

## 2. 重力と地球の形

### 2-1 重力

#### 重要性

- 地球の形を決めているもっとも重要な力.
- 地球内部の質量の分布を探る手段を提供.

#### 重力の中身 万有引力と遠心力の合力

**万有引力** 質量  $M$  の質点 A が距離  $r$  離れた質量  $m$  の質点 B に及ぼす万有引力の大きさ  $f_g$  は次式で表される.

$$f_g = \frac{GMm}{r^2}$$

ここで  $G$  は万有引力定数で

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

力の向きはベクトル  $\vec{BA}$  の方向.

また質点 A の作る重力ポテンシャル ( $r$  の位置においた質量の単位質量あたりの位置エネルギー)  $V$  は

$$V = -\frac{GM}{r}$$

と表される. 等ポテンシャル面 ( $V$  一定の面) では  $r$  一定. つまり球面になる. 力の向きとは直交する<sup>1</sup>.

**任意の質量分布による万有引力** 質点の集合とみなしてそれらによる万有引力を重ね合わせたものに等しい (重ね合わせの原理)<sup>2</sup>.

**有用な定理** 有限な大きさをもつ総質量  $M$  の球形の物体があり, その内部の密度分布が球の中心の周りで対称 (球対称) とする. このときこの物体が外部にある別の質点に及ぼす重力や重力ポテンシャルは, 球の中心に質量  $M$  の質点を置いた場合に得られるものと等しい<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>ポテンシャルと力の向きの直交性は常に成立する. 証明にはベクトル解析の知識が必要. 数物系学科では 2 年次または 3 年次に習う

<sup>2</sup>力の重ね合わせはベクトル和, ポテンシャルの重ね合わせは代数和をとる

<sup>3</sup>この証明にもベクトル解析の知識が必要.

**遠心力** 半径  $r$  の円上を等速円運動する質量  $m$  の質点に働く遠心力の大きさは

$$f_c = mr\omega^2,$$

ここで  $\omega$  は回転角速度で、回転周期  $T$  を用いて次式で定義される

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

遠心力についても遠心力による単位質量あたりの位置エネルギーを考  
えることによって遠心ポテンシャルを定義できる<sup>4</sup>.

**重力加速度** 単位質量あたりに働く重力を重力加速度という。地球表面での値はお  
よそ  $9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。地球科学分野では重力加速度の単位に伝統的に gal(ガル) も利  
用されてきた。  $1\text{gal}=1\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}=10^{-2}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。

また万有引力と遠心力のそれぞれのポテンシャルの和を重力ポテンシャルと  
いう。

**重力の測定** 地面で計る方法と衛星の運動から求める方法に大別される。地面で計  
る方法には自由落下、振り子、ばね、超伝導重力計などが利用されている。

## 2-2 地球の形と大きさ

**丸い地球** 今は宇宙から撮った地球の写真を皆知っているので当たり前。昔は間接  
的な証拠から推測されていた。

- 水平線の向こうから近づく船(陸)の見え方
- 高いところに登るほど遠くが見える
- 大航海
- 天体の見える高度の緯度差
- …

**丸い理由** 地球を作っている固体物質の強度に限界があり、地球自体の重力によっ  
て凹凸が潰されているから。限度を超えた力を及ぼすと固体は壊れたり流動  
したりする。そして重力エネルギーがより低い状態へ物質が再配置される。

### 地球の大きさの求めかた

---

<sup>4</sup>その具体形は回転軸からの距離を  $l$  として

$$-\frac{1}{2}\omega^2 l^2$$

- 天体の高度差(エラトステネスの方法 紀元前 230 年)：球を仮定
- 測量：18 世紀にフランスの測量隊が 1/4 子午線の長さを決めた（フランスダンケルクからスペインバルセロナまでの距離を正確に求めた）。メートル法の起源.
- 宇宙測地：非常に精密（精度は mm のオーダー）

**自転の効果** 自転による遠心力のために地球は赤道方向に少し膨らんでいる。そのため地球の形は回転楕円体で近似される。

**地球が楕円体であることの間接的な証明** 地理緯度(天頂の方向と赤道面のなす角度)1 度あたりの子午線長が緯度によって変化する。

**ジオイド (geoid)** 重力の方向を鉛直方向，それに直交する方向を水平方向という。平均的な海水面を延長した，いたるところで水平なひとつづきの面をジオイドという<sup>5</sup>。物理的には重力ポテンシャルが一定の面である。

高度の基準(海拔ゼロメートル面)。

**高度の分布** 地球の高度分布図は 2 こぶ型になる。大陸と海洋底に対応している。このような特徴は他の惑星では知られていない。

**地球楕円体** ジオイドの形にもっとも近い回転楕円体を地球楕円体と呼ぶ。実は楕円体の決め方には任意性があり各国で違う<sup>6</sup>ものが使われている。日本は GRS80 楕円体を用いている。

GRS80(Geodetic Reference System 1980, 測地基準系 1980)

	記号・式	値
赤道半径	$a$	6378.137km
極半径	$b$	6356.752km
扁平率	$\frac{a-b}{a}$	$\frac{1}{298.257222101}$

