2. 重力と地球の形：もっと学習したい人へ

もうすこし詳しく，あるいは初学者なのでちゃんと追ってみたいという人のために．高校の微積分の力があれば追えることを目標に書いてみた．

1. 力学の基本

座標・速度・加速度

三次元空間に点 P があって時間 t とともにその座標が移動するものとする．これを位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せば

$$\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t)) \tag{1}$$

と書ける．

P の速度 $\boldsymbol{v}$(これも大きさと向きのあるベクトル量) は，座標の各成分を t で微分したものと定義する

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \tag{2}$$

P の加速度 $\boldsymbol{a}$(これもベクトル量) は，速度の各成分をさらにもう一度 t で微分したものと定義する

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) \tag{3}$$

$$= \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \frac{d^2z}{dt^2}\right). \tag{4}$$

練習問題 1 P の座標が $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, 0)$ と表されているとき，P の軌跡と，$t = 0, \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, \pi, 5\pi/3$ における P の位置を図示せよ．またその各位置における速度と加速度を，各位置を始点として図示せよ．(ヒント：等速円運動)

練習問題 2 P の座標が $(x, y, z) = (t, 0, -\frac{1}{2}t^2 + t)$ で表されているとき，P の軌跡と，$t = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ における P の位置を記せ．またその各位置における速度と加速度を，各位置を始点として図示せよ．(ヒント：放物運動)

単位

数学ではあまり単位のことは気にしないが，現実の世界では座標の各成分は距離の単位，時間は時間の単位で測る．たとえば速度の x 成分を求める微分は次のような座標と時間の割り算だから

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \tag{5}$$

速度の各成分は [距離/時間] という単位を持つ．加速度はもう一度時間で割り算するから [距離/時間 ^{2}] の単位になる．

標準的に使われている MKSA 単位系では距離と時間の単位はそれぞれ m(メートル) と s(秒) である[1]．これにしたがうと，速度と加速度の単位はそれぞれ m/s，m/s ^{2} となる．

運動方程式

点 P が質量 m を持つとする[2]．この質点に力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ が加わったとき，質点 P の加速度と次の関係が成り立つ

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{6}$$

これを運動方程式という．力とある時刻 $t = t_0$ での座標と速度が与えられていれば，その後の質点の座標の時間変化を予言することができる．

ポテンシャル

力が座標 (x, y, z) のみの関数とする．このとき関数 $U(x, y, z)$ を用いて，力 $\boldsymbol{F}$ を次のように表すことができる

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right). \tag{7}$$

ここで $\frac{\partial U}{\partial x}$ は U の x 微分 (このとき他の座標は定数とする) を表す．$\frac{\partial U}{\partial y}$，$\frac{\partial U}{\partial z}$ も同様にそれぞれ U の y 微分，z 微分である．

複数の変数を持つ関数を，そのうち一つの変数のみについて微分することを偏微分という．偏微分であることを明示するために，記号 d の変わりに ∂ を使う (∂ の発音は「パーシャル」「ラウンド」あるいは「デル」)．U を力のポテンシャルという．なぜこうすると便利なのかは後で説明．

