自由落下時間の簡単な導出

松岡 亮／ Matsuoka N. Ryo*

2020 年 12 月 19 日

1　はじめに

自己重力球の収縮の典型的な時間尺度である自由落下時間 (free-fall time) $t_{\rm ff}$ は，次のように与えられる：

$$t_{\rm ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \tag{1}$$

ここで，G は万有引力定数，ρ は系の質量密度である．この表式は，落下ガス片のエネルギー保存則を動径距離 $r(t)$ の微分方程式とみなすことで導くことができるが，その手順は少々煩雑である．ここでは，より簡単な方法で自由落下時間を求めることを考える．

2　方針

- 自由落下運動を Kepler 運動の極限とみなす．
- Kepler 周期を用いて自由落下時間を書き下す．

3　議論

質量 M のガス球を考える．このガス球が収縮をはじめたとき，半径は R だったとする．収縮をはじめてから，距離 R にいたガス片が中心に到達するまでの時間を求めよう．

ガス片落下の駆動力は，距離 R より内側の質量が及ぼす重力である．この事実から，ガス片と内部質量の二体問題を考えよう．ガス片落下を Kepler 運動で近似すると，軌道長半径 $a = R/2 = \text{const.}$ かつ離心率 $e \to 1-0$（左からの極限）の楕円軌道上を，遠点から近点へ駆け抜ける運動となる．なぜならば，軌道長半径一定のまま離心率を 1 に近づけると，近点距離は 0 に，遠点距離は $2a = R$ に，遠点速度は 0 に近づくからである (Fig. 1)．よって，これはガス片落下の良い近似となっている．なお，落下に要する時間 τ は，Kepler 周期 $T_{\rm K}$ の半分

$$\tau = \frac{T_{\rm K}}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{2}$$

で与えられ，離心率には依存しない．

* 北海道大学大学院理学院宇宙理学専攻 (mail: matryo@ep.sci.hokudai.ac.jp)

この τ こそが自由落下時間である．実際，$M=(4/3)\rho\pi R^3$ かつ $a=R/2$ となることを思い出せば，τ は

$$\tau=\sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \tag{3}$$

と書くことができる．これは自由落下時間の式 (1) に他ならない．

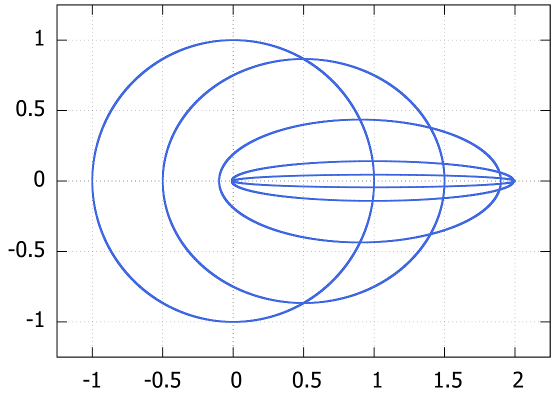

Fig. 1　**重力源の重心が原点にあるときに実現する楕円軌道．**軌道長半径 a を 1 に固定し，離心率 $e=0$，0.5，0.9，0.99，0.999 の 5 通りに振ったものを図示している．e が 1 に近づくにつれ，近点距離が 0 に，遠点距離が $2a=2$ に近づくことが見てとれる．