やさしい惑星科学入門ゼミ

2023/06/08 （担当：有馬）

教科書の式(3.9),(3.10)：円盤の面密度

右図において円盤内の鉛直方向のつり合いを考えると、

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{GM_*}{r^2+z^2}\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \cong \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{GM_*}{r^3}z$$

これは、$C_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ を用いると、

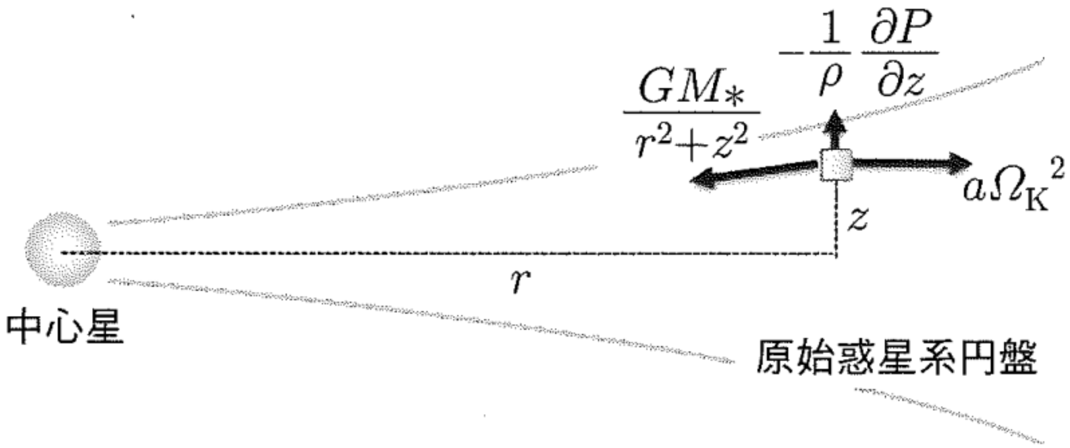
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}C_s^2 = -\frac{GM_*}{r^3}z$$

また、ケプラー角速度 $\Omega_K = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$ を用いると、

