地球惑星状態物理学II

林 祥介

2005 年 06 月 20 日

7　断熱温度勾配

7.1　対流と大気の鉛直構造

対流 重い流体が軽い流体の上に乗っている状態は不安定で運動が起こって上下逆転し, 不安定状態は解消される. 一般に, このような不安定状態のことを対流不安定状態とよび, 対流不安定状態に起因する運動を (鉛直) 対流という.

密度成層 一般に, 鉛直方向に密度が異る静的な状態, あるいは, 時間平均的に見て鉛直方向に密度が異っている状態を, 密度成層した状態, という. そのような流体を密度成層した流体という.

上層の方が下層より密度が大きく対流不安定にある状態を不安定成層 (状態), 下層の方が上層より密度が大きく対流が起こらない状態を安定成層 (状態) という.

大気 (気体) の対流安定性 理想気体の場合, 状態方程式を用いると, 上層の方が重く下層の方が軽い, という状態は, 上層の方が温度が低く下層の方が温度が高い, という状態に対応することになる.

対流不安定な大気 放射平衡大気はしばしば対流不安定状態にある:

- 地面があり, 太陽放射が地面で吸収され, 地面温度と大気最下層温度とにギャップが生じる場合
- 放射平衡温度の温度勾配が対流不安定状態にある場合, すなわち, 上層の方が下層に比べて温度が低く密度が大きい場合.

圧力変化の考慮 地球規模の対象に関しては, 上層の方が下層より密度が大きい (温度が低い) から直ちに対流不安定とみなせるわけではないことに注意しなければならない. 上層と下層の気圧差を考慮する必要がある.

7.2 パーセル法・成層安定度

空気塊法, または, パーセル法 密度性層流体の対流安定性の考察をおこなうための簡単モデル.

設定と解釈 静水圧平衡にある空気中の高度 z_0 に, 周囲の空気とちょうど同じ密度 ($\rho = \overline{\rho} = \rho_0$) の「風船」をおく ($z = z_0$ での値を “$_{-}$” で, 周囲の空気の量を “$\overline{\bullet}$” で表現する). 風船を微小変位 δz させたとき, 平衡位置 $z = z_0$ からさらに離れようとする力が働く場合には大気は不安定, 平衡位置 $z = z_0$ に戻ろうとする力がはたらく場合には大気は安定, である.

仮定 簡単のためにつぎのような仮定を行う:

1. 風船は十分小さい (周囲の空気の熱力学量は風船のスケールでは一様とみなせる).
2. 風船を覆う膜の質量は無視できる.
3. 風船の覆う膜を伸び縮みさせるために必要な力は無視できる.
4. 風船内部は均一である.
5. 風船内部の圧力 p は常に外界の圧力 $\overline{p}$ と等しい (静的 1).
6. 風船の運動に伴う周囲の空気の運動は無視できる (静的 2).
7. 風船は周囲の空気とは熱的なやりとりをしない (断熱).

風船の運動方程式 周囲との圧力差が無いので, 風船に働く力は浮力だけである. 風船の運動方程式は次のように書ける.

$$\rho\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -(\rho - \overline{\rho})g$$

微小変位を考えているので線形近似すると

$$\begin{aligned}
\rho(z) &= \frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z \\
&= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial z}\delta z \\
&= -\overline{\rho}g\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \delta z \\
\overline{\rho}(z) &= \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\delta z
\end{aligned}$$

断熱かつ静的な変化なので, 空気塊の内部の密度変化はエントロピー一定で圧力を変化させた時の変化である. 周囲の空気は静水圧平衡にあることを使った.

よって

$$\begin{aligned}\overline{\rho}\frac{d^2\delta z}{dt^2} &= \frac{g}{\overline{\rho}}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_s - \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\right) \\ &= \left(\overline{\rho}g\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s + \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\right)g\delta z\end{aligned}$$

あるいは

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -N^2\delta z$$

ここで

$$N^2 \equiv \frac{g}{\overline{\rho}}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_s - \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\right)$$

を静的安定度, N を浮力振動数という.

熱力学を使って変形を続けると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s &= \frac{\partial(\rho,s)}{\partial(p,s)} \\ &= \frac{\partial(\rho,s)}{\partial(p,T)}\frac{\partial(p,T)}{\partial(p,s)} \\ &= \left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\right)\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho^2}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right)^2\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho^2}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right)^2\frac{T}{c_p}\end{aligned}$$

ちなみに理想気体 $\rho = p/RT$ の場合は

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\gamma RT}$$

ただし, $\gamma = c_p/c_v$, $c_p - c_v = R$ である.

7.3 断熱温度減率

温度減率 大気の鉛直温度勾配のことを温度減率という.

断熱温度減率 静的に断熱変化する空気塊法で与えられる風船内部の温度変化とちょうど同じになる温度勾配を断熱温度減率という.