また地球楕円体上で定めた重力加速度を標準重力あるいは正規重力と呼ぶ。

**ジオイドの凹凸** 地下に密度の高い物質があるとジオイドは盛り上がり，逆に地下に密度の低い物質があるとジオイドはへこむ。

<sup>5</sup>接頭辞ジオ (geo) は地球，接尾辞 (-oid) は似たもの，をあらわす。「地球の近似形状」というような意味

<sup>6</sup>ただし差はほんの少し

## 2-3 重力補正と重力異常

**重力補正の必要性** 計測点の高度や地形の違いを補正することで、地下の密度分布について情報を得ることが可能になる。

補正の方法にはフリーエア補正・地形補正・ブーゲー補正がある。

**フリーエア補正 (free-air correction)** 高度が大きくなれば地球から離れた分、重力は小さくなる。ゼロ高度面と測定点の間に質量がないとして、ゼロ高度面での重力値へ換算する方法をフリーエア補正という。高度を  $h$  とすると補正量は

$$\Delta g_1[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = 3.1 \times 10^{-6}h[\text{m}]$$

**地形補正** 測定点の周りの地形が平坦でない効果を補正する。補正量は小さい。

**ブーゲー補正 (Bouguer correction)** ゼロ高度面と測定点の間にある物質の及ぼす重力の影響も取り除く。これによってジオイド面よりも下の物質分布について情報を得ることができる。補正に使う物質の密度には大陸地殻の岩石の代表的な値  $2.67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  を用いる。測定点の高度を  $h$  とすると補正量は

$$\Delta g_2[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = 1.13 \times 10^{-6}h[\text{m}].$$

海上では海底面までが岩石で置き換わった場合の重力に換算する。補正の公式は水深を  $d$  として

$$\Delta g_2[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = 0.42 \times 10^{-6}d[\text{m}]$$

**重力異常** 標準重力と補正を施した測定重力の差。補正の仕方に応じてそれぞれフリーエア異常、ブーゲー異常と呼ぶ。

- フリーエア異常：測定点直下の地下の質量の情報を持っている。大陸で正(陸地の質量によって重力が強くなる)、海溝では負(密度の小さな海水が深部まであるため重力が小さくなる)になっている。
- ブーゲー異常：ジオイド面よりも深い部分の質量の情報を持っている。大陸で負、海では正になっている。これは大陸のほうが海よりも深部は軽い物質でできていることを示している。これはアイソスタシー(地殻がマントルに浮いていること)の根拠となっている。

## 2-4 アイソスタシー

**定義** 密度の低い地殻が、密度の高いマントルに浮かんでおり、地殻の重さと浮力が釣り合っている状態<sup>7</sup>をアイソスタシー<sup>8</sup>と言う。

**原理** 氷が水の上に浮いている状態と原理は同じ。簡単のために密度  $\rho_i$  の厚さ  $h$  の板状の氷が密度  $\rho_w$  の水に浮き、静止した状態を考える。このときに氷の底面での圧力は、重力加速度を  $g$  として  $\rho_i gh$ 。底面の深さを  $d$  とすると、氷に覆われてない水面下でのこの深さの圧力は  $\rho_w gd$ 。力の釣り合いは、両者の圧力が等しい時になりたつ（ちなみに圧力が等しくない場合は、力の釣り合いがくずれて流れが生じる。）すなわち

$$\rho_i gh = \rho_w gd$$

上の式から厚さと、底面の深さの関係は

$$d = \frac{\rho_i}{\rho_w} h$$

となつて、氷の上面の水面からの高さは

$$h - d = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_w} h$$

となる。氷の場合、 $\frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_w}$  はおよそ 0.1 であるので、厚みの約 1/10 の高さだけ氷は水面上に顔を出す。

アイソスタシーの成立条件は、流動性の高い層での圧力が水平方向に一定であること、と言える。

また、圧力  $P$  は上に乗っている物質の荷重によって決まる。もしも海水 ( $\rho_w$ )、上部地殻 ( $\rho_c$ )、下部地殻 ( $\rho_b$ )、マントル ( $\rho_m$ ) が重なっている場合には、それぞれの厚さを  $\Delta z_w, \Delta z_c, \Delta z_b, \Delta z_m$  とすると

$$P = \rho_w \Delta z_w + \rho_w \Delta z_c + \rho_c \Delta z_b + \rho_b \Delta z_m$$

で求められる。地域によってそれぞれの厚みが異なっているとしても、アイソスタシーが成立していれば、マントル内の仮想的な水平面での圧力はどこでも一定となる。

**証拠** 重力異常の他に、スカンジナビア半島の隆起が有名。もっとも大きなところで毎年 1cm 隆起している。この地域は約 1 万年前には厚さ約 3000m の氷床で覆われていた。その後、氷河期が終わり氷床が溶け、荷重が減少したために新たな力の釣り合いの状態に向かって地盤が上昇している。つまり、アイソスタシーに向かってマントルがゆっくり流動している、と解釈される。