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\Omega_K^2}{C_s^2}z$$

積分を行い、 スケールハイト$h = C_s/\Omega_K$ とすると、

$$\rho = \rho_0 e^{-z^2/2h^2}$$



惑星形成の物理(井田,中本)より引用

教科書の式(3.9),(3.10)：円盤の面密度

得られた $\rho = \rho_0 e^{-z^2/2h^2}$ を用いると、円盤の面密度は

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 e^{-z^2/2h^2} \, dz$$

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いると、

$$\Sigma = \rho_0 h \sqrt{2\pi}$$

教科書の式(3.9),(3.10)：円盤の面密度

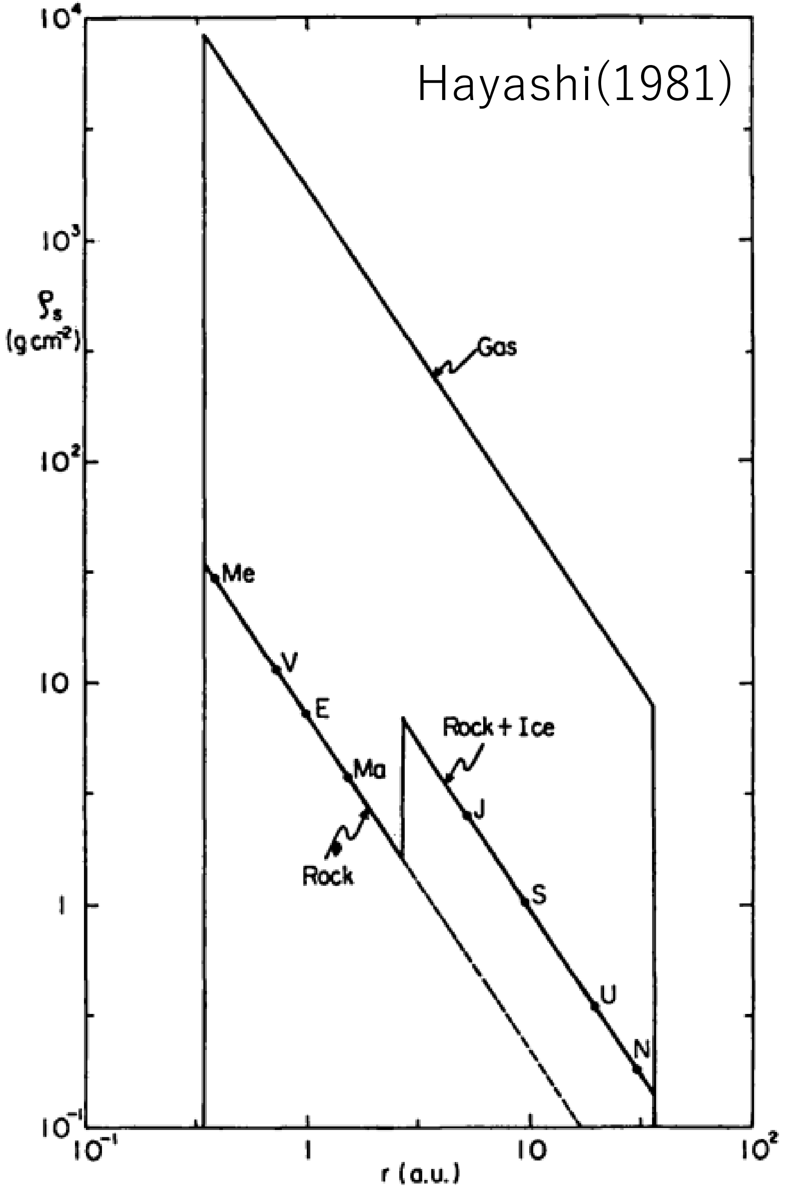
固定成分の面密度は、右図のようなフィッティングを行うことで、

$$\Sigma_{\mathrm{d}}^{\mathrm{H}} = 7.1 \times \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-3/2} \qquad ([\mathrm{E}]: 0.35\mathrm{AU} \lesssim \mathrm{r} \lesssim 2.7\mathrm{AU})$$

$$\Sigma_{\mathrm{d}}^{\mathrm{H}}[J] = 30 \times \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-3/2} \quad ([\mathrm{J}]: 2.7\mathrm{AU} \lesssim \mathrm{r} \lesssim 36\mathrm{AU})$$

ガスの面密度は、分子雲ガス/ダスト比を用いる(おそらく太陽化学組成に基づく)ことで、

$$\Sigma_{\mathrm{g}}^{\mathrm{H}} = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-3/2}$$



教科書の式(3.11)：円盤の温度分布

一般的に物体の温度Tの時間変化は、熱容量C, 物体への加熱率Γ, 冷却率Λ を用いて、次式となる。

$$C\frac{dT}{dt} = \Gamma - \Lambda$$

ここでは、円盤中の固体微粒子が中心星からのエネルギーを受け取るような環境を想定する。

中心星の光度をLとすると、中心星からr離れた場所にある固体微粒子に届くエネルギーフラックスFは $F = L/4\pi r^2$ となる。

消散係数をQ_{VIS}とすると、加熱率Γは

$$\Gamma = Q_{VIS}\pi a^2 \frac{L}{4\pi r^2}$$

消散係数をQ_{IR}とすると、冷却率Λは

$$\Lambda = Q_{IR} 4\pi a^2 \sigma_{SB} T^4$$

教科書の式(3.11)：円盤の温度分布

加熱率$\Gamma = Q_{VIS}\pi a^2 \frac{L}{4\pi r^2}$, 冷却率$\Lambda = Q_{IR}4\pi a^2 \sigma_{SB} T^4$ を用いて、$C\frac{dT}{dt} = \Gamma - \Lambda$の平衡解を求めると、

$$0 = Q_{VIS}\pi a^2 \frac{L}{4\pi r^2} - Q_{IR}4\pi a^2 \sigma_{SB} T^4$$

簡単のため$Q_{VIS} = Q_{IR} = 1$とし、Lを太陽光度, rを1AUで規格化した上で、Tについて解くと、

$$T = 280\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

光学的深さが小さいとき、太陽光は円盤内を十分に透過するため、

$$T = 280\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

教科書の式(3.12)：円盤のスケールハイト

式(3.71)より、円盤のスケールハイトhは次式で与えられる。

$$h \sim 0.05 \left(\frac{T}{300K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{3}{2}}$$

これに、$T = 280 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{2}}$ を代入すると、

$$h \sim 0.05 \left(\frac{280}{300}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{5}{4}} \approx 4.7 \times 10^{-2} \left(\frac{r}{1AU}\right)^{\frac{5}{4}}$$