乾燥温度減率 空気塊中で相変化が起こらないことを特に強調して乾燥という語を関することがある.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)_s &= \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial p}\right)_s \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\
&= -\overline{\rho} g \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial p}\right)_s \\
&= -\overline{\rho} g \frac{\partial (T, s)}{\partial (p, s)} \\
&= -\overline{\rho} g \frac{\partial (T, s)}{\partial (p, T)} \frac{\partial (p, T)}{\partial (p, s)} \\
&= \overline{\rho} g \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\
&= -\overline{\rho} g \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\
&= \overline{\rho} g \frac{1}{\overline{\rho}^2} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right) \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\
&= \frac{g}{\overline{\rho}} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right) \frac{T}{c_p}
\end{aligned}
$$

理想気体なら

$$
\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)_s = -\frac{g}{c_p}
$$

いろいろなやり方が有る. もともと断熱なので

$$
\begin{aligned}
0 &= T ds \\
&= T \left(\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT\right) \\
&= -T \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p dp + c_p dT
\end{aligned}
$$

静水圧を使うと

$$
\begin{aligned}
&= -\rho^{-1}T\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p gdz + c_p dT \\
&= gdz + c_p dT
\end{aligned}
$$

あるいは,

$$
\begin{aligned}
0 &= Tds \\
&= du + pd\rho^{-1} \\
&= c_v dT + pd\rho^{-1} \\
&= (c_v + R)dT - \rho^{-1}dp \\
&= c_p dT + gdz
\end{aligned}
$$

乾燥静的エネルギー・温位 気象学では

$$c_p T + gz$$

を乾燥静的エネルギーと言う.

また

$$\theta \equiv T \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R/c_p}$$

を温位 (potential temperature) という.

惑星大気の例 諸惑星 (木星, 金星, ...) の温度構造と断熱温度減率とを比較せよ. 地球と火星はずれが大きい.

湿潤断熱温度減率 空気塊中で相変化が起こる場合を強調して湿潤断熱減率ということがある.

湿潤断熱温度減率の仮定 簡単のためにつぎのような仮定を行う:

1. これまで通り静的かつ断熱的変化にあるとする.
2. 風船内は熱平衡状態にあり, 相平衡状態にあるとする.

このような過程に対して, 与えられた圧力に対する空気塊の温度の変化は次のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
0 &= Tds \\
0 &= \delta\mu
\end{aligned}
$$

ただし, ここでの s は気相と凝結相の全てをたしあわせた, 空気塊全体の質量当たりのエントロピー, $\delta\mu$ は気相の化学ポテンシャルと凝結相の化学ポテンシャルの差である. 凝結性成分の飽和蒸気圧曲線 $p = p^*(T)$ が分かっており, 非凝結性成分が凝結相に融け込まない, 一方, 凝結性成分と非凝結性成分の混合気相は理想気体として扱える場合には単純に $\delta\mu = 0$ の変わりにこれを用いると簡便である.

このような場合のエントロピーの変化は

$$
\begin{aligned}
0 &= Tds \\
&= T\left(\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,q} dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,q} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)_{p,T} dq\right) \\
&= gdz + c_p dT + ldq
\end{aligned}
$$

となる. q は凝結性成分の質量混合比, l は潜熱である. c_p は凝結相も加えた気塊全体の質量当たりの比熱である. (水蒸気が $-dq$ 凝結した分だけ熱 $-ldq$ が出る).

理想気体であるとすると $q = p_v/p$. ただし p_v は凝結性成分の分圧である. いま, ちょうど飽和していたとすると $q = q^* = p^*(T)/p$. この時

$$
\begin{aligned}
gdz + c_p dT + Ldq^* &= gdz + c_p dT + \frac{L}{p}dp^* - \frac{Lq^*}{p}dp \\
&= gdz + c_p dT + \frac{L}{p}\frac{dp^*}{dT}dT + \rho g\frac{Lq^*}{p}dz \\
&= \left(1 + \frac{Lq^*}{RT}\right)gdz + \left(1 + \frac{L}{pc_p}\frac{dp^*}{dT}\right)c_p dT
\end{aligned}
$$

クラウジウス・クラペイロンに従い, 凝結相の体積を無視すると

$$
L(T) = \frac{T}{\rho_v}\frac{dp^*}{dT}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
gdz + c_p dT + Ldq^* &= \left(1 + \frac{Lq^*}{RT}\right)gdz + \left(1 + \frac{L^2\rho_v}{pc_p T}\right)c_p dT \\
&= \left(1 + \frac{Lq^*}{RT}\right)gdz + \left(1 + \varepsilon\frac{L^2 q^*}{RT^2 c_p}\right)c_p dT
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = -\frac{g}{c_p}\frac{1 + \frac{Lq^*}{RT}}{1 + \varepsilon\frac{L^2 q^*}{RT^2 c_p}}
$$

ただし ε は凝結性成分と乾燥成分の分子量比 $\varepsilon \equiv \mu_v/\mu$.

凝結性物質量が少ない時には, 気相だけのエントロピーの変化を考えることにより, 次のような簡略な式がえられる.

$$
Tds_g = -ldq
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
0 &= Tds_g + ldq \\
&= T\left(\left(\frac{\partial s_g}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial s_g}{\partial T}\right)_p dT\right) + ldq \\
&= gdz + c_{pg}dT + ldq
\end{aligned}
$$

ただし, q は水蒸気の混合比, L は質量当たりの潜熱である.

なぜ平均温度構造は断熱温度減率で良いか