地球惑星状態物理学 II 中間試験解答例および講評　　2003 年 6 月 2 日

1.

(1) 大気は地表面に $M_a g$ の荷重を及ぼす．これを地表の総面積で割ると地表面での気圧 P_s が求まる．

$$P_s = \frac{M_a g}{4\pi r^2}.$$

これを M_a について解いて

$$M_a = \frac{4\pi r^2 P_s}{g}$$

を得る．

(2) (1) で導いた式に数値を代入する．1hPa=100Pa に注意して 5.28×10^{18} kg を得る．

(3) 火星の半径を r_M，重力加速度を g_M で表すと求める表面気圧 $P_{s,M}$ は

$$P_{s,M} = \frac{M_a g_M}{4\pi r_M^2}.$$

であらわされる．$r_M = 0.53r$，$g_M = 0.38g$ を代入して整理すると

$$P_{s,M} = \frac{0.38}{0.53^2}\frac{M_a g}{4\pi r^2} = \frac{0.38}{0.53^2} P_s$$

となる．数値を計算すると 1370 hPa を得る．

2.

(1) 温度 T をもつ黒体放射の振動数 ν から $\nu + d\nu$ の範囲における単位体積あたりのエネルギー密度を表したものである．

c: 真空中の光の速さ 単位は $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

h: プランク定数 単位は $\mathrm{J \cdot s}$

k: ボルツマン定数 単位は $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

(2) プランク関数 $B_\nu(T)$ は黒体放射の放射強度を表す．いまある特定の立体角要素 $d\Omega$ の方向に進む振動数 ν の黒体放射のエネルギー密度を u_ν とする．進行方向に長さ cdt，断面積 dA を持つ円筒を考えるとこの円筒内部の放射は時間 dt 経過すると全て円筒をすり抜けるから放射強度 $B_\nu(T)$ とは次の関係が成立する

$$u_\nu dAcdt = B_\nu(T) dAdt$$

一方，u_ν を全立体角について積分すれば $U(\nu, T)$ が得られるから $4\pi u_\nu = U(\nu, T)$. これらから $B_\nu(T) = \frac{U(\nu,T)c}{4\pi}$ を得る．

(3) 黒体表面から放射される単位時間単位面積あたりのエネルギーフラックス F を温度の関数として表現したものがステファン・ボルツマンの法則である．したがって黒体放射の放射強度を表すプランク関数を全波長と，立体角で積分することでこの法則を導くことができる．ただし立体角積分は上半球で行う．

$$F = \int_{\text{上半球}} d\Omega \int_0^\infty d\nu B_\nu(T) \cos\theta$$

ここで θ は表面の法線方向から計った天頂角．これと方位角 ϕ を用いて立体角要素は

$$d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$$

と表される．積分範囲は $0 \le \phi \le 2\pi$，$0 \le \theta \le \pi/2$．立体角に関する積分は簡単に実行でき $F = \pi \int d\nu B_\nu(T)$. ν に関する積分は $\frac{h\nu}{kT} = x$ とおいて $\pi \int d\nu B_\nu(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ となるので

$$F = \sigma T^4 \text{ただし} \sigma = \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15 c^2 h^3}.$$

(4) 平衡温度 T_e は単位面積あたりに受け取る太陽放射フラックス F，アルベド A を用いて

$$T_e = \left(\frac{F(1-A)}{4\sigma} \right)^{1/4}$$

と表される．太陽の絶対光度が変わらないならば仮想的な軌道での太陽放射フラックスは実際の軌道におけるものの $1/0.8^2$ 倍となる．その他の条件が変わらなければ上式から平衡温度は $1/0.8^{1/2}$ 倍となる．実際に数値を求めると 286K を得る．

3.

(1) 静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

から状態方程式を用いて ρ を消去すると

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} P$$

となる．ここで R は気体定数である．この式に $T = T_s - \Gamma z$ を代入して変数分離を行うと

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_s - \Gamma z}$$

$z = 0$ で $P = P_s$ を境界条件に積分を実行し整理すると

$$P = P_s \left(\frac{T_s - \Gamma z}{T_s} \right)^{\frac{\mu g}{R\Gamma}}$$

を得る．

(2)1 成分系において 2 相が共存し平衡状態にあるときの温度と圧力の関係を表す．Δh と Δv はそれぞれ相変化の際の 1 モルあたりのエンタルピー変化と体積変化である．

(3) クラウジウス・クラペイロンの式に $\Delta v = \frac{RT}{P}$ を代入して

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta h P}{RT^2}$$

これを $T = T_0$ において $P = P_0$ を条件に積分して

$$P = P_0 \exp\left\{\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}$$

を得る．

(4) (1) の解に数値を代入すると山頂の気圧は 647 hPa と求まる．1 気圧 (1013 hPa) 下では水は摂氏 100 度 (373 K) で沸騰する．そこで (3) で求めた式を用いて 647 hPa において水と水蒸気が平衡に達する温度を求める．

$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{R}{\Delta h}\log\frac{P}{P_0}\right)^{-1}$$

$T_0 = 373, P_0 = 1013, P = 647, \Delta h = 2260 \times 18$ を代入すると $T = 361K$ すなわち摂氏 88 度と求まる．

試験結果

総解答数 37 名

問題番号		平均得点 (%)	主な誤答
問題 1.	(1)	75.4	勘違い
	(2)	33.8	単位換算ミス
	(3)	78.3	勘違い
問題 2.	(1)	54.8	用語・概念の混乱
	(2)	17.8	無解答．天下りに式提示
	(3)	12.4	無解答．立体角積分の誤り
	(4)	29.2	勘違い．惑星半径と軌道半径の取り違え．
問題 3.	(1)	49.2	積分計算のミス
	(2)	27.3	無解答．概念の未消化
	(3)	54.1	積分計算ミス
	(4)	16.2	数値代入の混乱
平均		40.8	

レポート課題

放射平衡にある平行平板灰色大気について以下の設問に答えなさい

(1) 有効温度が 256 K の場合，地表面温度が水の融点を上回るために必要な大気の全光学的深さの最小値を求めなさい．

(2) 大気圧を地球大気のそれに等しいとした場合に，(1) で求めた全光学的厚さを持つために必要な吸収係数の値を求めなさい．ただし重力加速度は地球の値に等しいものとする．

(3) (1),(2) で求めた大気について気温の高度分布を計算し，図に表しなさい．