（令和５年８月９日実施）

令和 6 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	3 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

問 1　図 1 のように、質量 m の粒子が xy 面上 $y = b\ (b > 0)$ の直線に沿って x が負の無限遠より入射し、O を原点とした中心力によって散乱される。中心力は、ポテンシャルが $V(r) = a/r\ (a > 0)$ で与えられる斥力であり、無限遠での速度の大きさは v_0 であるとして以下の設問に答えよ。

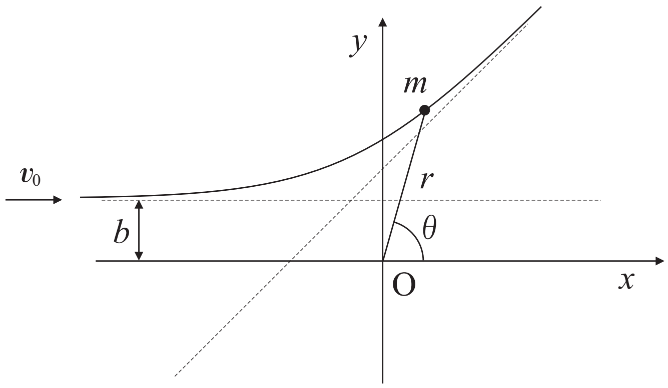

図 1

1-1. 粒子の位置座標と速度を、$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ としたとき、粒子の角運動量 $m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は中心力の下では保存されることを示せ。

1-2. 入射粒子のエネルギー E と角運動量の大きさ l を、m, v_0, b を用いて表せ。

1-3. 二次元極座標 r, θ を用いて質点の角運動量の大きさを表せ。

1-4. 質点の全エネルギーを二次元極座標で表すと、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) \tag{1}$$

のように、動径方向の運動エネルギーと、有効ポテンシャル $U(r)$ の和として書ける。ここで、$\dot{r}$ は r の時間微分を表す。具体的な $U(r)$ の表式を m, r, l, a を用いて示せ。

1-5. 粒子は原点に最も接近したときに、その速度の大きさが最小となる。この最小の速度の大きさ $v_{\min}$ を、m, a, b, v_0 を用いて表せ。

問 2　中心軸が固定された質量 M および半径 R の滑車を通して、質量 m の球が、質量を無視できるバネ定数 K および k の 2 つのバネと、やはり質量を無視できるひもにより図 2 のように吊り下げられている。球の位置座標 x を鉛直下方向に、滑車の回転角 θ を時計まわりに取り、それらの原点は 2 つのバネが自然長にあるときとする。重力加速度の大きさを g とし、ひもと滑車はすべることなく、また、ひもはたるむことなく動くものとして、以下の設問に答えよ。

