. 惑星から放出される赤外線フラックスは恒星の放射パターンや地表と大気の熱特性により決まる. それゆえ公転による赤外線の光度曲線は「季節性 (赤道傾斜と離心率)」と「海洋や厚い大気存在」を潜在的に検出している事になる. そこで計算を行い以下のことを示す. (1) 赤外線フラックスの公転による位相の変化の大きさはその平均値の大きさに匹敵し得る. またその変化は赤外線波長での将来の観測により検出可能になる. (2) 赤外線フラックスの季節変化の振幅と位相は惑星の赤道傾斜, 公転面における春秋分点の位置および離心率の 3 つに敏感である. (3) 赤外線の光度曲線は惑星の地表や大気の熱特性によって変調されるため海洋や厚い大気存在する事についての潜在的指標でもある. また生命が住める惑星表層さらには現存する生物圏自体の潜在的な季節性の現れについても検討する.

おそらくどの候補の惑星も軌道を決定するには主星の状態を確かめた上, 継続的に軌道の

大部分についての観測を行う。したがって光度曲線は別の労力をかける事無く軌道を決定できるのではないだろうか。さらに分光観測は日数が必要であり多数の時期に分割できるので累積スペクトルはもちろん公転における軌道運動の依存関係も得られる。この手法により“見た目と赤外線波長は似通っていても地球とは異なる惑星”の多様性を見分ける事も可能になるかもしれない。“地球とは異なる惑星”とは例えば金星の様に有効温度と赤外線放射がほぼ一年中不変であり不透明な大気を持つ惑星やエウロパの様に固体の黒体の様に振舞う氷に覆われた惑星などの事である (Des Marais *et al.*, 2002).

II モデル

様々な軌道要素, 赤道傾斜および表層の特性に対して赤外線の光度曲線の集合を効率的に計算するために解析的なエネルギーバランスモデル (EBM) を使用した。完全な三次元の全球気候モデル (GCM) の計算はスーパーコンピュータでもひと月以上かかるが EBM の計算はデスクトップ PC においても数秒で可能である。実際に検出された惑星の観測結果を解釈するためにはもちろん完全な GCM の計算が使われるであろう。時間 t と緯度 θ の関数である惑星の表面温度 T を決めるエネルギーバランス方程式は

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = S(1 - A) - I + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.2})$$

と表わされる。ここで S は惑星に入射する恒星からのフラックス, A は大気最上部のアルベド, I は惑星から放出される赤外線フラックス, C は地表や大気の単位面積あたりの熱容量, D は南北方向の熱輸送の効率を表わす。

エネルギーバランス方程式を数値的に解く事は可能である (e.g., Williams and Kasting, 1997)。しかし三つの仮定を用いれば (A.2) 式を解析的に解く事も可能である。まず C と D を定数と仮定する。次に古典的な EBM 研究 (North *et al.*, 1981) と同様に

$$I(T) = B_1 + B_2 T \quad (\text{A.3})$$

という I と T の間での線形関係を導入する。表面温度が (地球の有効放射温度である) 255 K の黒体では $B_2 = 3.76 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ である。Caldeira and Kasting, 1992 では放射対流平衡モデルから, 対流圏に十分に水が飽和しており $p\text{CO}_2 = 330 \text{ ppm}$ である場合は, $B_2 \approx 1.95 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ であることを導いた。一方 Williams and Kasting (1997) では多変数多項式を使用し, 同じ $p\text{CO}_2$ の値である場合は, 地球の平均気温 288 K での傾

きは $B_2 \approx 1.58 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ であることを導いた. 水蒸気の飽和圧力の増加と温室効果による表面温度の上昇が, 地球と黒体における放射の振る舞いの違いの原因である.

最終的に (A.2) 式を惑星の自転について平均化すると, 系外地球型惑星の検出に必要であると予想された積分時間に一致する. Williams and Kasting (1997) にしたがって, 黄経 L の位置における, 緯度 θ の関数である日平均のフラックスは

$$\bar{S} = \frac{q_0(1 - e^2)^{1/2}(H \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \sin H)}{\pi[1 + e \cos(L - L_p)]^2} \quad (\text{A.4})$$

と表わされる. ここで q_0 は平均軌道距離上での太陽定数, L_p は春分点角度位置であり, 恒星の赤緯 δ は

$$\sin \delta = -\sin \delta_0 \cos(L + \pi/2) \quad (\text{A.5})$$

と表わされる. H [rad] は半日の長さ (時角) であり

$$\cos H = -\tan \theta \tan \delta \quad (\text{A.6})$$

と表わされる.

