（平成 27 年 8 月 17 日実施）

平成 28 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	3 枚
解答紙	問題 I, II	6 枚（各問題 3 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図 1 のように、質量を無視できる棒の両端に、それぞれ大きさを無視できる球 A 及び球 B がつながっている。この棒は、図 1 のように、原点 O に固定されており、x 軸を回転軸として yz 平面上で回転できる。球 A 及び球 B の質量は m_{A} 及び m_{B}、位置ベクトルは $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ 及び $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ とする。回転軸の摩擦や空気抵抗は無視できるとし、重力加速度は z 軸の負方向に大きさ g とする。また、図 1 のように角度 θ を定義する。下記の問いに答えよ。

1-1. 重心 $\vec{r}_{\mathrm{cm}}$ を $\vec{r}_{\mathrm{A}}, \vec{r}_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ。

1-2. 重力による原点 O のまわりのトルク（力のモーメント）の大きさを θ を用いて表せ。

1-3. θ の変化が十分小さく、$\sin\theta \simeq \theta$ が成り立つとき、θ に関する運動方程式を求めよ。

1-4. 時刻 $t = 0$ のとき、$\theta = 0$ で角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ だった。このとき、時刻 t における球 A の速さ v_{A} を ω_0 を用いて表せ。

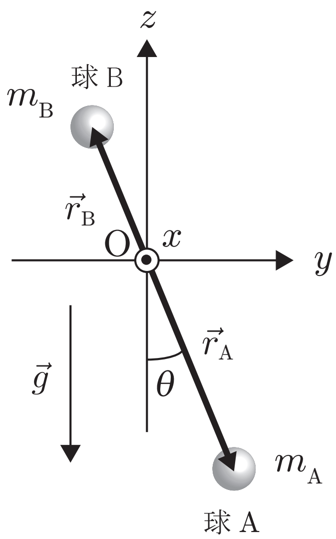

図 1

次に、原点 O と重心 $\vec{r}_{\mathrm{cm}}$ が等しい場合を考える。このとき、棒は一定の角速度 ω_1 で回転する。下記の問いに答えよ。

1-5. 棒の角速度 ω_1 が一定になることを示せ。

1-6. 角運動量の大きさ L 及び回転エネルギー K を答えよ。

1-7. 図 2 のように、重心の位置を変えずに棒の長さをゆっくり変化させた。球 A の原点 O からの距離が r'_{A} に変化した場合の回転エネルギー K' を K を用いて表せ。

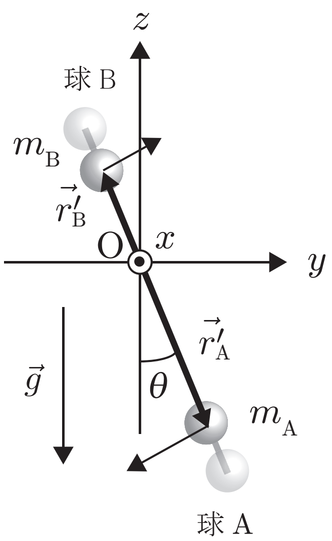

図 2

球 A と球 B は図 2 のように時計回りに回転しており、**1-7.** で棒の長さを変化させたあとの角速度を ω_2 (< 0) とする。ここでさらに、図 3 のように、$\theta = \theta_0$ $(0 < \theta_0 < \pi)$ の時に球 B を切り離した。このとき、下記の問いに答えよ。

1-8. 切り離した瞬間の球 A の運動エネルギー T 及び重力的ポテンシャルエネルギー V を求めよ。ただし、V は球 A が最下点にあるときに 0 とする。

1-9. 切り離した後の球 A の速さの最大値 $v_{\max}$ を求めよ。

1-10. 切り離した後の球 B の最高点 $z_{\max}$ を求めよ。

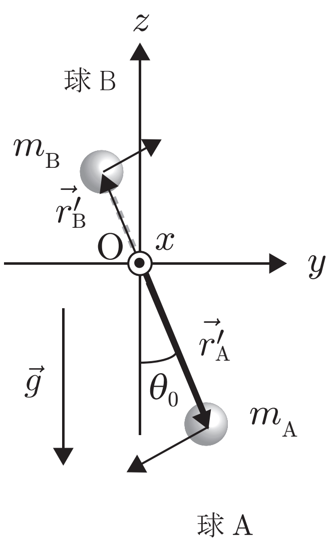

図 3

問題 II

問 1 図 1 のように、真空中に 2 つの円筒導体が同軸で置かれている。内円筒 A の半径を a、外円筒 B の半径を b、共通の長さを L とする。円筒の両端で電場の乱れはないものとし、また真空の誘電率を ε_0 として、以下の問に答えよ。

1-1. 内円筒導体 A に $+Q$ の電荷、外円筒導体 B に $-Q$ の電荷が与えられている。このとき、中心からの距離 r の関数として、導体間の電場の大きさが $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$ となることを示せ。

1-2. 図 1 の導体配置は、コンデンサーとみなせる。このコンデンサーの電気容量 C を求めよ。また、導体 B から導体 A へのゆっくりとした電荷の移動を考え、最初に 2 つの導体の電荷がともに 0 の状態から、前問の状態まで電荷を移動させるのに必要な仕事 W を求めよ。

1-3. 空間の電場エネルギー密度は $u = \varepsilon_0 E^2/2$ で与えられる。導体間の全電場エネルギー U が、前問の仕事に等しいことを証明せよ。