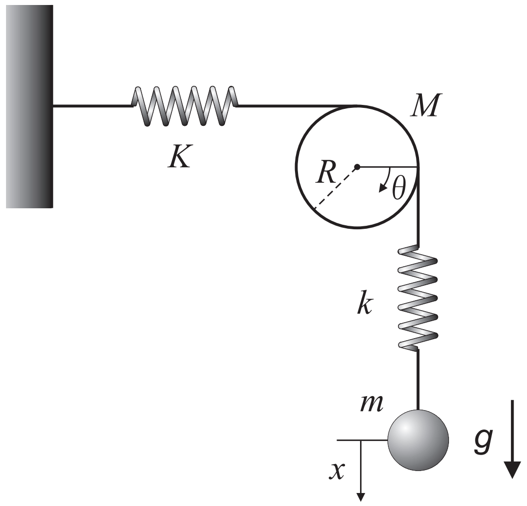

図 2

2-1. 滑車が一様な密度の円板であるとき、その慣性モーメントは $MR^2/2$ で与えられることを示せ。

2-2. この系のポテンシャルエネルギーを、x と θ の関数として表せ。

2-3. この系がつり合いの状態で静止しているときの、球の座標 x_0 と滑車の回転角 θ_0 を求めよ。

2-4. この系のオイラー・ラグランジュ方程式を導け。

2-5. $M = 4m$、$K = k$ として、この系が微小振動する際の固有振動数を m と k を用いて表せ。

問題 II

問 1 真空中で半径 a の導体球 A に図 1 のように電荷 $+Q$ を与えた。真空の誘電率を ε_0 とする。以下の問に答えよ。

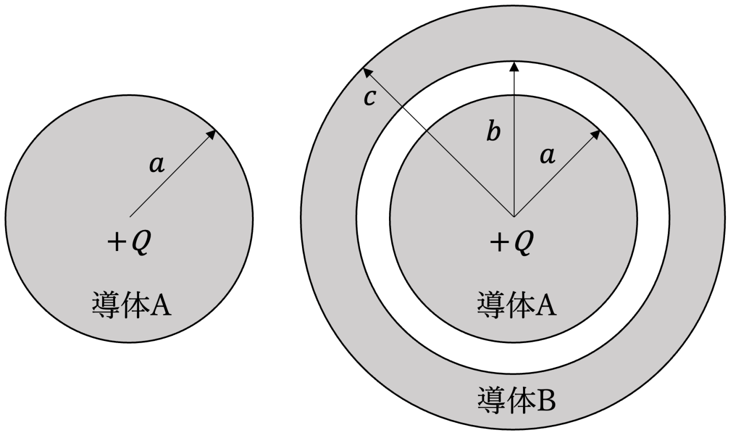

図1　　　　　図2

1-1. 球の中心から距離 r の位置における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

次に図 2 のように真空中で上記の導体 A の外側に同心で、内径 b、外径 c の導体球殻 B を置く。ただし、図は中心を含む断面を示す。また導体 B には電荷が与えられていない。

1-2. 球の中心から距離 r の位置における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

1-3. 球の中心から距離 r の位置における電位 $\phi(r)$ を求めよ。ただし、無限遠で $\phi = 0$ とする。

1-4. 導体 A と導体 B を 2 つの電極としたコンデンサーの静電容量 C_0 を求めよ。

自己インダクタンスが L で抵抗値が R のコイル X を使って、導体 A と導体 B を時刻 $t = 0$ で接続すると電流が流れた。以下の問題では、必要があれば上で求めた静電容量を C_0 として用いてよい。

1-5. 導体 A から導体 B へ流れる電流 $I(t)$ が満たす方程式を求めよ。ただし、導体 A から導体 B へ流れる電流の向きを正とする。

1-6. 接続後、平衡状態に至るまでにコイル X で発生したジュール熱 Q_R を求めよ。

1-7. 上の問で平衡状態になった後、コイル X を導体 B から外した。このときの導体 A の電

荷量を求めよ。次に導体 A をコイル X を使って接地し平衡状態になるまで十分に時間をおいた。接地後の導体 A の電荷量を求めよ。

問 2 マクスウェル方程式は以下の 4 つの方程式、

$$①\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\quad ②\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad ③\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\quad ④\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

と書ける。ただし、ρ, $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ電荷、電流密度を示す。また真空中では真空の誘電率と透磁率を使って、電束密度と電場の関係は $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ であり、また磁束密度と磁場の関係は、$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ である。以下の問に答えよ。必要があれば下記の関係式を用いてよい。

$$\nabla\times(\nabla f)=0,\quad \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

2-1. ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ やスカラーポテンシャル ϕ を使って下記のように $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ をおくと、マクスウェル方程式の②と④が自動的に満たされることをそれぞれ示せ。

i) $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

ii) $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$

2-2. 下記のローレンツゲージを用いて、真空中で電荷も電流もない自由な電磁場においてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が従う波動方程式を求めよ。ただし、自由な電磁場でスカラーポテンシャルは、$\phi=0$ で一定とする。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

2-3. **2-2** の自由な電磁場において、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が横波であることを示せ。