4. 静水圧平衡とスケールハイト

4–1 基礎事項と方程式

圧力 単位面積あたりに働く力．単位 Pa=N/m^2=J/m^3．単位体積当たりのエネルギーという解釈も可．

鉛直方向 重力加速度と平行な方向．重力加速度と同じ向きを鉛直下向き，反対向きを鉛直上向きという．

器に張った流体：静止状態では表面は鉛直方向と直交．水平方向．

密度一定の静止流体層 密度 ρ，深さ d，重力加速度 g．底の圧力 P は

$$P = \rho g d \tag{4.1}$$

流体層の底に限らず，任意の深さでの圧力がこれで表現できる．静水圧平衡の積分表現.

流体表面が鉛直方向に垂直でない場合，水平方向に圧力の強弱．流れが生じる．惑星の流体圏での力の釣合いは静水圧平衡がもっとも大きく寄与．流れを作る力はこれに比べて小さい.

微分形 密度・重力：一般に変数

座標 z：鉛直上向き，

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{4.2}$$

これを**静水圧平衡の式**と言う．ガス惑星や星の内部まで含めて表したいときには座標 z を中心からの距離 r に置換えて表現.

4–2 等温平行平板大気

簡単だが大気の構造を解析するために有効なモデル

- 状態方程式が理想気体のそれに従う (常温付近では数十気圧以下で良い近似)
- 等温等組成
- 惑星半径に比べて厚みが薄い (平行平板の仮定)

- 自己重力無視 (大気中の重力加速度一様)

状態方程式

$$PV = NRT \tag{4.3}$$

ここで N はモル数.

使いやすく変形．1 mol あたりの気体の質量を μ とすると $N = V\rho/\mu$ であるから,

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \tag{4.4}$$

静水圧平衡解 状態方程式 (4.4) を使い静水圧平衡の式 (4.2) から密度を消去.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P \tag{4.5}$$

重力一定としてこれを解く (境界条件 $P = P_0$ at $z = z_0$)

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-\mu g(z - z_0)}{RT}\right] \tag{4.6}$$

ここで

$$H = \frac{RT}{\mu g} \tag{4.7}$$

とすると平衡解は

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-(z - z_0)}{H}\right] \tag{4.8}$$

スケールハイト (4.7) 式の H をスケールハイトという. 圧力が $1/e$ に減少する高度を表す．大気の厚みを表す尺度.

(4.7) 式を変形すると

$$mgH = kT \tag{4.8}$$

ここで m は分子 1 個の質量．$R = N_A k$, $\mu = N_A m$ (N_A はアボガドロ数) に注意.

スケールハイトの分子運動論的解釈：(4.8) から分子の熱的な並進運動のエネルギーと位置エネルギーとがほぼ等しくなる高さと解釈できる.

また温度・分子量・重力加速度が一定でない場合

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -\frac{1}{H(z)} \tag{4.9}$$

$$H(z) = \frac{RT(z)}{\mu(z)g(z)} \tag{4.10}$$

が成立．各高度での H の値を局所スケールハイトという.

4–3 外気圏

(4.6) 式では $z \to \infty$ でないかぎり $P \neq 0$．しかし P の極めて小さな希薄状態は流体とはみなせない．

気体が流体とみなせる条件 平均自由行程 << 系の特徴的な長さの尺度

平均自由行程：気体分子が他の分子に衝突するまで自由に並進する平均距離 l で表すと近似的に

$$n\sigma l = 1 \tag{4.11}$$

から計算．ここで n は気体数密度，σ は分子の衝突断面積．

$$l = H \tag{4.12}$$

となる高度レベルを惑星の外気圏界面と呼ぶ．これより外側を外気圏 (または外圏) と呼ぶ．より内側がいわゆる大気圏に相当．

4–4 大気の安定性

熱的散逸 大気分子の熱運動

- 気塊中の分子の大部分が脱出可能な熱運動エネルギーを持つ：流体力学的散逸

$$\frac{kTr}{2GMm} = \frac{v_T^2}{v_{esc}^2} > 1$$

$$v_T = \left(\frac{2kT}{m}\right)^2$$

ここで m は分子 1 個の質量．

- 大部分は脱出可能な熱運動エネルギーを持たない：ジーンズエスケープ

ジーンズエスケープ 外気圏界面に存在する気体分子のうち，脱出速度を越える並進速度を持つ成分が散逸．分子の速度分布はマックスウェルの速度分布則．このとき散逸フラックス (外気圏界面単位表面積，単位時間あたりに宇宙空間に失われる分子数)ϕ_{esc} は

$$\phi_{esc} = \int_{|\boldsymbol{v}| \geq v_{esc}, v_z \geq 0} v_z f(\boldsymbol{v}) d^3\boldsymbol{v} \tag{4.13}$$

から計算．f はマックスウェルの分布関数

$$f(\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right] \tag{4.14}$$

計算を実行すると

$$\phi_{esc} = n\frac{v_T}{2\pi^{1/2}}(1+\lambda)e^{-\lambda} \tag{4.15}$$

ただし

$$\lambda = \frac{mv_{esc}^2}{2kT} = \frac{v_{esc}^2}{v_T^2}$$

λを散逸パラメータと呼ぶ.

問題

1. 気温が a) 高度によらずに一定の場合と， b) 高度 1 km あたり 10 K 減少する場合のそれぞれについて，高度 10km における圧力を求めよ．ここで地表面での圧力は 10^5 Pa，地表面気温は 300 K，大気の平均分子量は 30，重力加速度は 10 m s^{-2} とする．

2. 天体全体が流体とみなせる場合について考えよう．簡単のために密度一様，自転なしとする．密度を ρ，天体半径を R とする．(1) 惑星中心からの距離 $r(< R)$ の位置における重力加速度を ρ，r を用いて表しなさい．必要な物理定数等は適宜導入して構わない．(2) 静水圧平衡の式を書き下し，それを解いて天体内部の圧力を r の関数として求めなさい．ただし表面 ($r = R$) における圧力は 0 とする．(3) 地球の中心の圧力の値を推算しなさい.

3. (1) (4.15) 式を導け (ヒント：円筒座標を導入．積分範囲に注意)．(2) 現在の地球大気の外気圏界面は高度 500km にあり，温度は 1×10^3 K，主成分は O 原子である．O 原子の半径を 0.5 Å として外気圏界面における数密度を求めよ．(3) 地球大気からの酸素原子の散逸フラックスを求めよ．(4) 以上の結果から地球大気は地球年齢に渡って存在できるか議論しなさい.