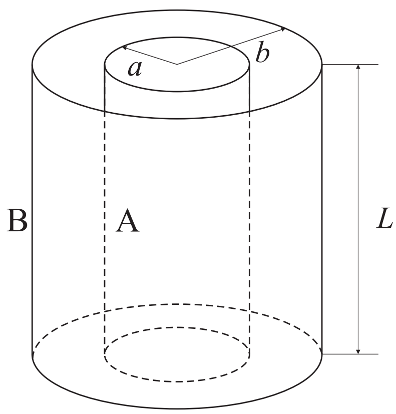

図 1

問 2 図 2 のように断面積 S、平均長 l、透磁率 μ のドーナツ型磁性体に、巻き数が N_1 と N_2 の電気抵抗を無視できる 2 つのコイル C_1、C_2 が巻きつけられている。透磁率 μ は真空の透磁率 μ_0 に比べて十分に大きく磁場は磁性体内部に閉じこめられているものとする。また、平均長 l は十分に長いため磁性体内部の磁束密度の大きさは一様で、磁性体の体積は Sl とおいて差し支えないものとする。このとき、以下の問に答えよ。

2-1. コイル C_1 に電流 I_1 を流したとき、磁性体中の磁束密度の大きさ B を求めよ。

2-2. 電流 I_1 が時間 t と共に変化したとき、コイル C_1 に発生する起電力を導き、その自己インダクタンスを求めよ。

2-3. コイル C_1 において、起電力に逆らって電流を 0 から I まで変化させるのに必要な仕事を求めよ。

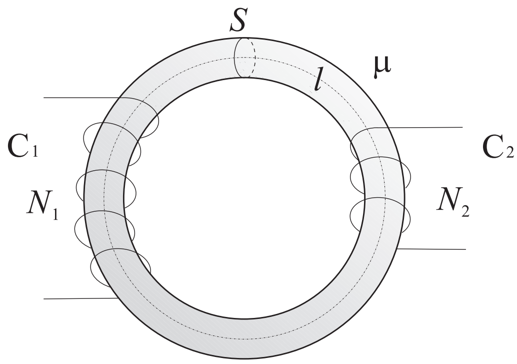

図 2

2-4. 2 つのコイルを貫く磁束 $\Phi = BS$ は同一である。これより、それぞれのコイルの両端の電圧 $V_1(t)$ と $V_2(t)$ 間に成り立つ関係は、コイルを流れる電流には依存しない。この関係を導け。

2-5. コイル C_1 に交流電圧 $V_0 \cos \Omega t$ を印加し、コイル C_2 には負荷抵抗 R を接続した。このとき、コイル C_1 とコイル C_2 に流れる交流電流 $I_1(t)$ と $I_2(t)$ を求めよ。ただし、$I_1(t)$ の t によらない項は 0 としてよい。これは、現実的な回路で定常状態を考えることに相当する。

問 3 図 3 のように z 軸方向に進行する平面電磁波が $z=0$ で真空から誘電率 ε、透磁率 μ_0 の誘電体に垂直に入射している。真空の誘電率および透磁率を ε_0 および μ_0 とし、簡単のために電場 $\vec{E}$ は x 軸方向を向いているものとする。また、誘電率 ε、透磁率 μ の一般の媒質中における Maxwell 方程式は $\vec{H}$ を磁場として、

$$\mathrm{div}\vec{D}=0、\mathrm{div}\vec{B}=0、\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}、\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}、\vec{D}=\varepsilon\vec{E}、\vec{B}=\mu\vec{H}$$

で与えられるものとして、以下の問に答えよ。ただし、必要であればベクトル $\vec{A}$ に対して $\triangle$ をラプラシアンとして $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A}=\mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\vec{A})-\triangle\vec{A}$ が成り立つことを用いてよい。

3-1. Maxwell 方程式を用いて、電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ が満たす波動方程式を求め、一般の媒質中における電磁波の速さ v を ε と μ を用いて表せ。

3-2. **3-1.** の平面波解、$\vec{E}=(E_0\cos(kz-\omega t),0,0)$、$\vec{H}=(0,H_0\cos(kz-\omega t),0)$ について、E_0 と H_0 の関係および、k と ω の関係を求めよ。ここで、k と ω は平面波の波数と角振動数である。また、電場エネルギー密度 $u_E=\varepsilon E^2/2$ と磁場エネルギー密度 $u_H=\mu H^2/2$ の大きさの比を求めよ。

3-3. $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ により定義されるポインティングベクトルを、**3-2.** の平面波解の場合について、その電磁場のエネルギー密度 $u=u_E+u_H$ を用いて表せ。また、ポインティングベクトルの物理的意味を説明せよ。

3-4. 真空とこの誘電体の境界における、電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ それぞれに対する境界条件を求めよ。ただし、境界面の電荷、電流密度は 0 であるものとする。

3-5. $\varepsilon=\varepsilon_0 n^2$（$n$ は屈折率）として境界面における電磁波の透過率と反射率を求めよ。また、入射波、透過波、反射波それぞれに対する電磁場のエネルギー密度を、u_{I}、u_{T}、u_{R} としたとき、それらの間に境界面上で成立する関係を求めよ。

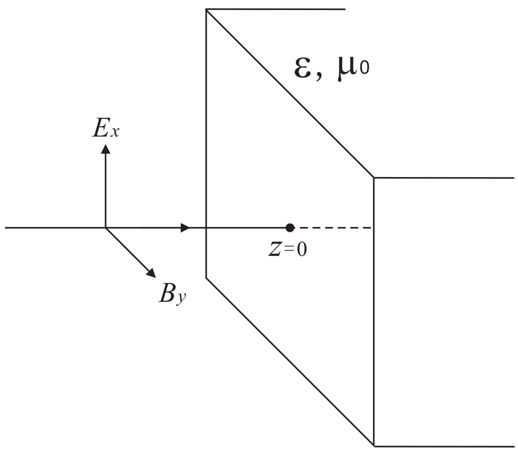

図 3