B 球面三角形の余弦定理

球面三角形とは, 球面上の 3 点で囲まれた部分のことをいい, その各辺は 3 つの大円の弧である. 通常の平面三角形と同様に 3 つの頂角 (A, B, C) と 3 つの辺 (a, b, c) をもつが, 球面三角形の辺の大きさは球の中心から張る角度で表わされる (点 O を中心とすると, 例えば $a = \angle BOC$ である). 平面三角形と同様に球面三角形にも, 余弦定理が存在する.

球面三角形の余弦定理を導出する. いま図 B.16 のような半径 1 の球を考える. 頂点 A から辺 b , 辺 c に接する直線を引き, 直線 OB , OC と交わる点をそれぞれ D , E とする. $\angle DAE$ は球面三角形の $\angle A$ に等しく, $\angle OAD$, $\angle OAE$ はどちらも直角である.

平面三角形 ADE , ODE に平面三角形の余弦定理を用いると, それぞれ

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AE} \cos A \quad (\text{B.7})$$

$$= \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OD} \cdot \overline{OE} \cos a \quad (\text{B.8})$$

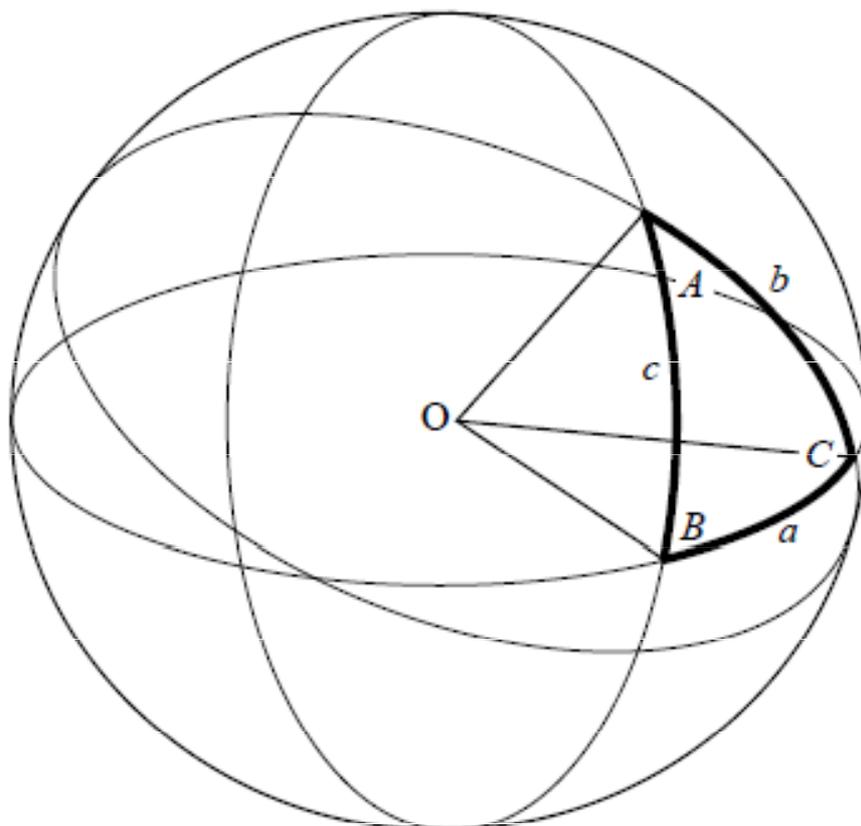


図 B.15 球面三角形 ADE . 球の表面において, 太線で囲まれた部分が球面三角形である.

