

やさしい惑星科学入門ゼミ

3.3 中心星と原始惑星系円盤の形成

(c)自己相似的収縮 p162~

担当：高橋 聖輝

自己相似的収縮

質量保存則 (3.48)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0$$

運動量保存則 (3.49)
$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{GM_r}{r^2}$$

G : 万有引力定数
P : 公転周期
e : 離心率
M_* : 恒星質量
M : 惑星質量

連立偏微分方程式を解く

①系を特徴づける次元量(等温音速 c , 半径 r , 時間 t)を用いて

無次元変数 $x = \frac{r}{ct}$ を導入

②無次元の密度 $\rho(r, t) \equiv \frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi G t^2}$, 質量 $M_r(r, t) \equiv \frac{c^3 t}{G} \hat{M}(x)$,

速度 $v_r(r, t) = c \hat{v}(x)$ を用いて式(3.48), 式(3.49)を整理

ただし, $M_r(r, t) = x^2(x - \hat{v})\hat{\rho}$ とする. \Rightarrow 次ページで導出

自己相似的収縮

$M_r(r, t) = x^2(x - \hat{v})\hat{\rho}$ の導出

式(3.50)
$$\frac{\partial M_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial M_r}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

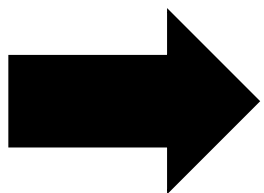
$$\rho(r, t) \equiv \frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi G t^2}, \quad M_r(r, t) \equiv \frac{c^3 t}{G} \hat{M}(x),$$
$$v_r(r, t) \equiv c \hat{v}(x)$$

代入

$$\frac{c^3}{G} \hat{M} + \frac{c^3 t}{G} \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} + \frac{c^4 t \hat{v}}{G} \frac{\partial \hat{M}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{c^3 t}{G} \frac{\partial \hat{M}}{\partial r} = \frac{r^2 \hat{\rho}}{G t^2}$$

$$x = \frac{r}{ct}$$



$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{ct}$$

$$\hat{M} + (\hat{v} - x) \frac{d\hat{M}}{dx} = 0$$

$$\frac{d\hat{M}}{dx} = x^2 \hat{\rho}$$

よって, $M_r(r, t) = x^2(x - \hat{v})\hat{\rho}$

自己相似的収縮

$$\text{式 (3.48)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0$$

$$\text{式 (3.49)} \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{GM_r}{r^2}$$

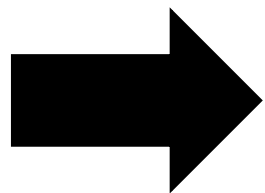
$$\rho(r, t) \equiv \frac{\hat{\rho}(x)}{4\pi G t^2}, \quad M_r(r, t) \equiv \frac{c^3 t}{G} \hat{M}(x), \\ v_r(r, t) = c \hat{v}(x)$$

代入して整理

$$-\frac{2\hat{\rho}}{t} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{2c\hat{v}}{r} + c\hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r} + c\hat{\rho} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = 0$$

$$c \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} = -\frac{c^2}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial r} - \frac{c^3 t}{c^2} \hat{M} = 0$$

$$x = \frac{r}{ct}$$



$$\hat{\rho} \frac{d\hat{v}}{dx} = 2\hat{\rho} - \frac{2\hat{v}\hat{\rho}}{x} + (x - \hat{v}) \frac{d\hat{\rho}}{dx}$$

$$(x - \hat{v}) \hat{\rho} \frac{d\hat{v}}{dx} = \frac{d\hat{\rho}}{dx} + (x - \hat{v}) \hat{\rho}^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{ct}$$

自己相似的収縮

$$\begin{cases} \hat{\rho} \frac{d\hat{v}}{dx} = 2\hat{\rho} - \frac{2\hat{v}\hat{\rho}}{x} + (x - \hat{v}) \frac{d\hat{\rho}}{dx} \\ (x - \hat{v})\hat{\rho} \frac{d\hat{v}}{dx} = \frac{d\hat{\rho}}{dx} + (x - \hat{v})\hat{\rho}^2 \end{cases}$$

整理すると,

$$[(x - \hat{v})^2 - 1] \frac{d\hat{v}}{dx} = \left[(x - \hat{v})\hat{\rho} - \frac{2}{x} \right] (x - \hat{v}) \quad (3.52)$$

$$[(x - \hat{v})^2 - 1] \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{d\hat{\rho}}{dx} = \left[\hat{\rho} - \frac{2}{x} (x - \hat{v}) \right] (x - \hat{v}) \quad (3.53)$$

自己相似的収縮

$$[(x - \hat{v})^2 - 1] \frac{d\hat{v}}{dx} = \left[(x - \hat{v})\hat{\rho} - \frac{2}{x} \right] (x - \hat{v}) \quad (3.52)$$

$$[(x - \hat{v})^2 - 1] \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{d\hat{\rho}}{dx} = \left[\hat{\rho} - \frac{2}{x}(x - \hat{v}) \right] (x - \hat{v}) \quad (3.53)$$

静止解は, $\hat{v} = 0$, $\hat{\rho} = \frac{2}{x^2}$, $\hat{M} = 2x$

$(x - \hat{v}) = 1$ のとき, (3.52), (3.53) 式から $\hat{\rho} = \frac{2}{x}$ となり, 静止解に接続されるためには $x = 1$ で $\hat{v} = 0$, $\hat{\rho} = 2$. これが解を満たす条件.

自己相似的収縮

$x \rightarrow 0$ の時,

$$\hat{v} \rightarrow - \left(\frac{\hat{M}_0}{x} \right)^{1/2}$$

$$\hat{\rho} \rightarrow \left(\frac{\hat{M}_0}{2x^3} \right)^{1/2}$$

\hat{M}_0 は $M_r(r, t) \equiv \frac{c^3 t}{G} \hat{M}(x)$
で $x \rightarrow 0$ とした時の \hat{M}

また, 中心の質量増加率(質量降着率)は $\frac{dM_r(0, t)}{dt} = \frac{c^3}{G} \hat{M}_0$