e^π と π^e の大小比較に関する一つの検討

北海道大学大学院 理学院 宇宙理学専攻
松岡 亮／ Matsuoka Ryo

2017 年 2 月 24 日

1 動機

e^π と π^e の比較は，関数 $\ln x/x$ の特性を用いて示すことができる．しかし，方程式 $e^x = x^e$ が $x = e$ に唯一の解を持つことを認めれば，e^π と π^e の大小比較が簡単になると考えた．本文書ではこのことを用いた証明を試みた．

2 証明

Proof.
区間 $[0, \infty)$ を定義域とする 2 つの関数 x^e と e^x を考える．両関数値は $x = e$ でのみ一致し，いずれも単調増加関数である．故に，$x > e$ では関数値の大小関係は入れ替わることがない．

$x = 10$ を例にとる．まず初めに x^e を評価する．$e < 3$ より，

$$10^e < 10^3 = 1000. \tag{1}$$

次に，e^x を評価する．$e > 2$ より，

$$e^{10} > 2^{10} = 1024 > 1000. \tag{2}$$

故に，$10^e < e^{10}$.

$e < \pi$ であるのでこの大小関係は $x = \pi$ でも保存し，$\pi^e < e^\pi$. $\square$

3 雑感

この証明の問題点として，「方程式 $e^x = x^e$ が $x = e$ に唯一の解を持つ」を自明としてもよいかということが挙げられる．`e^x = x^e` というふうに方程式を行形式の数式で書いたとき，私は $x = e$ が唯一の解となることが自明であるかのように思われたが，いざ $\LaTeX$ を用いて $e^x = x^e$ と表してみると，自明であるかどうか自信がなくなってしまった．結局，自明か否かというのは個人の感覚に依存する概念なのではないかと思われたので，この証明は「方程式 $e^x = x^e$ が $x = e$ に唯一の解を持つ（ことは自明）とする」という但し書きを伴って行われるべきであろう．