画像元: 山口大学 理学部 電磁宇宙物理学研究室.<http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/kenta/eclipse/SphericalTriangle081106.pdf>

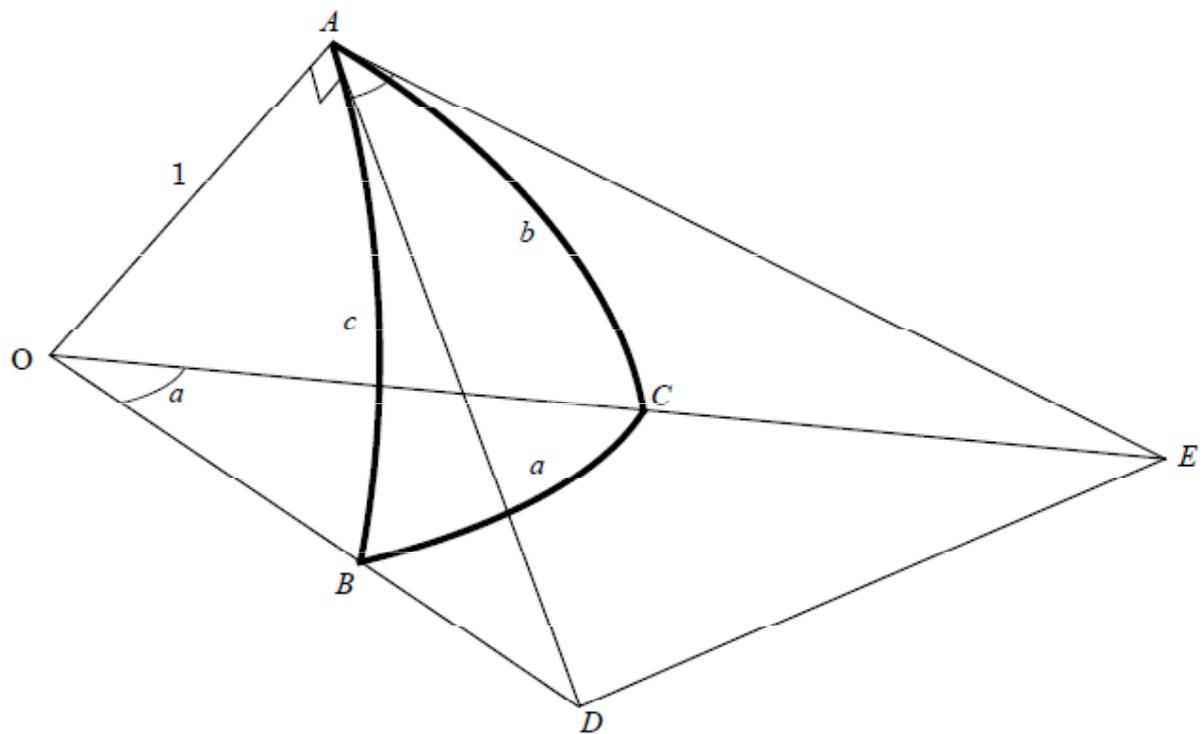


図 B.16 球面三角形 ADE に接する, 平面三角形 ADE .

画像元: 山口大学 理学部 電磁宇宙物理学研究室. <http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/kenta/eclipse/SphericalTriangle081106.pdf>

と書ける. $\triangle OAD$ は直角三角形であるから

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \tan c, & \overline{OD} &= \frac{1}{\cos c}, \\ \overline{AE} &= \tan b, & \overline{OE} &= \frac{1}{\cos b}\end{aligned}\tag{B.9}$$

とであり, これらを (B.7), (B.8) 式に代入して整理すると

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\tag{B.10}$$

となる. 上式を球面三角形の余弦定理という.

C 陰関数の定理

高木 貞治, 1961 にしたがって 3.1.3 節で用いた陰関数の定理の導出を行う. w を z の関数とし原点の近傍で展開可能とすると

$$w = g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0\tag{C.11}$$

と書ける. z が w で展開できるとすると, w の関数として

$$z = b_1 w + b_2 w^2 + \dots\tag{C.12}$$

と書くことができる. これを陰関数の定理という. ただし展開係数 b_n は

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \frac{z}{g(z)} \right\}^n \right]_{z=0}\tag{C.13}$$

と表わされる (付録 I 参照). この定理を

$$z = a + w\theta(z)\tag{C.14}$$

という形の関数に適用する. (C.12), (C.13) 式において, z を $z - a$ とし, $g(z)$ を $(z - a)/\theta(z)$ とすると, それぞれ

$$z = a + b_1 w + b_2 w^2 + \dots\tag{C.15}$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{\theta(a)\}^n\tag{C.16}$$

となる. さらに上式において, $z = E$, $a = M$, $w = e$, $\theta(z) = \sin E$ と置き換えると

$$E = M + b_1 e + b_2 e^2 + \dots \quad (\text{C.17})$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin M)^n \quad (\text{C.18})$$

となるので E は

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M \\ &\quad + \frac{1}{8} e^3 (3 \sin 3M - \sin M) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

と書ける.

