MHD 方程式

- 磁気流体力学(Magnetohydrodynamics)

  -磁場の中を運動する流体中の荷電粒子は電磁力を受ける

  -流体中の中性粒子は荷電粒子と衝突し，力を受ける

  -あたかも流体が磁場から力を受けているようにふるまう

  -運動を記述するためには

  ①電磁場の基礎方程式

  ②流体の支配方程式

  が必要

3.3 章における仮定

・Maxwell 方程式（MKSA 単位系）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$ ファラデーの誘導法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}_e$$ アンペールの法則

$\boldsymbol{D}$:電束密度
$\boldsymbol{B}$:磁束密度
$\boldsymbol{E}$:電場
$\boldsymbol{H}$:磁場の強さ
ρ_e:電荷密度
$\boldsymbol{j}_e$:電流密度

3.3 章における仮定

・流体近似

-粒子の集団の典型的なスケールがガス分子の平均自由行程 l_g に比べて十分大きい

衝突した分子が再度衝突するまでに進む平均の距離

・分子同士の衝突が十分頻繁に起こっている

-巨視的に微小な体積中に分子が多数存在し，それらの運動が平均化されている

・電気的準中性条件

-原子や分子が持つ正電荷量と負電荷量の絶対値が等しい

$$\rho_e \equiv \sum_\mu n_\mu e_\mu = 0$$

3.3 章における仮定

アンペールの法則

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E) = \boldsymbol{j}_e \xrightarrow{\text{cgs-gauss 単位へ変換}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c_l \nabla \times \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{j}_e$$

$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/c_l$, $\mu_0 = 4\pi/{c_l}^2$

$\varepsilon_0 = 1/4\pi$　透磁率: μ_0

誘電率: ε_0

変位電流が無視できる条件

$$\frac{4\pi \boldsymbol{j}_e}{c_l} = \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c_l}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

で右辺第二項が第一項よりも十分小さいこと

すなわち

$$\left|\frac{1}{c_l}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right| / |\nabla \times \boldsymbol{B}| \ll 1$$

3.3 章における仮定

典型的な空間スケール L とすると

$$\frac{\left|\frac{1}{c_l}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|}{|\nabla \times \boldsymbol{B}|} \sim \frac{E/(c_l t)}{B/L} = \frac{E}{B}\frac{L}{c_l t} \ll 1$$

ファラデーの誘導法則を cgs-gauss 単位系で記述すると

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \xrightarrow[\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/c_l]{\text{cgs-gauss 単位へ変換}} \frac{1}{c_l}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}$$

次元解析し，流体の速度を v とすると，$v = L/t$ なので

$$E \sim \frac{B}{c_l}\frac{L}{t} \sim \frac{v}{c_l} B$$

3.3 章における仮定

以上より，変位電流が無視できる条件は

$$\frac{\left|\frac{1}{c_l}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|}{|\nabla \times \boldsymbol{B}|} \sim \frac{E}{B}\frac{L}{c_l t} \sim \left(\frac{v}{c_l}\right)^2 \ll 1$$

となり，プラズマの速度が光速よりも十分に小さいことと等価

ローレンツ力 f_L

・電磁場から各荷電粒子が受ける力 (ローレンツ力)

$$e_\mu(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_\mu \times \boldsymbol{B})$$

・単位体積の流体が電磁場から受ける力 ($\boldsymbol{f_L}$)

$$f_L = \sum_\mu n_\mu e_\mu(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\mu}} \times \boldsymbol{B})$$

-cgs-gauss 単位系への変換

-$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/c_l$ (c_l は光速)

$$f_L = \sum_\mu n_\mu e_\mu \left(\boldsymbol{E} + \frac{v_\mu \times \boldsymbol{B}}{c_l}\right) \quad (3.19)$$

ローレンツ力 f_L

電気的準中性条件 $\left(\sum_\mu n_\mu e_\mu\right)$ より

$$f_L = \sum_\mu n_\mu e_\mu \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v_\mu} \times \boldsymbol{B}}{c_l} \right) = \sum_\mu n_\mu e_\mu \frac{\boldsymbol{v_\mu} \times \boldsymbol{B}}{c_l}$$

変位電流は無視するという仮定から，アンペールの法則は

$$\boldsymbol{j_e} \equiv \sum_\mu n_\mu e_\mu \boldsymbol{v_\mu} = \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \xrightarrow[\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/c_l,\ \ \mu_0 = 4\pi/{c_l}^2]{\text{cgs-gauss 単位へ変換}} \nabla \times \frac{c_l \boldsymbol{B}}{4\pi}$$

よって，

$$f_L = \sum_\mu n_\mu e_\mu \frac{\boldsymbol{v_\mu} \times \boldsymbol{B}}{c_l} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} (3.19)$$

単位変換

・Maxwell 方程式

（MKSA 単位系）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}_e$$

単位変換

（cgs-gauss 単位系）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{B}}{c_l} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{c_l}\right) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}_e$$