あるケプラー回転する原始惑星円盤 (Disk) について，超過スペクトルから温度分布や総質量を見積もりたい．

まず，文字の定義からしていく． Disk の回転軸に垂直方向の距離を r，地球の視線方向となす角を θ とする．Disk の内縁と回転軸の距離を R_0 ，外縁との距離を R_D で表す．

$$\begin{cases} \Sigma = \Sigma_0 \left(\dfrac{r}{R_0}\right)^{-p}. \\ T = T_0 \left(\dfrac{r}{R_0}\right)^{-q}. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，Σ は Disk の面密度 (質量密度を軸方向に積分したもの)，T は Disk の温度を表す．

続いて，吸光係数 σ の定義を示す．

$$I = I_0 e^{-\sigma L}. \tag{2}$$

I は透過光強度，I_0 は入射光強度，L は光路長を表す．

プランク関数 $B_\nu(T)$ は，絶対温度 T の黒体から単位面積を通して単位時間，単位立体角，単位周波数あたりに放射されるエネルギー密度を表す．

$$B_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3}{c_l^2} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}. \tag{3}$$

Disk の吸光を無視した場合の，回転軸に沿った方向の振動数 ν の単位振動数あたりのエネルギー流束 $L_{\nu 0}$ は，νB_ν を回転軸から距離 r で Disk まわりに一周させ，更に r を R_0 から R_D まで積分し，最後に全球方向に立体角を積分して求められる．

$$\begin{aligned} \nu L_{\nu 0} &= \int_S \frac{\boldsymbol{r'} \cdot d\boldsymbol{S}}{r'^3} \int_{R_0}^{R_D} \nu B_\nu(T) 2\pi r \, dr \\ &= 4\pi \int_{R_0}^{R_D} \nu B_\nu(T) 2\pi r \, dr. \end{aligned} \tag{4}$$

これを Disk 内での吸光を加味し，地球方向のエネルギー流束で同様に考えたい．

単位質量当たりの吸光係数を κ_ν とおくと，$\kappa_\nu \Sigma$ は単位体積当たりの吸光係数を軸方向に積分したもの，すなわち，単位体積当たりの吸光係数と軸方向の光路長を掛けたものとなる．地球方向の光路長は，軸方向のそれの $\frac{1}{\cos\theta}$ であるから，(2),(4) より，

$$\nu L_\nu = 4\pi \cos\theta \int_{R_0}^{R_D} \nu B_\nu(T) \left(1 - e^{-\kappa_\nu \Sigma(r)/\cos\theta}\right) 2\pi r \, dr. \tag{5}$$

積分変数 x と無次元係数 g を以下のようにおく．

$$
\begin{cases}
x \equiv \left(\dfrac{h\nu}{kT_0}\right)^{1/q} \dfrac{r}{R_0}. \\
g(\nu, \theta) \equiv \dfrac{\kappa_\nu \Sigma_0}{\cos\theta} \left(\dfrac{h\nu}{kT_0}\right)^{p/q}.
\end{cases}
\tag{6}
$$

(1) と (6) を (5) に代入して整理すると以下の式が得られる．

$$
\nu L_\nu = \frac{16\pi^2 h}{c_l^2} \left(\frac{kT_0}{h}\right)^{2/q} R_0^2 \cos\theta \nu^{4-2q} \int_{X_0}^{X_D} \frac{1 - e^{-gx^{-p}}}{e^{x^q} - 1} x dx. \tag{7}
$$