I 展開係数 b_n

留数を 2 通りに表わすことで (C.13) 式の係数 b_n を導出する. いま w が正則であり $z = 0$ の近傍で展開可能とすると

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (a_1 \neq 0) \quad (\text{C.20})$$

と書ける. $w = 0$ の近傍で逆関数も正則であるなら

$$z = b_1 w + b_2 w^2 + \dots \quad (\text{C.21})$$

と書ける. 今 z_1 を C 内の点とし, $w_1 = f(z_1)$ として

$$g(z) = \frac{z f'(z)}{f(z) - w_1} \quad (\text{C.22})$$

と置くと, $g(z)$ の $z = z_1$ における留数^{*13}は

$$\begin{aligned} \text{Res}[g(z), z_1] &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) g(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_1}{z - z_1}} z \\ &= z_1 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

^{*13} 留数はローラン展開の -1 次の展開係数であり, $z = a$ が k 位の極であるときは

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z) \quad (\text{C.23})$$

と書ける.

となる. また留数定理より

$$\text{Res}[g(z), z_1] = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) dz \quad (\text{C.25})$$

とも書ける. ここで $|w_1/f(z)| < 1$ であるから^{*14}, 無限等比級数の和の公式を用いると, (C.22) 式は

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{zf'(z)/f(z)}{1 - w_1/f(z)} \\ &= \frac{zf'(z)}{f(z)} \left\{ 1 + \frac{w_1}{f(z)} + \frac{w_1^2}{f(z)^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

と表わせる. 上式を代入すると, (C.25) 式は

$$\text{Res}[g(z), z_1] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} \left\{ 1 + \frac{w_1}{f(z)} + \frac{w_1^2}{f(z)^2} + \dots \right\} dz \quad (\text{C.27})$$

となる. これで留数を 2 通りの方法で表わすことができた. 次に (C.24), (C.27) 式を比較すると

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} \left\{ 1 + \frac{w_1}{f(z)} + \frac{w_1^2}{f(z)^2} + \dots \right\} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_1^n \times \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}} dz \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

と書け, z_1 を w_1 のべき級数に展開できる. (C.21) 式と比較すると, 係数 b_n は

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}} dz \quad (\text{C.29})$$

と書ける. ここで

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{f(z)^n} = \frac{1}{f(z)^n} - \frac{nzf'(z)}{f(z)^{n+1}} \quad (\text{C.30})$$

を用いて, (C.29) 式を部分積分すると

$$\begin{aligned} b_n &= \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{z}{f(z)^n} \right]_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)^n} dz + (n+1) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)^n} dz + (n+1)b_n \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

^{*14} 円 C 上では $f(z) \neq 0$ であるから, $|f(z)|$ の最小値 $m > 0$ である. よって $|w_1| < m$ とすれば, $\left| \frac{w_1}{f(z)} \right| \leq \frac{|w_1|}{m} < 1$ である.

となる. 上式は

$$nb_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)^n} dz \quad (\text{C.32})$$

と変形できる. この右辺は, 留数定理により $z = 0$ における $f(z)^{-n}$ の留数であり, $z = 0$ が n 位の極であるから, (C.23) 式のように

$$\begin{aligned} nb_n &= \text{Res}[f(z)^{-n}, 0] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} z^n f(z)^{-n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

と書けるので, 係数 b_n は

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0} \quad (\text{C.34})$$

となる.

D 散乱, 吸収の効果の尺度

大気に放射エネルギーが入射するとき大気中の分子により散乱, 吸収が起こる. この章では散乱, 吸収の効果をも分子の断面積で評価する理由について述べる.

気塊に放射エネルギーが入射する場合を考える. いま気塊の底面積を S_a [m^2], 厚さを dl_a [m], 密度を ρ_a [kg m^{-3}] と置く. 気塊中に存在する分子は簡単に球であると仮定し, 分子の半径を r_a [m], 気塊中の分子数密度を N [個 m^{-3}] と置く. 気塊の底面に垂直に入射する放射エネルギーフラックスを \mathcal{I}_a [W m^{-2}], 気塊中の分子の散乱, 吸収による \mathcal{I}_a の変化量を $d\mathcal{I}_a$ [W m^{-2}] と置く. するとベールの法則の微分形より

$$d\mathcal{I}_a = -\kappa_a \rho_a \mathcal{I}_a dl_a = -\kappa'_a N \mathcal{I}_a dl_a \quad (\text{D.35})$$