以下に図示するように，力はポテンシャルの減る方向に働く．

[1] この単位系では質量に kg，電流に A(アンペア) を用いる

[2] 質量があるが大きさを無視できる理想的な物体を質点という

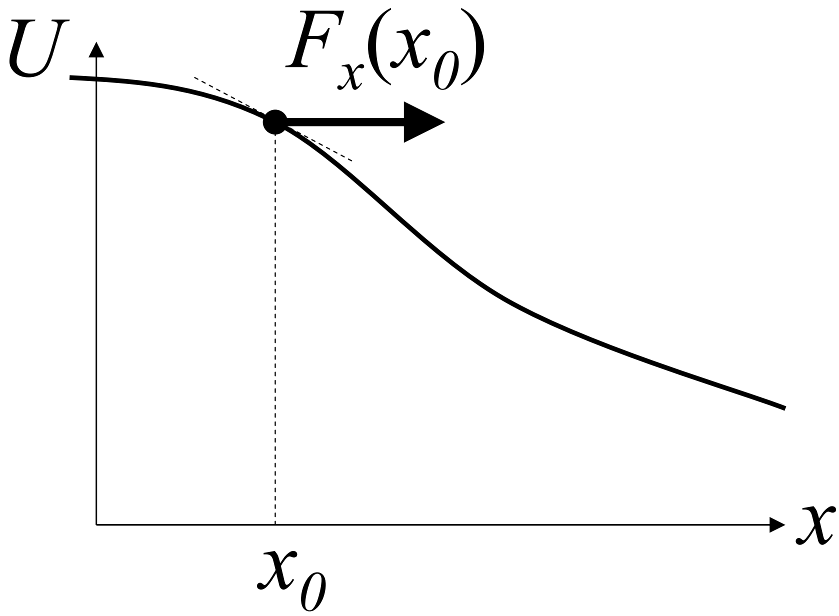

図 1: ポテンシャルが座標 x に対して図のように変化しているとする．力の x 成分はポテンシャル U の x 微分である．その向きは U の「傾き」のマイナスの方向である．そのためポテンシャルの値が減る方向へ運動するよう力が働くことが分かる．

練習問題 3 原点に固定した質点 M が，座標 (x, y, z) に存在する質量 m の質点に及ぼす万有引力のポテンシャルは $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として

$$U = -\frac{GMm}{r}, \tag{8}$$

で与えられる．ここで G は万有引力定数である．このとき m に働いている万有引力を式 (7) にしたがって計算し，その大きさが GM/r^2，向きが原点方向であることを確かめよ．

ポテンシャルの便利さ

ポテンシャルを考えるとエネルギー保存の法則がすっきり書ける．

簡単のために x 軸上の一次元の運動を考える．このとき運動方程式は

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x. \tag{9}$$

F_x がポテンシャルを使って表される場合，

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{dU}{dx}. \tag{10}$$

ここで次のような式変形をする．まず両辺に $v_x = \frac{dx}{dt}$ を掛けて

$$m v_x \frac{dv_x}{dt} = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{11}$$

これは次のように変形できる

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m v_x^2 + U\right] = 0. \tag{12}$$

ということは，$\frac{1}{2} m v_x^2 + U$ の時間微分はゼロ．つまり運動では変化しない保存量ということになる．

この関係は 3 次元の運動でも成立する．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + U\right] = 0. \tag{13}$$

$\frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$ は運動エネルギーと呼ばれる物理量である．一方ポテンシャル U は位置エネルギーとも呼ばれる．物理を習ったことがある人には，位置エネルギーのほうがピンとくるかもしれない．

運動エネルギーと位置エネルギーの和を力学的エネルギーとよぶ．式 (13) は力学的エネルギー保存の法則を表している．

練習問題 4 式 (12) を変形して式 (11) を導け

等ポテンシャル面と力の関係

一般に任意の関数 $f(x, y, z) =$ 一定を満たす座標の集合は面を作る．ポテンシャル U が一定の面を等ポテンシャル面という．

等ポテンシャル面上の各点で働く力は，その等ポテンシャル面と直交する．その証明は以下のとおり．

c を定数として $U(x, y, z) = c$ を満たす等ポテンシャル面を考える．この面上の一点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ を考える．そして P の近傍の点 P’$(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ がやはりこの面上にあるとする．つまり

$$U(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = U(x_0, y_0, z_0) = c.$$

このとき点 P において次のような関係が成り立つ

$$\frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z = 0. \tag{14}$$

これは P における力 $\boldsymbol{F} = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}), -\frac{\partial U}{\partial z})$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ の内積がゼロ，すなわち力と等ポテンシャル面が直交することを示す．

