

やさしい惑星科学入門ゼミ

2023/07/06 (担当：有馬・黒江)

P159まず、まったく回転していない場合
~P160(3.43)まで

$$P_{ext} = (1 - \hat{M}^2) \hat{R}^{-4} + \hat{J} \hat{M}^{-1} \hat{R}^{-5} + \hat{c}^2 \hat{M}^{(3\gamma-1)/2} \hat{R}^{-3\gamma} \quad (3.40)$$

$J = 0$ の場合を考えると、(3.40)は右図のようになる。

- $\hat{M} \leq 1$ (図の破線) のとき、
 P_{ext} に対するつりあいの \hat{R} はただ1つに決まる。
 この解は、 P_{ext} の増加に伴って \hat{R} が減少 (内圧が増加) するので、安定解。

- $\hat{M} > 1$ (図の実線) のとき、
 P_{ext} に対するつりあいの \hat{R} は3つ得られる。

➤ 半径が最も最も大きい解Cと最も小さい解Aは安定解

➤ 中間の半径の解Bは不安定解

解A：内圧が自己重力を支える構成に相当

解C：主に外圧によって押さえられている分子雲コアに相当

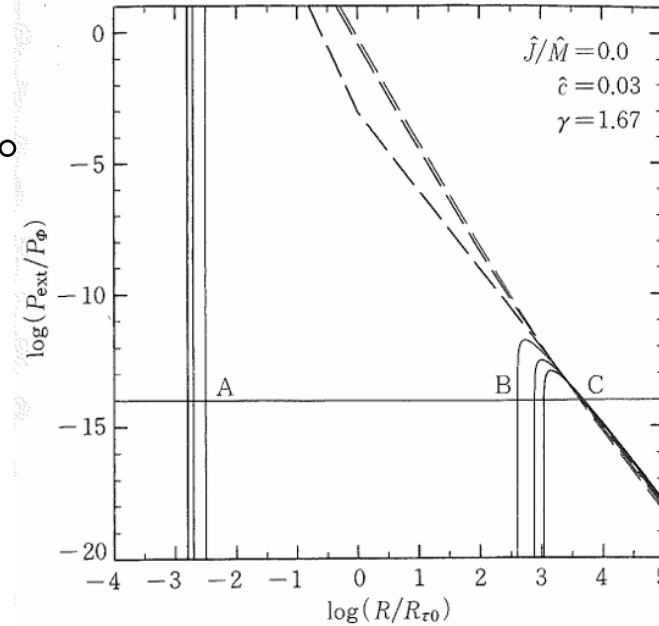


図3.4 回転のない自己重力磁気ガス球の平衡解。質量 M を変化させて半径 R に対して外圧 P_{ext} を描いた。適当な外圧に対する平衡解 ($M > M_\phi$ の場合) を内側から A (恒星)、B、C (分子雲コア) で示した。

$$P_{ext} = (1 - \hat{M}^2)\hat{R}^{-4} + \hat{j}\hat{M}^{-1}\hat{R}^{-5} + \hat{c}^2\hat{M}^{(3\gamma-1)/2}\hat{R}^{-3\gamma} \quad (3.40)$$

図の赤い部分における \hat{R}, P_{ext} を求める

$J = 0, \gamma = 1$ として、(3.40)を \hat{R} で微分すると、

$$\frac{dP_{ext}}{d\hat{R}} = -\frac{4(1-\hat{M}^2)}{\hat{R}^5} - \frac{3\hat{c}^2\hat{M}}{\hat{R}^4}$$

この右辺が0となるとき、

$$\hat{R} = \frac{4(1-\hat{M}^2)}{3\hat{c}^2\hat{M}}$$

このとき、(3.40)より、 P_{ext} は

$$P_{ext} = \frac{27\hat{c}^8\hat{M}^4}{256(\hat{M}^2-1)^3} \quad (3.42)$$

図より、外圧がこの値を超えると、3つ得られていた解のうち2つの解はなくなり、解は1つしか残らない

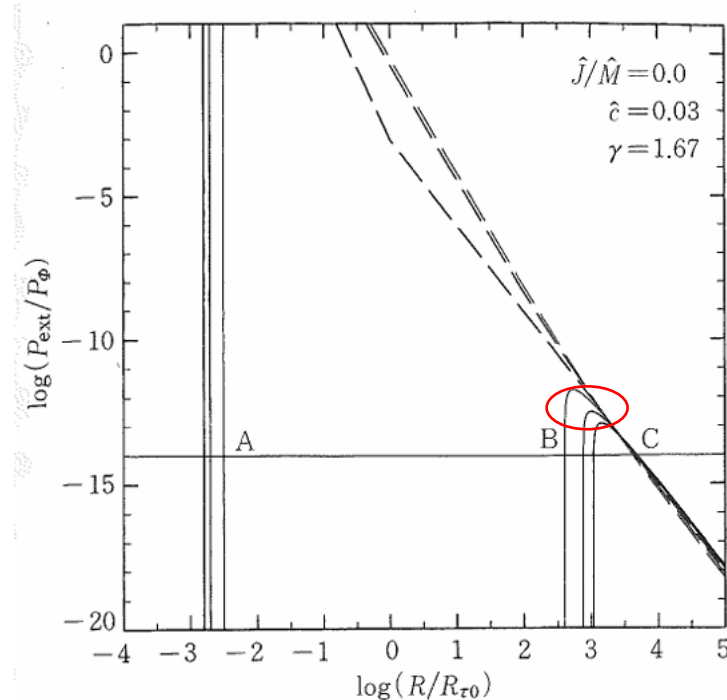


図 3.4 回転のない自己重力磁気ガス球の平衡解. 質量 M を変化させて半径 R に対して外圧 P_{ext} を描いた. 適当な外圧に対する平衡解 ($M > M_\phi$ の場合) を内側から A (恒星), B, C (分子雲コア) で示した.

(3.42)により、 P_{ext} に対して分子雲コアに相当する平衡解Cが存在しうる質量の上限、つまり臨界質量 M_{cr} が得られる。

$$P_{ext} = \frac{27\hat{c}^8\hat{M}^4}{256(\hat{M}^2-1)^3} \quad (3.42)$$

$$\widehat{P}_{ext} = \frac{P_{ext}}{\alpha_M\phi^2/(4\pi R_{r0}^4)}, \quad \widehat{c}^2 = \frac{3c_1^2 R_{\tau 0}}{\alpha_M\phi^2/(4\pi R_{r0}^4)}, \quad M_\phi = \left(\frac{a_M}{a_w}\right)^{1/2} G^{-1/2}\Phi \text{ より、}$$

$$P_{ext} \times \frac{4\pi R_{r0}^4}{M_\phi^2 a_w G} = \frac{27\hat{M}^4}{256(\hat{M}^2-1)^3} \left(\frac{3c_1^2 R_{\tau 0}}{\alpha_M G^3 M_\phi^4}\right)^4$$

整理すると、

$\frac{R_{\tau 0}}{R_{r0}} = 1$ または 教科書の誤植？

$$M_{cr} = \frac{27\sqrt{3}}{32} \frac{1}{a_w^{3/2} \pi^{1/2}} \left\{ 1 - \left(\frac{M_\phi}{M}\right)^2 \right\}^{-3/2} \frac{c_1^4}{G^{3/2} P_{ext}^{1/2}} \quad (3.43)$$