と表わされる. ここで κ_a [$\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$] は単位質量あたりの消散係数^{*15}, κ'_a [$\text{m}^2 \text{個}^{-1}$] は分子 1 個あたりの消散係数である. 次に気塊中の散乱, 吸収を起こす分子の断面積の合計 S_{all} は

$$\begin{aligned} S_{all} &= (\text{分子の断面積}) \times (\text{分子数}) \\ &= \pi r_a^2 \times N S_a dl_a \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

*15 消散係数 = 散乱係数 + 吸収係数

と表わされる. また入射する放射と吸収, 散乱される放射の比は入射する底面積と吸収, 散乱を起こす分子の断面積の合計の比と等しいため

$$\frac{d\mathcal{I}_a}{\mathcal{I}_a} = \frac{\mathcal{S}_{all}}{\mathcal{S}_a} \quad (\text{D.37})$$

と書ける. 上式に (D.35), (D.36) 式を代入して整理すると, 分子 1 個あたりの消散係数は

$$\kappa'_a = -\pi r_a^2 \quad (\text{D.38})$$

となる. よって気塊中の分子が球であると仮定すると, 消散係数の絶対値は分子の断面積そのものである.

E 変数リスト

a [m]	: 軌道長半径
a_s	: 地表面アルベド
A	: 惑星アルベド
\mathcal{A}_1 [m ²]	: 大気上端を覆うある面積
\mathcal{A}_2 [m ²]	: \mathcal{A}_1 を恒星放射に垂直な面へと射影した面積
b [m]	: 軌道短半径
c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	: 惑星表層の定圧比熱
c_{pa} [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	: 気柱の定圧比熱
c_{ps} [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	: 地殻の定圧比熱
c_{pw} [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	: 海水の定圧比熱
C [J m ⁻² K ⁻¹]	: 惑星表層の熱容量
C_a [J m ⁻² K ⁻¹]	: 大気の熱容量
C_o [J m ⁻² K ⁻¹]	: 海洋の熱容量
C_p [J K ⁻¹ mol ⁻¹]	: 気柱 1mol あたりの定圧比熱
D [W m ⁻² K ⁻¹]	: 大気と海洋による南北方向の熱輸送効率
e	: 軌道離心率
E [rad]	: 離心近点離角
f [rad]	: 真近点離角
$F(\theta)$ [W m ⁻¹]	: θ を横切って単位地表線分, 単位時間あたりに流入する熱量
$F(\theta + d\theta)$ [W m ⁻¹]	: $\theta + d\theta$ を横切って単位地表線分, 単位時間あたりに流出する熱量
F_z [W m ⁻²]	: 地下に流入する熱量
g [m s ⁻²]	: 地表面上における重力加速度
h [rad]	: 時角
H [rad]	: 昼の長さ (時角)
i	: 虚数単位
I [W m ⁻²]	: 惑星放射フラックス
J [J m ⁻¹ K ⁻¹ s ^{-1/2}]	: 熱慣性
k	: 比例係数
K_z [m ² s ⁻¹]	: 熱拡散率

Δl [m]	: 惑星の表層の厚さ
Δl_m [m]	: 表層混合層の厚さ
Δl_s [m]	: 地表の厚さ (熱的な表皮深さ)
L [rad]	: 黄経
M [rad]	: 平均近点離角
M_a [kg]	: 大気的全質量
n [s ⁻¹]	: 平均運動
p [bar]	: CO ₂ 分圧
p_0 [bar]	: 基準面である 300 ppm の濃度の CO ₂ 分圧
p_0' [bar]	: 基準面である 330 ppm の濃度の CO ₂ 分圧
p_s [Pa]	: 地表面気圧
P [s]	: 公転周期
q_0 [W m ⁻²]	: 長半径における恒星フラックス
q_1 [W m ⁻²]	: 地表面上における恒星フラックス
q_2 [W m ⁻²]	: \mathcal{A}_2 上における恒星フラックス
Q_C [J]	: 惑星表面に貯蓄される熱量
Q_D [J]	: 大気と海洋の運動により南北方向に輸送される熱量
Q_I [J]	: 惑星放射による冷却量
Q_S [J]	: 恒星放射による加熱量
r [m]	: 焦点を中心とした動径
R [m]	: 惑星半径
S [W m ⁻²]	: 恒星放射フラックス
\bar{S} [W m ⁻²]	: 日平均の恒星放射フラックス
$S_k(t)$ [m ²]	: 焦点, 近日点, 惑星の位置によって作られる扇形の面積
t [s]	: 時間
T [K]	: 惑星表層の経度平均した温度
T_e [K]	: 有効放射温度
\bar{T}	: 全球平均気温
x	: 楕円の中心を原点とした x 座標
y	: 楕円の中心を原点とした y 座標
x^*	: 焦点を原点とした x 座標
y^*	: 焦点を原点とした y 座標
Z [rad]	: 天頂角

