やさしい惑星科学入門ゼミ

3.3 中心星と原始惑星系円盤の形成

(c)自己相似的収縮 p162~

担当：髙橋 聖輝

自己相似的収縮

質量保存則 (3.48) $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v_r)=0$

運動量保存則 (3.49) $\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}-\frac{GM_r}{r^2}$

G:万有引力定数
P:公転周期
e:離心率
M_*:恒星質量
M:惑星質量

連立偏微分方程式を解く

①系を特徴づける次元量(等温音速 c，半径 r，時間 t)を用いて

無次元変数 $x=\frac{r}{ct}$ を導入

②無次元の密度 $\rho(r,t)\equiv\frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi Gt^2}$，質量 $M_r(r,t)\equiv\frac{c^3t}{G}\hat{M}(x)$,

速度 $v_r(r,t)=c\hat{v}(x)$ を用いて 式(3.48)，式(3.49) を整理

ただし， $\boldsymbol{M_r(r,t)=x^2(x-\hat{v})\hat{\rho}}$ **とする．** ⇒ 次ページで導出

自己相似的収縮

$M_r(r,t) = x^2(x-\hat{v})\hat{\rho}$ の導出

式(3.50)
$$\frac{\partial M_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial M_r}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\rho(r,t) \equiv \frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi G t^2},\quad M_r(r,t) \equiv \frac{c^3 t}{G}\hat{M}(x),$$
$$v_r(r,t) \equiv c\hat{v}(x)$$

代入

$$\frac{c^3}{G}\hat{M} + \frac{c^3 t}{G}\frac{\partial \hat{M}}{\partial t} + \frac{c^4 t\hat{v}}{G}\frac{\partial \hat{M}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{c^3 t}{G}\frac{\partial \hat{M}}{\partial r} = \frac{r^2\hat{\rho}}{G t^2}$$

$$x = \frac{r}{ct}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{ct}$$

$$\hat{M} + (\hat{v} - x)\frac{d\hat{M}}{dx} = 0$$

$$\frac{d\hat{M}}{dx} = x^2\hat{\rho}$$

よって，$M_r(r,t) = x^2(x-\hat{v})\hat{\rho}$

自己相似的収縮

式 (3.48) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) = 0$$

式 (3.49) $$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{G M_r}{r^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(r,t) \equiv \frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi G t^2},\quad M_r(r,t) \equiv \frac{c^3 t}{G}\widehat{M}(x), \\ v_r(r,t) = c\hat{v}(x) \end{array}}$$

代入して整理

$$-\frac{2\hat{\rho}}{t} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{2c\hat{v}}{r} + c\hat{v}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r} + c\hat{\rho}\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{c}\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c^2\hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial r} = -\frac{c^2}{\hat{\rho}}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r} - \frac{c^3 t}{c^2}\widehat{M} = 0$$

$$x = \frac{r}{ct}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{ct}$$

$$\hat{\rho}\frac{d\hat{v}}{dx} = 2\hat{\rho} - \frac{2\hat{v}\hat{\rho}}{x} + (x - \hat{v})\frac{d\hat{\rho}}{dx}$$

$$(x - \hat{v})\hat{\rho}\frac{d\hat{v}}{dx} = \frac{d\hat{\rho}}{dx} + (x - \hat{v})\hat{\rho}^2$$

自己相似的収縮

$$\begin{cases} \hat{\rho}\dfrac{d\hat{v}}{dx} = 2\hat{\rho} - \dfrac{2\hat{v}\hat{\rho}}{x} + (x - \hat{v})\dfrac{d\hat{\rho}}{dx} \\ (x - \hat{v})\hat{\rho}\dfrac{d\hat{v}}{dx} = \dfrac{d\hat{\rho}}{dx} + (x - \hat{v})\hat{\rho}^2 \end{cases}$$

整理すると，

$$[(x-\hat{v})^2 - 1]\frac{d\hat{v}}{dx} = \left[(x-\hat{v})\hat{\rho} - \frac{2}{x}\right](x-\hat{v}) \quad (3.52)$$

$$[(x-\hat{v})^2 - 1]\frac{1}{\hat{\rho}}\frac{d\hat{\rho}}{dx} = \left[\hat{\rho} - \frac{2}{x}(x-\hat{v})\right](x-\hat{v}) \quad (3.53)$$

自己相似的収縮

$$[(x-\hat{v})^2-1]\frac{d\hat{v}}{dx}=\left[(x-\hat{v})\hat{\rho}-\frac{2}{x}\right](x-\hat{v}) \quad (3.52)$$

$$[(x-\hat{v})^2-1]\frac{1}{\hat{\rho}}\frac{d\hat{\rho}}{dx}=\left[\hat{\rho}-\frac{2}{x}(x-\hat{v})\right](x-\hat{v}) \quad (3.53)$$

静止解は， $\hat{v}=0$， $\hat{\rho}=\frac{2}{x^2}$， $\widehat{M}=2x$

$(x-\hat{v})=1$ のとき, (3.52)，(3.53) 式から $\hat{\rho}=\frac{2}{x}$となり，静止解に接続されるためには $x=1$ で $\hat{v}=0$， $\hat{\rho}=2$． これが解を満たす条件.

自己相似的収縮

$x \to 0$ の時，

$$\hat{v} \to -\left(\frac{\hat{M}_0}{x}\right)^{1/2}$$

$$\hat{\rho} \to \left(\frac{\hat{M}_0}{2x^3}\right)^{1/2}$$

$\hat{M}_0$ は$M_r(r,t) \equiv \frac{c^3 t}{G}\hat{M}(x)$ で $x \to 0$ とした時の$\hat{M}$

また，中心の質量増加率(質量降着率)は $\frac{dM_r(0,t)}{dt} = \frac{c^3}{G}\hat{M}_0$