<sup>7</sup>一般的には、上位の物質層(地殻に限らず)が、下位の流動性の高い岩石層の上に浮かび、岩石層の重さと浮力が釣り合っている状態

<sup>8</sup>isostasy, 地殻均衡と訳されるが、あまり用いられない。

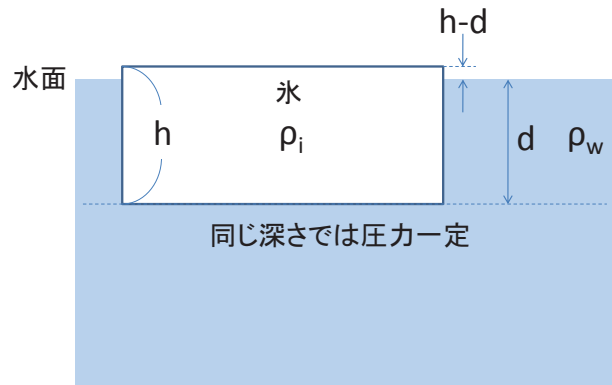


図 1: 水に浮いている氷の重さと浮力の釣り合いは、氷の底の深さで圧力が水平方向に一定の時に達成される。

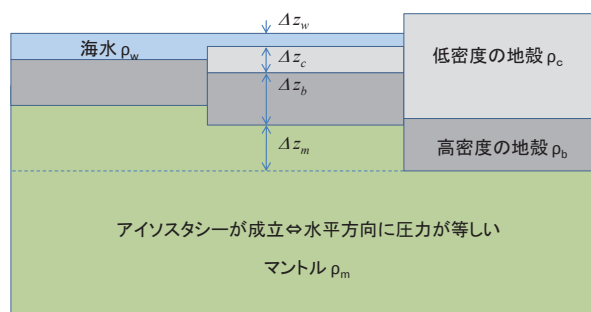


図 2: アイソスタシーが成立する場合、地域によって各層の厚みは異なるが、マントル内の圧力は水平方向に一定になる。

## 問題

問題番号に★が一つ付けてあるものは難しいが現在の知識でもきちんと考えれば解ける問題. ★が二つのものは現在の知識+アルファが必要な挑戦問題. 間違っても良いのでトライしてみて欲しい. 試行錯誤が成長の糧になる.

**2.1** 地球の質量  $M = 5.974 \times 10^{24} \text{kg}$ , 赤道半径  $R = 6.378 \times 10^6 \text{m}$ , 自転周期 24 時間から, 赤道上の質量  $1 \text{kg}$  に働く万有引力・遠心力・重力加速度をそれぞれ求めよ. ここで地球内部の質量分布は球対称とする.

**2.2** 長さ  $l$  の質点振り子の周期  $T$  は  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  で与えられる. 同じ振り子があったとき北極と赤道ではどちらが周期が長い. またその違いはどのくらいか.

**2.3** 陸地で地球の中心からもっとも離れた位置にあるのはどこか. 資料を調べても良い. なぜそうなのか考察すること.

**2.4** ★ 万有引力の法則から地球の質量  $M$  と平均赤道半径  $R$  を用いてフリーエア補正量が以下のように表されることを示せ.

$$\Delta g_1 = \frac{2GMh}{R^3}$$

ここでは地球を球対称な密度分布を持つものと考えてよい. ヒント: 高度  $h$  における重力加速度  $g$  は  $g = GM/(R+h)^2$ .  $x$  が微量のとき  $(1+x)^n \approx 1+nx$  を用いる.

**2.5** ★★ 地形補正を無視した場合の陸上のブーゲー補正の公式は次のように書ける.

$$\Delta g_1 = \frac{2GMh}{R^3} - 2\pi G\rho_c h$$

右辺第二項が密度  $\rho_c$  で厚さ  $h$  の無限に広がっている板状の質量による下向き重力の大きさである. この項を導出せよ.

**2.6** 平均的な海洋域では上から順に, 海水, 堆積物, 海洋地殻, マントルが重なっている. 簡単のために堆積物の厚さと質量は無視し, 水深を  $4.0 \text{km}$ , 海洋地殻の厚さを  $7.0 \text{km}$ , 海水・海洋地殻・マントルの密度をそれぞれ  $1.0, 3.0, 3.3 \text{g/cm}^3$  とする. これに対して大陸域では, 上部地殻, 下部地殻, マントルが順に重なっている. 上部地殻の密度を  $2.7 \text{g/cm}^3$  とし, 下部地殻の厚さは  $10 \text{km}$  で, 密度は海洋地殻に等しいとする. アイソスタシーの関係が成り立っていると仮定して以下の問いに答えよ.

(1) 上部地殻の厚さが  $20 \text{km}$  とする. このときの大陸の標高を求めよ.

(2) 大陸の標高が海水準に等しく  $0 \text{km}$  の時, 上部地殻の厚さを求めよ.

- (3) 大陸の標高が、世界の最高峰の標高にほぼ等しい8.0kmの時、上部地殻の厚さを求めよ.