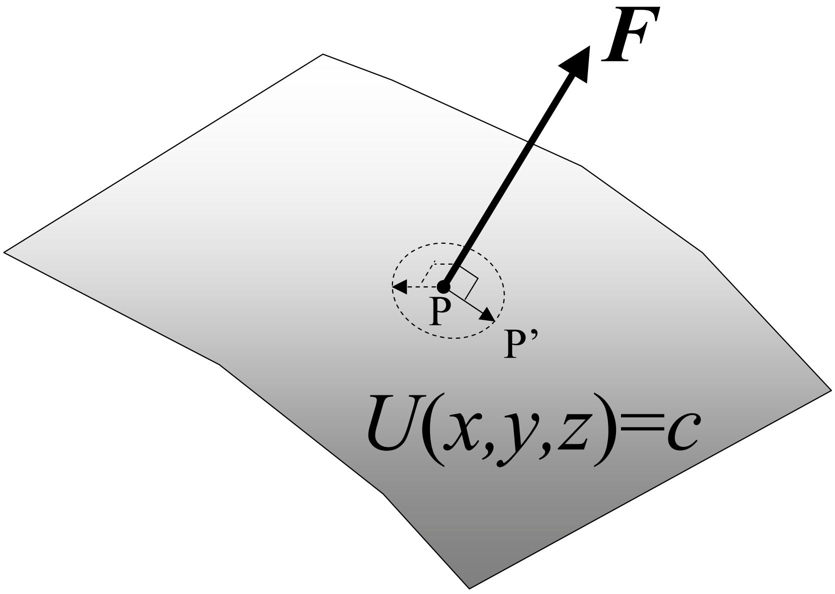

図 2: 各点で等ポテンシャル面と力の向きは直交する．これは力の向きと，面上の微小なベクトルが直交していることから確かめられる．

上式の証明は次のようにやる．まず

$$U(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0$$

である．左辺の 2 項の間に和を取ればゼロになる項を次のように挿入する．

$$\begin{aligned} & U(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0+\delta y, z_0+\delta z) && (15) \\ & +U(x_0, y_0+\delta y, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0, z_0+\delta z) && (16) \\ & +U(x_0, y_0, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0 && (17) \end{aligned}$$

さらに 2 項ずつ，分母分子にそれぞれ $\frac{\delta x}{\delta x}, \frac{\delta y}{\delta y}, \frac{\delta z}{\delta z}$ をかける．

$$\begin{aligned} & \frac{U(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0+\delta y, z_0+\delta z)}{\delta x}\delta x && (18) \\ & +\frac{U(x_0, y_0+\delta y, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0, z_0+\delta z)}{\delta y}\delta y && (19) \\ & +\frac{U(x_0, y_0, z_0+\delta z) - U(x_0, y_0, z_0)}{\delta z}\delta z = 0 && (20) \end{aligned}$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ が十分小さい場合は，3 箇所の割り算はそれぞれ点 P における U の x, y, z 微分になっているので式 (14) に一致する．これで証明終わり．

重ね合わせの原理

複数の質点による万有引力は，各質点からの万有引力のベクトル和に等しい．またそのポテンシャルは，各質点の万有引力を表すポテンシャルの (代数) 和で表さ

れる．

球体の重力

有限な大きさをもつ総質量 M の球形の物体があり，その内部の密度分布が球の中心の周りで対称 (球対称) とする．このときこの物体が外部にある別の質点に及ぼす重力や重力ポテンシャルは，球の中心に質量 M の質点を置いた場合に得られるものと等しい

証明はここでは省略.

地球の重力ポテンシャル

万有引力ポテンシャル

地球が質量 M，半径 R の密度一定の球だとする．地球の中心を座標の原点とし，自転軸を z 軸とする．地球表面あるいは外部の座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に存在する単位質量 (質量=1) に働く万有引力によるポテンシャル V_g は

$$V_g(x, y, z) = -\frac{GM}{r}, \tag{21}$$

ここで r は地球中心からの距離で，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と書ける．

この等ポテンシャル面は $r =$ 一定．すなわち球面となる．

遠心力ポテンシャル

さらに自転の効果を考える．地球の重力は万有引力と，自転による遠心力の合力である．単位時間当たりの回転角 (ラジアンで測る) を角速度といい記号 ω で表す．自転周期を T とすれば

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{22}$$

の関係がある．

地球とともに自転する物体 (質量 m, 座標を (x, y, z) とする) に働く遠心力の大きさ f_c は

$$f_c = ml\omega^2, \tag{23}$$

ここで l は自転軸からの距離で $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ を満たす．

この遠心力もポテンシャルを用いて表すことができる．単位質量あたりの遠心力ポテンシャル V_c は

$$V_c = -\frac{1}{2}\omega^2 l^2 = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{24}$$