α	: 係数
β	: 無次元パラメータ
θ [rad]	: 緯度
κ [W m ⁻¹ K ⁻¹]	: 熱輸送係数
κ_z [W m ⁻¹ K ⁻¹]	: 熱伝導率
δ [rad]	: 赤緯
δ_0 [rad]	: 赤道傾斜
μ	: 天頂角 Z の余弦 (= $\cos Z$)
$\bar{\mu}$: μ の日平均
μ_a [kg mol ⁻¹]	: 1mol あたりの質量
ρ [kg m ⁻³]	: 惑星の表層の密度
ρ_s [kg m ⁻³]	: 地殻の密度
ρ_w [kg m ⁻³]	: 海水の密度
σ [W m ⁻² K ⁻⁴]	: ステファン・ボルツマン定数
φ	: = $\ln(p/p_0)$
ϕ	: = $\ln(p/p_0')$

参考文献

- [1] Caldeira, K., Kasting, J.F., 1992: Susceptibility of the early Earth to irreversible glaciation caused by carbon dioxide clouds. *Nature* **359**, 226–227.
- [2] Fridlund, C.V.M., Capaccioni, F., 2002: Infrared space interferometry the DARWIN mission. *Adv. Space Res.* **30**, 2135–2145.
- [3] de Pater, I., Lissauer, J.J., 2001: *Planetary Sciences*. Cambridge University Press, New York, USA, 528pp
- [4] Gaidos, E., Williams, D.M., 2004: Seasonality on terrestrial extrasolar planets. *New Astronomy* **10**, 67–77.
- [5] Gierasch, P. J., O. B. Toon., 1973: Atmospheric Pressure Variation and the climate of Mars. *J. Atmos. Sci.* **30**, 1502–1508.
- [6] Kasting, J.F., 1991: CO₂ condensation and the climate of early Mars. *Icarus* **94**, 1–13.
- [7] Mellon, M., Jakosky, B.M., Keiffer, H.H., Christensen, P.R., 2000: High-Resolution Thermal Inertia Mapping from the Mars Global Surveyor Thermal Emission Spectrometer. *Icarus* **148**, 437–455
- [8] North, G.R., Cahalan, R.F., Coakley, J.A., 1981: Energy Balance Climate Models, *Rev. Geophys. Space Phys.* **19**, 91
- [9] Thalmann, C., Carson, J., Janson, M., Goto, M., McElwain, M., Egner, S., Feldt, M., Hashimoto, J., Hayano, Y., Henning, T., Hodapp, K. W., Kandori, R., Klahr, H., Kudo, T., Kusakabe, N., Mordasini, C., Morino, J.-I., Suto, H., Suzuki, R., Tamura, M., 2009: Discovery of the Coldest Imaged Companion of a Sun-like Star. *The Astrophysical Journal* **707**, 123–127.
- [10] Williams, D.M., Kasting, J.F., 1997: Habitable Planets with High Obliquities. *ICARUS* **129**, 263–266.
- [11] 小倉 義光, 1999: 一般気象学 [第 2 版]. 東京大学出版会, 308 頁.
- [12] 木下 宙, 1998: 天体と軌道の力学. 東京大学出版会, 259 頁.
- [13] 高木 貞治, 1961: 解析概論 [改訂第三版]. 岩波書店, 476 頁.
- [14] 横畠 徳太, 2003: 火星表層環境進化における CO₂ 凝結の役割. 北海道大学 理学部 学位論文.

- [15] 藤沢 健太, 球面三角法. 山口大学 理学部 電磁宇宙物理学研究室.
[http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/~kenta/eclipse/
SphericalTriangle081106.pdf](http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/~kenta/eclipse/SphericalTriangle081106.pdf) (参照 2010-01-27)