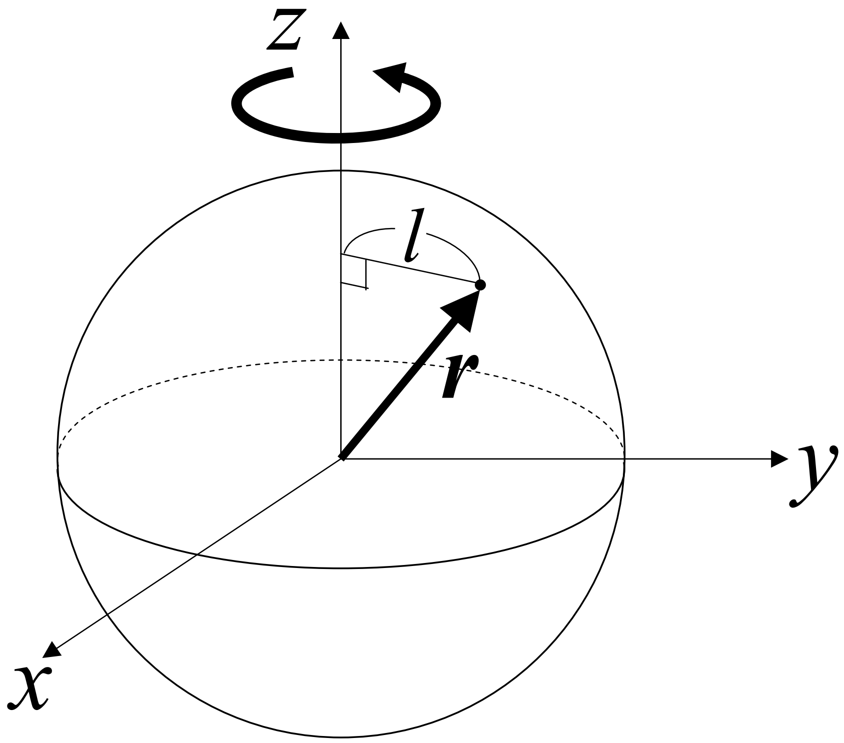

図 3: ここで考える座標系

である．

練習問題 5 式 (24) を力とポテンシャルの関係式 (7) に代入して単位質量に働く遠心力の大きさが $l\omega^2$ になることと, その向きが回転軸から遠ざかる方向になっていることを確かめよ．

練習問題 6 式 (24) の等ポテンシャル面は自転軸を対称軸とする円筒面であることを示せ．

重力ポテンシャル

万有引力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルは重ね合わせることができる．この重ね合わせたポテンシャルをここで重力ポテンシャルとよぶ．

ここで考えた球で近似した地球の場合，北極 $(0, 0, R)$ における重力ポテンシャルは，万有引力ポテンシャルのみで

$$V_{\text{北極}} = -\frac{GM}{R}$$

一方，赤道上の重力ポテンシャルは遠心力ポテンシャルの寄与もあり

$$V_{\text{赤道}} = -\frac{GM}{R} - \frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

となって，赤道上の方がポテンシャルが小さくなる．力はポテンシャルの低い方向に働くことを思い出そう．もしこの仮想的な地球の表面が滑らかだとしたらその上にそっと物体をおくと，もっともポテンシャルの小さな赤道に向かって滑り出すことになる．

等ポテンシャルの海水面の関係

海水は自由に動き回ることができる．海面と重力の等ポテンシャル面が一致していないとする．このとき等ポテンシャル面から突き出た水塊には，ポテンシャルのより低い位置に運動するよう力が働く．そのために水の分布が再配置されて，最終的には海水面上どこでもポテンシャルが等しい状態に落ち着く[3]．

海の深さが緯度によらない理由

もし固体地球が球だとすると，赤道では遠心力で海水が集まり，極域よりも海が深くなるはずである．しかし実際の地球ではそうなっていない．これは固体地球も遠心力によって変形して，赤道が膨らんだ形になっていることを示している．これは地球を作る “固体” 物質は非常に長い時間をかけると “流れる” 性質があることを示す，一つの状況証拠である．

[3]厳密には重力以外の力が働いておらず，また適当に摩擦があって，やがて完全に静止した状態になることを想定している